COURS PI

☆ L'école sur-mesure ☆

de la Maternelle au Bac, Établissement d'enseignement privé à distance, déclaré auprès du Rectorat de Paris

Première - Module 1 - Second degré

Mathématiques

v.5.1

- **Guide de méthodologie**
  pour appréhender notre pédagogie
- **Leçons détaillées**
  pour apprendre les notions en jeu
- **Exemples et illustrations**
  pour comprendre par soi-même
- **Prolongement numérique**
  pour être acteur et aller + loin
- **Exercices d'application**
  pour s'entraîner encore et encore
- **Corrigés des exercices**
  pour vérifier ses acquis

www.cours-pi.com

Paris & Montpellier

EN ROUTE VERS LE BACCALAURÉAT

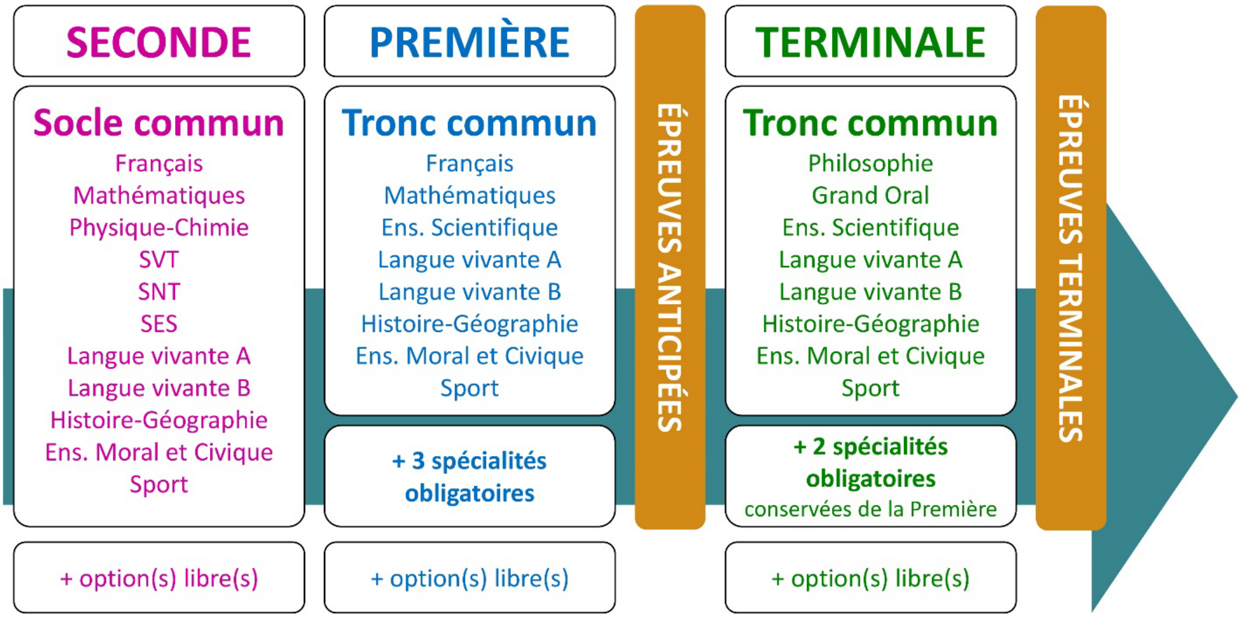
Comme vous le savez, **la réforme du Baccalauréat** est entrée en vigueur progressivement jusqu'à l'année 2021, date de délivrance des premiers diplômes de la nouvelle formule.

Dans le cadre de ce nouveau Baccalauréat, **notre Etablissement**, toujours attentif aux conséquences des réformes pour les élèves, s'est emparé de la question avec force **énergie** et **conviction** pendant plusieurs mois, animé par le souci constant de la réussite de nos lycéens dans leurs apprentissages d'une part, et par la **pérennité** de leur parcours d'autre part. Notre Etablissement a questionné la réforme, mobilisé l'ensemble de son atelier pédagogique, et déployé tout **son savoir-faire** afin de vous proposer un enseignement tourné continuellement vers l'**excellence**, ainsi qu'une scolarité tournée vers la **réussite**.

- Les **Cours Pi** s'engagent pour faire du parcours de chacun de ses élèves un **tremplin vers l'avenir**.
- Les **Cours Pi** s'engagent pour ne pas faire de ce nouveau Bac un diplôme au rabais.
- Les **Cours Pi** vous offrent **écoute** et **conseil** pour coconstruire une **scolarité sur-mesure**.

LE BAC DANS LES GRANDES LIGNES

Ce nouveau Lycée, c'est un enseignement à la carte organisé à partir d'un large tronc commun en classe de Seconde et évoluant vers un parcours des plus spécialisés année après année.



CE QUI A CHANGÉ

- Il n'y a plus de séries à proprement parler.
- Les élèves choisissent des spécialités : trois disciplines en classe de Première ; puis n'en conservent que deux en Terminale.
- Une nouvelle épreuve en fin de Terminale : le Grand Oral.
- Pour les lycéens en présentiel l'examen est un mix de contrôle continu et d'examen final laissant envisager un diplôme à plusieurs vitesses.
- Pour nos élèves, qui passeront les épreuves sur table, le Baccalauréat conserve sa valeur.

