COURS PI

L'école sur-mesure

de la Maternelle au Bac, Établissement d'enseignement privé à distance, déclaré auprès du Rectorat de Paris

Première - Module 2 - Dérivation

Mathématiques

v.5.1

- ***Guide de méthodologie***
  pour appréhender notre pédagogie
- ***Leçons détaillées***
  pour apprendre les notions en jeu
- ***Exemples et illustrations***
  pour comprendre par soi-même
- ***Prolongement numérique***
  pour être acteur et aller + loin
- ***Exercices d'application***
  pour s'entraîner encore et encore
- ***Corrigés des exercices***
  pour vérifier ses acquis

www.cours-pi.com

Paris & Montpellier

EN ROUTE VERS LE BACCALAURÉAT

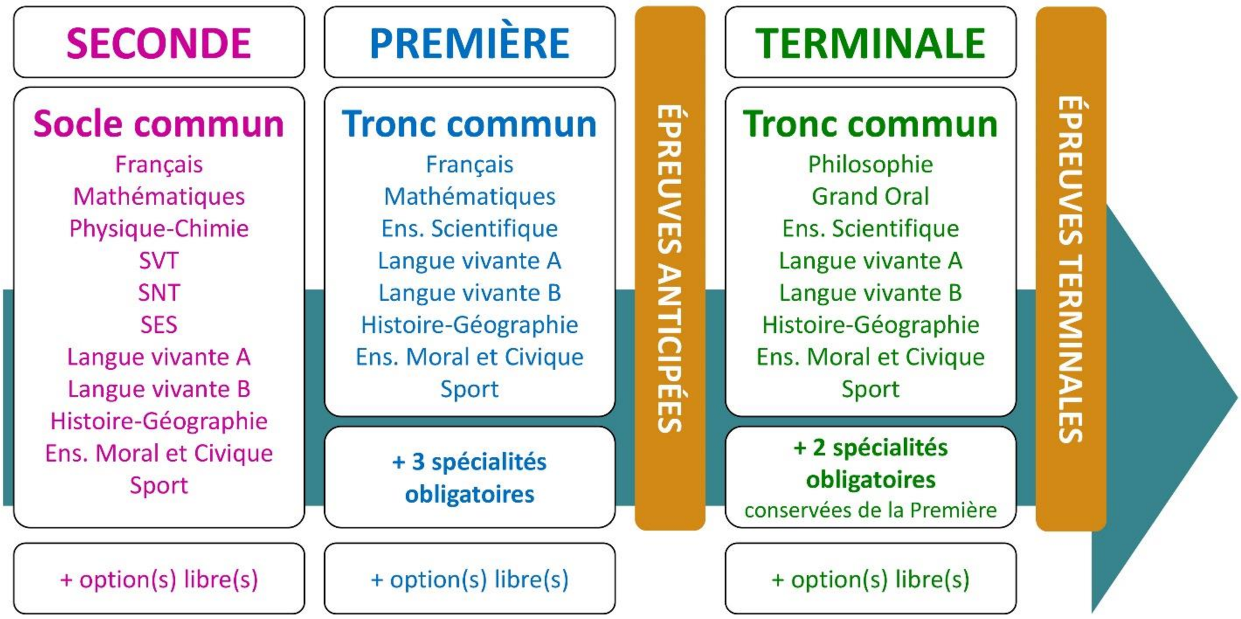
Comme vous le savez, **la réforme du Baccalauréat** est entrée en vigueur progressivement jusqu'à l'année 2021, date de délivrance des premiers diplômes de la nouvelle formule.

Dans le cadre de ce nouveau Baccalauréat, **notre Etablissement**, toujours attentif aux conséquences des réformes pour les élèves, s'est emparé de la question avec force **énergie** et **conviction** pendant plusieurs mois, animé par le souci constant de la réussite de nos lycéens dans leurs apprentissages d'une part, et par la **pérennité** de leur parcours d'autre part. Notre Etablissement a questionné la réforme, mobilisé l'ensemble de son atelier pédagogique, et déployé tout **son savoir-faire** afin de vous proposer un enseignement tourné continuellement vers l'**excellence**, ainsi qu'une scolarité tournée vers la **réussite**.

- Les **Cours Pi** s'engagent pour faire du parcours de chacun de ses élèves un **tremplin vers l'avenir**.
- Les **Cours Pi** s'engagent pour ne pas faire de ce nouveau Bac un diplôme au rabais.
- Les **Cours Pi** vous offrent **écoute** et **conseil** pour coconstruire une **scolarité sur-mesure**.

LE BAC DANS LES GRANDES LIGNES

Ce nouveau Lycée, c'est un enseignement à la carte organisé à partir d'un large tronc commun en classe de Seconde et évoluant vers un parcours des plus spécialisés année après année.