CE QUI N'A PAS CHANGÉ

- Le Bac reste un examen accessible aux candidats libres avec examen final.
- Le système actuel de mentions est maintenu.
- Les épreuves anticipées de français, écrit et oral, tout comme celle de spécialité abandonnée se dérouleront comme aujourd'hui en fin de Première.

A l'occasion de la réforme du Lycée, nos manuels ont été retravaillés dans notre atelier pédagogique pour un accompagnement optimal à la compréhension. Sur la base des programmes officiels, nous avons choisi de créer de nombreuses rubriques :

- **Suggestions de lecture** pour s'ouvrir à la découverte de livres de choix sur la matière ou le sujet
- **L'essentiel** et **le temps du bilan** pour souligner les points de cours à mémoriser au cours de l'année
- **À vous de jouer** pour mettre en pratique le raisonnement vu dans le cours et s'accaparer les ressorts de l'analyse, de la logique, de l'argumentation, et de la justification
- Et enfin ... la rubrique **Les Clés du Bac by Cours Pi** qui vise à vous donner, et ce dès la seconde, toutes les cartes pour réussir votre examen : notions essentielles, méthodologie pas à pas, exercices types et fiches étape de résolution !

MATHÉMATIQUES PREMIÈRE

Module 1 – Second degré

L'AUTEURE

Sylvie LAMY

« Faire des maths c'est jouer aux legos. Il s'agit d'assembler des briques pour solutionner des problèmes ». Diplômée de l'Ecole Polytechnique et agrégée de Mathématiques, elle poursuit aujourd'hui son parcours professionnel à l'Institut Géographique National et au Ministère des Transports comme chargée de mission sur les projets spatiaux. Passionnée par les sciences physiques, son approche pédagogique réside dans la transmission du raisonnement scientifique. Elle attend de ses élèves de comprendre et d'expliciter leur démarche dans la résolution des problèmes.

PRÉSENTATION

Ce **cours** est divisé en chapitres, chacun comprenant :

- Le **cours**, conforme aux programmes de l'Education Nationale
- Des **exercices d'application et d'entraînement**
- Les **corrigés** de ces exercices
- Des **devoirs** soumis à correction (et ***se trouvant hors manuel***). Votre professeur vous renverra le corrigé-type de chaque devoir après correction de ce dernier.

Pour une manipulation plus facile, les corrigés-types des exercices d'application et d'entraînement sont regroupés en fin de manuel.

CONSEILS A L'ÉLÈVE

Vous disposez d'un support de Cours complet : **prenez le temps** de bien le lire, de le comprendre mais surtout de l'**assimiler**. Vous disposez pour cela d'exemples donnés dans le cours et d'exercices types corrigés.
Vous pouvez rester un peu plus longtemps sur une unité mais travaillez régulièrement.

LES FOURNITURES

Vous devez posséder :

- une **calculatrice graphique pour l'enseignement scientifique au Lycée comportant un mode examen (requis pour l'épreuve du baccalauréat).**
- un **tableur** comme Excel de Microsoft (payant) ou Calc d'Open Office (gratuit et à télécharger sur http://fr.openoffice.org/). En effet, certains exercices seront faits de préférence en utilisant un de ces logiciels, mais vous pourrez également utiliser la calculatrice).

LES DEVOIRS

Les devoirs constituent le moyen d'évaluer l'acquisition de vos *savoirs* (« Ai-je assimilé les notions correspondantes ? ») et de vos *savoir-faire* (« Est-ce que je sais expliquer, justifier, conclure ? »).

Placés à des endroits clés des apprentissages, ils permettent la vérification de la bonne assimilation des enseignements.

Aux *Cours Pi*, vous serez accompagnés par un professeur selon chaque matière tout au long de votre année d'étude. Référez-vous à votre « Carnet de Route » pour l'identifier et découvrir son parcours.
Avant de vous lancer dans un devoir, assurez-vous d'avoir **bien compris les consignes**.
Si vous repérez des difficultés lors de sa réalisation, n'hésitez pas à le mettre de côté et à revenir sur les leçons posant problème. **Le devoir n'est pas un examen**, il a pour objectif de s'assurer que, même quelques jours ou semaines après son étude, une notion est toujours comprise.
Aux *Cours Pi*, chaque élève travaille à son rythme, parce que chaque élève est différent et que ce mode d'enseignement permet le « sur-mesure ».
Nous vous engageons à respecter le moment indiqué pour faire les devoirs. Vous les identifierez par le bandeau suivant :

Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le devoir n°1

Il est **important de tenir compte des remarques, appréciations et conseils du professeur-correcteur**. Pour cela, il est **très important d'envoyer les devoirs au fur et à mesure** et non groupés. **C'est ainsi que vous progresserez !**

Donc, dès qu'un devoir est rédigé, envoyez-le aux *Cours Pi* par le biais que vous avez choisi :

1) Par **soumission en ligne** via votre espace personnel sur **PoulPi**, pour un envoi **gratuit**, **sécurisé** et plus **rapide**.
2) Par **voie postale** à *Cours Pi*, 9 rue Rebuffy, 34 000 Montpellier
Vous prendrez alors soin de joindre une ***grande enveloppe libellée à vos nom et adresse****, et* ***affranchie au tarif en vigueur*** *pour qu'il vous soit retourné par votre professeur*

N.B. : *quel que soit le mode d'envoi choisi, vous veillerez à* ***toujours joindre l'énoncé du devoir ;*** *plusieurs énoncés étant disponibles pour le même devoir.*
N.B. : *si vous avez opté pour un envoi par voie postale et que vous avez à disposition un scanner, nous vous engageons à conserver une copie numérique du devoir envoyé. Les pertes de courrier par la Poste française sont très rares, mais sont toujours source de grand mécontentement pour l'élève voulant constater les fruits de son travail.*

SOUTIEN ET DISPONIBILITÉ

VOTRE RESPONSABLE PÉDAGOGIQUE

Professeur des écoles, professeur de français, professeur de maths, professeur de langues : notre Direction Pédagogique est constituée de spécialistes capables de dissiper toute incompréhension.

Au-delà de cet accompagnement ponctuel, notre Etablissement a positionné ses Responsables pédagogiques comme des « super profs » capables de co-construire avec vous une scolarité sur-mesure.
En somme, le Responsable pédagogique est votre premier point de contact identifié, à même de vous guider et de répondre à vos différents questionnements.

Votre Responsable pédagogique est la personne en charge du suivi de la scolarité des élèves.
Il est tout naturellement votre premier référent : une question, un doute, une incompréhension ? Votre Responsable pédagogique est là pour vous écouter et vous orienter. Autant que nécessaire et sans aucun surcoût.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?

Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.

QUEL EST SON RÔLE ?

Orienter les parents et les élèves.
Proposer la mise en place d'un accompagnement individualisé de l'élève.
Faire évoluer les outils pédagogiques.
Encadrer et coordonner les différents professeurs.

VOS PROFESSEURS CORRECTEURS

Notre Etablissement a choisi de s'entourer de professeurs diplômés et expérimentés, parce qu'eux seuls ont une parfaite connaissance de ce qu'est un élève et parce qu'eux seuls maîtrisent les attendus de leur discipline. En lien direct avec votre Responsable pédagogique, ils prendront en compte les spécificités de l'élève dans leur correction. Volontairement bienveillants, leur correction sera néanmoins juste, pour mieux progresser.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?

Une question sur sa correction ?

- faites un mail ou téléphonez à votre correcteur et demandez-lui d'être recontacté en lui laissant un message avec votre nom, celui de votre enfant et votre numéro.
- autrement pour une réponse en temps réel, appelez votre Responsable pédagogique.

LE BUREAU DE LA SCOLARITÉ

Placé sous la direction d'Elena COZZANI, le Bureau de la Scolarité vous orientera et vous guidera dans vos démarches administratives. En connaissance parfaite du fonctionnement de l'Etablissement, ces référents administratifs sauront solutionner vos problématiques et, au besoin, vous rediriger vers le bon interlocuteur.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?

Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.
04.67.34.03.00
scolarite@cours-pi.com

LE SOMMAIRE

Mathématiques – Module 1 – Second degré

Introduction 1

CHAPITRE 1. Fonctions et équations du second degré 3

OBJECTIFS

- Découvrir la fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée.
- Comprendre les notions associées de racine, signe, expression de la somme et du produit des racines.
- Découvrir la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré.
- Comprendre les notions associées de discriminant, factorisation éventuelle, résolution d'une équation du second degré et signe.

COMPÉTENCES VISÉES

- Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré donné sous forme factorisée.
- Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts.
- Factoriser une fonction polynôme du second degré, en diversifiant les stratégies : racine évidente, détection des racines par leur somme et leur produit, identité remarquable, application des formules générales.
- Choisir une forme adaptée (développée réduite, canonique, factorisée) d'une fonction polynôme du second degré dans le cadre de la résolution d'un problème (équation, inéquation, optimisation, variations).
- Résolution de l'équation du second degré.

1. Fonctions du second degré 4
Exercices 11
2. Équations et inéquations du second degré 17
Exercices 27
Le temps du bilan 37

CHAPITRE 2. Compléments sur les fonctions 39

OBJECTIFS

- Définir et connaître les principales propriétés des fonctions homographiques.
- Étudier la valeur absolue sous forme de fonction.

COMPÉTENCES VISÉES

- Connaître la représentation algébrique et graphique d'une fonction homographique.
- Savoir tracer la représentation de la fonction valeur absolue.

1. Fonctions homographiques 40
2. Fonctions valeur absolue 43
Exercices 45
Le temps du bilan 52

LES CLÉS DU BAC 53

CORRIGÉS à vous de jouer et exercices 57

SUGGESTIONS CULTURELLES

ESSAIS

- **Les maths c'est magique !** *Johnny Ball*
- **La grande aventure des nombres et du calcul** *Jason Lapeyronnie*
- **17 Équations qui ont changé le monde** *Ian Stewart*
- **Alex au pays des chiffres** *Alex Bellos*
- **Le grand roman des maths : de la préhistoire à nos jours** *Mickael Launay*
- **Histoire universelle des chiffres : L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul** *Georges Ifrah*
- **Le démon des maths** *Hans Magnus Enzensberger*
- **A propos de rien : une histoire du zéro** *Robert Kaplan*

BANDES-DESSINÉES

- **Logicomix** *Doxiádis / Papadátos / Papadimitríou*
- **Les maths en BD 1 et 2** *Larry Gonick*

DOCUMENTAIRES AUDIOVISUELS

- **L'extraordinaire aventure du chiffre 1** *Terry Jones*
- **Voyage au pays des maths** *Arte*

PODCASTS

- **L'oreille mathématiques** *Podcast de la Maison Poincarré*
- **Maths en tête** *toutes plateformes*

YOUTUBE

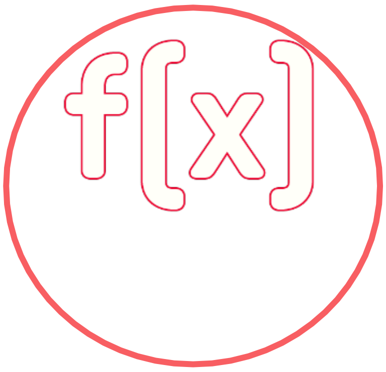
- **Chaîne YouTube Maths et Tiques** *Yvan Monka*
- **Chaîne YouTube Micmaths** *Mickaël Launay*
- **Chaîne YouTube de la Maison des mathématiques et de l'informatique**
- **Chaîne YouTube Automaths** *Jason Lapeyronnie*

Le Cours

Prenez un objet et jetez-le très loin devant vous… Recommencez avec un autre objet… Recommencez avec le même objet mais en lançant plus fort… Vous constaterez que la trajectoire de l'objet a toujours une forme de cloche inversée ! Ce mystère se cache dans les lois de la gravitation, découvertes par Newton. La mise en équation de ces lois et leur résolution mathématique fait apparaître des objets spéciaux : des fonctions du second degré, dont les courbes représentatives correspondent aux trajectoires des objets que vous avez lancés précédemment !

Dans ce module, nous allons faire l'étude complète de ces fonctions du second degré, généralisation de la fonction carrée. Connues et étudiées par les Babyloniens au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle av. JC puis par les mathématiciens Indiens, c'est le mathématicien Al-Khwarizmi, déjà connu pour sa résolution des équations du premier degré, qui systématise la résolution des équations du second degré. A l'issu de ce module, vous serez capable de résoudre n'importe quelle équation (polynomiale) comportant des carrés ! Dans le second chapitre, nous verrons quelques compléments sur une généralisation de la fonction inverse : les fonctions homographiques, impliquées également dans le mouvement des trajectoires des planètes avant de faire une étude fonctionnelle de la valeur absolue.

CHAPITRE 1
FONCTIONS ET ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ



Les fonctions du 2nd degré jouent un rôle important en particulier en physique classique (trajectoire d'un projectile ou de comètes, distance parcourue dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré…) et même en physique quantique ! La fonction carrée, la plus élémentaire d'entre elles a été étudiée en 2^{nde}. Nous allons généraliser cette fonction.

OBJECTIFS

- Découvrir la fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée.
- Comprendre les notions associées de racine, signe, expression de la somme et du produit des racines.
- Découvrir la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré.
- Comprendre les notions associées de discriminant, factorisation éventuelle, résolution d'une équation du second degré et signe.

COMPÉTENCES VISÉES

- Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré donné sous forme factorisée.
- Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts.
- Factoriser une fonction polynôme du second degré, en diversifiant les stratégies : racine évidente, détection des racines par leur somme et leur produit, identité remarquable, application des formules générales.
- Choisir une forme adaptée (développée réduite, canonique, factorisée) d'une fonction polynôme du second degré dans le cadre de la résolution d'un problème (équation, inéquation, optimisation, variations).
- Résolution de l'équation du second degré.

PRÉREQUIS

- Bases sur les fonctions.
- Connaissance des fonctions usuelles.
- Factorisation/développement d'une expression.

FONCTIONS ET ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Fonctions du second degré

Les fonctions du 2^{nd} degré jouent un rôle important en particulier en physique classique (trajectoire d'un projectile ou de comètes, distance parcourue dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré...) et même en physique quantique ! La fonction carrée, la plus élémentaire d'entre elles a été étudiée en 2^{nde}. Nous allons généraliser cette fonction. Pour débuter le cours, nous allons commencer par 2 activités

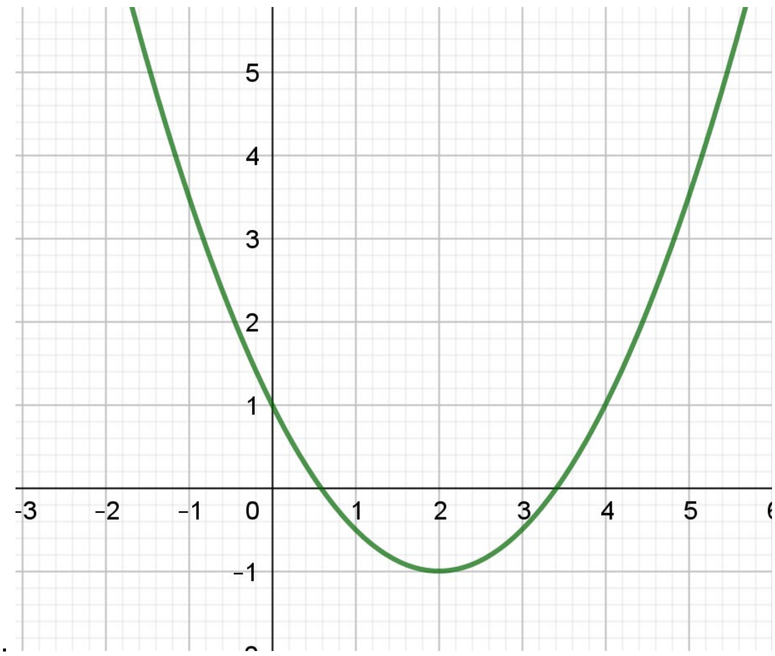
Première approche

ACTIVITÉ 1.1

1) Rappelez la définition d'une fonction *f* strictement croissante sur un intervalle *I.* Quelle allure a alors la courbe ?
2) Rappelez la définition d'une fonction *f* strictement décroissante sur un intervalle *I.* Quelle allure a alors la courbe ?
3) Rappelez la définition du minimum *m* d'une fonction *f* sur un intervalle *I.*
4) Rappelez la définition du maximum *M* d'une fonction *f* sur un intervalle *I.*

ACTIVITÉ 1.2

Voici la courbe représentative d'une fonction *f*



1) Comment s'appelle ce type de courbe ?
2) A la courbe de quelle fonction de référence fait-elle penser ?
3) Quelles sont les coordonnées du sommet ?
4) Quelles sont les variations de *f* ? Faites son tableau de variations.
5) La courbe présente un axe de symétrie. Tracez-le et donnez son équation.

SOLUTIONS DE L'ACTIVITÉ 1.1

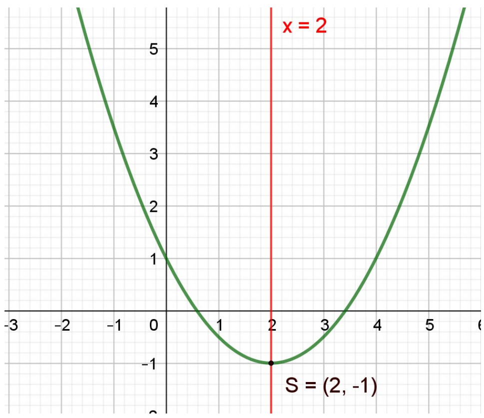
1) *f* est strictement croissante sur *I* si et seulement si :
   si pour tout *a* et *b* point de *I*, on a : $a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$
   La courbe monte.
2) *f* est strictement décroissante sur *I* si et seulement si :
   si *a* et *b* sont 2 points de *I*, on a : $a<b \Rightarrow f(a)>f(b)$
   La courbe descend.
3) *m* est le minimum de f sur I si et seulement si : Pour tout x de I, $f(x) \geq m$
4) M est le minimum de f sur I si et seulement si : Pour tout x de I, $f(x) \leq M$

SOLUTIONS DE L'ACTIVITÉ 1.2

1) Il s'agit d'une parabole.
2) Cela fait penser à la fonction carrée.
3) S(2;-1)
4) f est décroissante sur $]-\infty; 2]$; f est croissante sur $[2; +\infty[$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

5) La courbe présente la droite d'équation x=2 comme axe de symétrie.



A présent, entrons dans le cours.

EXPRESSIONS D'UN POLYNOME DU SECOND DEGRÉ

L'ESSENTIEL

Une fonction polynôme du second degré (ou trinôme) est une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire :

$f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des nombres donnés avec $a \neq 0$.
$ax^2 + bx + c$ est **l'expression réduite** de *f*.

- Il s'agit d'une généralisation de la fonction carrée (qui est par conséquent la fonction polynôme du second degré la plus simple).
- Lorsque la fonction n'est pas donnée sous la forme $f(x)=ax^2+bx+c$, il faut vérifier qu'il s'agit effectivement d'une fonction du second degré.

Exemples :

on considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$:

$f(x)=2x^2+3x-5 \quad g(x)=(x+4)^2 \quad h(x)=(x-4)(2-x) \qquad i(x)=(x-4)(2-x)+x^2$

f est fonction du second degré.

$g(x)=(x+4)^2=x^2+8x+16$ *g* est une fonction du second degré.

$h(x)=(x-4)(2-x)=2x-x^2-8+4x=-x^2+6x-8$ *g* est une fonction du second degré.

$i(x)=(x-4)(2-x)+x^2=-2x+2x+4x-8+2x$
$=6x-8.$ *i* n'est pas une fonction du second degré (*i* est affine)

Exemples :

$P(x)=x^2-3x+2 \qquad Q(x)=2x(-x+4)=-2x^2+8x \qquad R(x)=2x(-x+4)+2x^2=8x$

P et *Q* sont des polynômes du second degré, mais pas R

L'ESSENTIEL

Deux polynômes du second degré sont égaux si et seulement si leurs formes réduites sont égales

Démonstration

Soient $P(x)=ax^2+bx+c$ et $Q(x)=a'x^2+b'x+c'$ deux polynômes du second degré.
Si $a=a';b=b';c=c'$ alors pour tout *x* on a $P(x)=Q(x)$. Les fonctions sont égales.
Réciproquement, si les fonctions sont égales, on a :
$P(0)=Q(0)$ d'où $c=c'$
$P(1)=Q(1)$ d'où $a+b+c=a'+b'+c \Leftrightarrow (1) a+b=a'+b'$
$P(-1)=Q(-1)$ d'où $a-b+c=a'-b'+c \Leftrightarrow (2) a-b=a'-b'$
En additionnant (1) et (2), on obtient $a=a'$; en additionnant (2) de (1), on obtient $b=b'$.

Remarque : ce résultat s'étend aux polynômes de degré supérieur à 2 : deux polynômes sont égaux si leurs formes réduites sont identiques.

À VOUS DE JOUER 1

Pour chacune de ces fonctions, cochez les réponses exactes.

$f(x)$....	$=-x^2-5$	$=x(x+1)-x^2$	$=-x^2-5$	$=-x^3$	$=x(x+1)$
linéaire	☐	☐	☐	☐	☐
affine	☐	☐	☐	☐	☐
2^{nd} degré	☐	☐	☐	☐	☐

L'ESSENTIEL

Une fonction polynôme du second degré *P* peut s'écrire sous la forme :

$$P(x)=a(x-\alpha)^2+\beta \text{ avec } a\neq 0.$$

Cette forme est la forme canonique de *P*.

Si la forme réduite de *P* est : $P(x)=ax^2+bx+c,$

on a alors : $\alpha=-\dfrac{b}{2a} \qquad \beta=P(\alpha)$

Démonstration

Soit $P(x)=ax^2+bx+c$ un polynôme du second degré ($a\neq 0$).

$P(x)=ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c$

$(x^2+\frac{b}{a}x)$ peut être reconnu comme étant le début du développement de $(x+\frac{b}{2a})^2$.

En effet : $(x+\frac{b}{2a})^2=x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

Donc $x^2+\frac{b}{a}x=(x+\frac{b}{2a})^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

On en déduit que : $P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\frac{b^2}{4a^2}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

On pose : $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{b^2-4ac}{4a}$

P s'écrit : $P(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ et on peut remarquer que $\beta=P(\alpha)$.

Exemple :

Mettre sous forme canonique $P(x)=2x^2+3x+5$

$P(x)=2x^2+3x+5$ $P(x)=2(x^2+\frac{3}{2}x)+5$	*On met 2 en facteur pour les membres contenant x.*
$P(x)=2\left[(x+\frac{3}{4})^2-\frac{9}{16}\right]+5$	*On considère ce qu'il y a entre ( ) comme le début du développement de l'identité remarquable :* $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ *Il faut diviser par 2 le coefficient en x et retrancher le membre constant.*
$P(x)=2(x+\frac{3}{4})^2-\frac{9}{8}+5$ $P(x)=2(x+\frac{3}{4})^2+\frac{31}{8}$	*On termine la mise sous forme canonique.* ***Remarque*** : *on peut vérifier que* $\alpha=-\frac{b}{2a}$

À VOUS DE JOUER 2

Mettez sous forme canonique $P(x)=-x^2+6x+4$ en complétant.

$$P(x)=-x^2+6x+4$$
$$=-(x^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)+4$$
$$=-(x-\ldots\ldots\ldots\ldots)^2+\ldots\ldots\ldots+4$$
$$=-(x-\ldots\ldots\ldots\ldots)^2$$

On peut vérifier que α vaut .... donc 3.

Remarque : la valeur $-\frac{b}{2a}$ joue un grand rôle dans les polynômes du second degré.

On peut l'utiliser pour retrouver la forme canonique :

Exemple :

Mettre sous forme canonique $P(x)=2x^2+3x+5$

$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{4}$ $\quad f(\alpha)=2\times(-\frac{3}{4})^2+3\times(-\frac{3}{4})+5=\frac{9}{8}-\frac{9}{4}+5=\frac{9-18+40}{8}=\frac{31}{8}$

$P(x)=2(x+\frac{3}{4})^2+\frac{31}{8}$

À VOUS DE JOUER 3

Mettez sous forme canonique $P(x)=-x^2+6x+4$ en complétant.

$\alpha=-\frac{b}{2a}=$........... $\quad f(\alpha)=$...

$P(x)=a(.............)^2+f(\alpha)$

$P(x)=$...

ÉTUDE DES FONCTIONS DU SECOND DEGRÉ

Soit *f* une fonction du 2nd degré : $f(x)=ax^2+bx+c$

Cas $a>0$

***f* est strictement décroissante sur $]-\infty;-\frac{b}{2a}]$; *f* est strictement croissante sur $[-\frac{b}{2a};+\infty[$.**

La fonction admet un minimum en $-\frac{b}{2a}$.

Cas $a<0$

***f* est strictement croissante sur $]-\infty;-\frac{b}{2a}]$; *f* est strictement décroissante sur $[-\frac{b}{2a};+\infty[$.**

La fonction admet un maximum en $-\frac{b}{2a}$.

Justification du sens de variation

On se place dans le cas a>0

Soit x_1,x_2 tels que $-\frac{b}{2a}<x_1<x_2$

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=ax_2^2+bx_2+c-(ax_1^2+bx_1+c)\\&=a(x_2^2-x_1^2)+b(x_2-x_1)\\&=a(x_2-x_1)(x_2+x_1)+b(x_2-x_1)\\&=(x_2-x_1)[a(x_2+x_1)+b]\end{aligned}$$

$x_1<x_2$ donc $x_2-x_1>0$

$-\frac{b}{2a}<x_1$ et $-\frac{b}{2a}<x_2$ donc $x_1+x_2>-\frac{b}{a}$

comme $a>0$, $x_1+x_2>-\frac{b}{a}\Rightarrow a(x_1+x_2)>-b\Rightarrow a(x_1+x_2)+b>0$

On a donc $f(x_2)-f(x_1)>0$ $\quad f$ est donc croissante sur $[-\frac{b}{2a};+\infty[$

On montre de la même manière que f est décroissante sur $]-\infty;-\frac{b}{2a}]$

À VOUS DE JOUER 4

Répondez à cette question.

On se place dans le cas : a<0.

Que faut-il modifier dans la justification précédente ?

Justification du minimum (ou du maximum)

On utilise la forme canonique : $P(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ (rappel : $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$)

On se place dans le cas a>0

Pour tout x, $a(x-\alpha)^2 \geq 0$ donc $a(x-\alpha)^2+\beta \geq \beta$.

β est donc le minimum de la fonction f. Il est atteint pour $x=\alpha=-\dfrac{b}{2a}$.

À VOUS DE JOUER 5

Répondez à cette question.

On se place dans le cas : a<0.

Que faut-il modifier dans la justification précédente ?

Tableau de variations. Cas $a>0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

Tableau de variations. Cas $a<0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$

À VOUS DE JOUER 6

Complétez.

1)

$f(x)=4x^2-8x+11$ admet un minimium m en $x=-\frac{b}{......}=......$

Ce minimum vaut : $f(...)=........................=......$

x	$-\infty$	$......$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	…….	$\nearrow$

2)

$f(x)=-x^2+4x+1$ admet un ………………… M en $x=-\frac{b}{......}=......$

Ce ………………. vaut : $M=f(...)=........................=......$

x	$-\infty$	$......$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	…….	$\nearrow$

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

L'ESSENTIEL

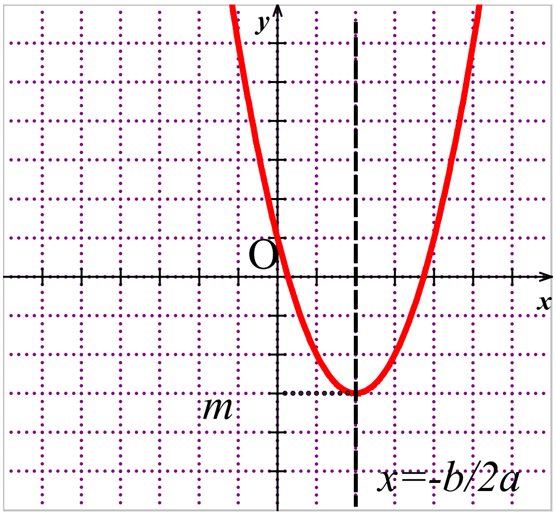
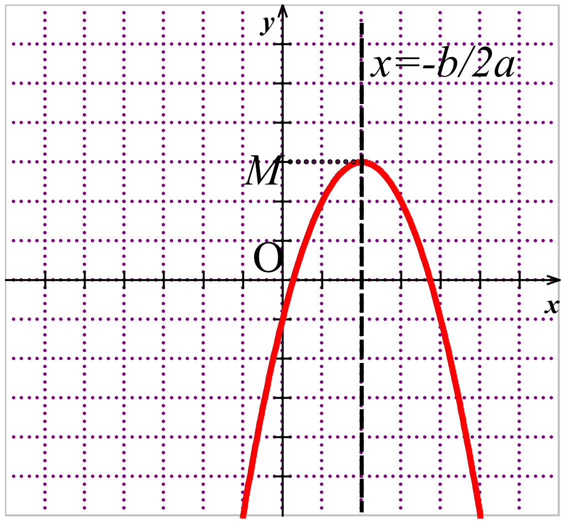
Courbe représentative

La courbe représentative d'une fonction du 2nd degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole.

- Si a>0, la parabole est tournée vers le haut.
- Si a<0, la parabole est tournée vers le bas.

Le sommet de la parabole est S $(S(-\frac{b}{2a}; f(-\frac{b}{2a}))$.

La courbe est symétrique par rapport à la droite $x = -\frac{b}{2a}$

	
La parabole est tournée vers le haut. Elle admet un axe de symétrie : $x=-\dfrac{b}{2a}$.	La parabole est tournée vers le bas. Elle admet un axe de symétrie : $x=-\dfrac{b}{2a}$.

À VOUS DE JOUER 7

Complétez.

$f(x)=x^2+2x+3$ a pour représentation graphique

- une ………………………………………. tournée vers le …………………. ,
- d'axe de symétrie : $x=-\dfrac{b}{\ldots\ldots}$ soit $x=\ldots\ldots\ldots$
- de sommet (…. ;….) car $f(\ldots..)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots$

Abordons maintenant une série d'exercices, afin de vérifier vos connaissances.
Les exercices ont été classés dans un ordre d'approfondissement croissant.
Les réponses aux exercices se trouvent en fin de manuel.

EXERCICE 01

Soit $f(x)=3x^2-6x-4$

1) Mettez *f* sous forme canonique.

-----

2) *f* admet-elle un maximum ? Un minimum ? Déterminez-le.

EXERCICE 02

Soit $f(x)=2x^2-3x+1$

1) Calculez les valeurs exactes de $f(1)$ $f(\frac{1}{3})$ $f(-2)$ $f(\sqrt{3})$ $f(1+\sqrt{3})$

2) f Etablissez le tableau de variations (en déterminant le minimum et le maximum de la fonction).

EXERCICE 03

Avec un peu de recherche et de réflexion, répondez aux questions suivantes.

1) Quelles sont les fonctions polynomiales du 2nd degré paires ?

2) Quelles sont les fonctions polynomiales du 2nd degré impaires ?

EXERCICE 04

Soit $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$

1) Montrez que pour tout réel x $f(-\frac{b}{2a}+x)=f(-\frac{b}{2a}-x)$

Indication : utilisez la forme canonique.

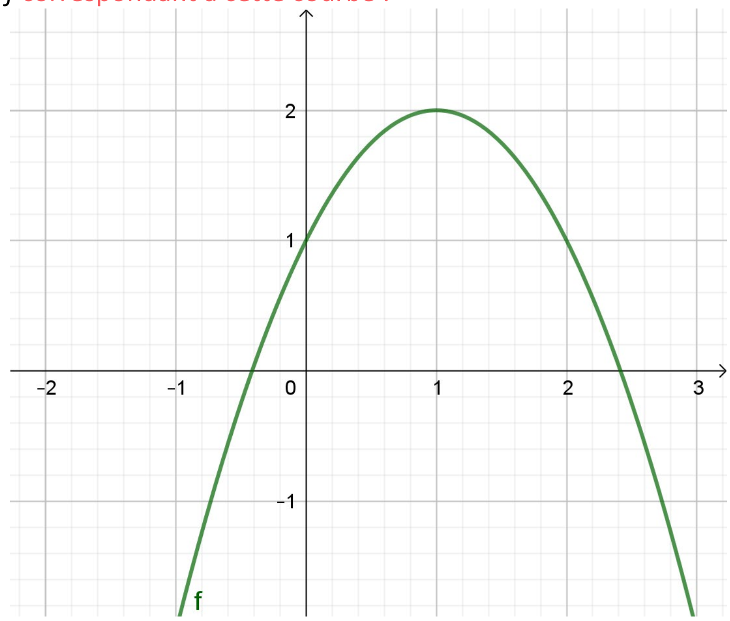
2) Quelle propriété concernant la courbe représentative de f a-t-on montrée ?

EXERCICE 05

Déterminez l'équation d'une parabole ayant comme sommet le point $S(\frac{5}{2};1)$ et passant par le point $A(3;-1)$

EXERCICE 06

Déterminez la fonction f correspondant à cette courbe :



EXERCICE 07

Un petit problème d'optimisation.
Quelle est l'aire maximale d'un rectangle dont le périmètre vaut 20 cm ?

EXERCICE 08

On considère pour a non nul la parabole $\mathscr{P}_a$ d'équation : $y = ax^2 + x + 1$

On appelle S_a le sommet de $\mathscr{P}_a$. Quel est l'ensemble des points que décrit S_a quand a parcourt $\mathbb{R}^*$?

EXERCICE 09

INFORMATIQUE

Programmez une fonction Python **EXTR(a,b,c)** donnant l'extremum d'une fonction du 2nd degré et qui précise si c'est un maximum ou un minimum.

EXERCICE 10

CALCULATRICE

A l'aide de votre calculatrice tracez la fonction $f(x) = -0,5x^2 - 3x + 2$

Déterminez graphiquement le maximum.

Vous pouvez maintenant faire et envoyer le devoir n°1