CE QUI A CHANGÉ

- Il n'y a plus de séries à proprement parler.
- Les élèves choisissent des spécialités : trois disciplines en classe de Première ; puis n'en conservent que deux en Terminale.
- Une nouvelle épreuve en fin de Terminale : le Grand Oral.
- Pour les lycéens en présentiel l'examen est un mix de contrôle continu et d'examen final laissant envisager un diplôme à plusieurs vitesses.
- Pour nos élèves, qui passeront les épreuves sur table, le Baccalauréat conserve sa valeur.

CE QUI N'A PAS CHANGÉ

- Le Bac reste un examen accessible aux candidats libres avec examen final.
- Le système actuel de mentions est maintenu.
- Les épreuves anticipées de français, écrit et oral, tout comme celle de spécialité abandonnée se dérouleront comme aujourd'hui en fin de Première.

A l'occasion de la réforme du Lycée, nos manuels ont été retravaillés dans notre atelier pédagogique pour un accompagnement optimal à la compréhension. Sur la base des programmes officiels, nous avons choisi de créer de nombreuses rubriques :

- **Suggestions de lecture** pour s'ouvrir à la découverte de livres de choix sur la matière ou le sujet
- **L'essentiel** et **le temps du bilan** pour souligner les points de cours à mémoriser au cours de l'année
- **À vous de jouer** pour mettre en pratique le raisonnement vu dans le cours et s'accaparer les ressorts de l'analyse, de la logique, de l'argumentation, et de la justification
- Et enfin ... la rubrique **Les Clés du Bac by Cours Pi** qui vise à vous donner, et ce dès la seconde, toutes les cartes pour réussir votre examen : notions essentielles, méthodologie pas à pas, exercices types et fiches étape de résolution !

MATHÉMATIQUES PREMIÈRE

Module 2 – Dérivation

L'AUTEURE

Sylvie LAMY

« Faire des maths c'est jouer aux legos. Il s'agit d'assembler des briques pour solutionner des problèmes ». Diplômée de l'Ecole Polytechnique et agrégée de Mathématiques, elle poursuit aujourd'hui son parcours professionnel à l'Institut Géographique National et au Ministère des Transports comme chargée de mission sur les projets spatiaux. Passionnée par les sciences physiques, son approche pédagogique réside dans la transmission du raisonnement scientifique. Elle attend de ses éléves de comprendre et d'expliciter leur démarche dans la résolution des problèmes.

PRÉSENTATION

Ce **cours** est divisé en chapitres, chacun comprenant :

- Le **cours**, conforme aux programmes de l'Education Nationale
- Des **exercices d'application et d'entraînement**
- Les **corrigés** de ces exercices
- Des **devoirs** soumis à correction (et ***se trouvant hors manuel***). Votre professeur vous renverra le corrigé-type de chaque devoir après correction de ce dernier.

Pour une manipulation plus facile, les corrigés-types des exercices d'application et d'entraînement sont regroupés en fin de manuel.

CONSEILS A L'ÉLÈVE

Vous disposez d'un support de Cours complet : **prenez le temps** de bien le lire, de le comprendre mais surtout de l'**assimiler**. Vous disposez pour cela d'exemples donnés dans le cours et d'exercices types corrigés.
Vous pouvez rester un peu plus longtemps sur une unité mais travaillez régulièrement.

LES FOURNITURES

Vous devez posséder :

- une **calculatrice graphique pour l'enseignement scientifique au Lycée comportant un mode examen (requis pour l'épreuve du baccalauréat).**
- un **tableur** comme Excel de Microsoft (payant) ou Calc d'Open Office (gratuit et à télécharger sur http://fr.openoffice.org/). En effet, certains exercices seront faits de préférence en utilisant un de ces logiciels, mais vous pourrez également utiliser la calculatrice).

LES DEVOIRS

Les devoirs constituent le moyen d'évaluer l'acquisition de vos *savoirs* (« Ai-je assimilé les notions correspondantes ? ») et de vos *savoir-faire* (« Est-ce que je sais expliquer, justifier, conclure ? »).

Placés à des endroits clés des apprentissages, ils permettent la vérification de la bonne assimilation des enseignements.

Aux *Cours Pi*, vous serez accompagnés par un professeur selon chaque matière tout au long de votre année d'étude. Référez-vous à votre « Carnet de Route » pour l'identifier et découvrir son parcours.
Avant de vous lancer dans un devoir, assurez-vous d'avoir **bien compris les consignes**.
Si vous repérez des difficultés lors de sa réalisation, n'hésitez pas à le mettre de côté et à revenir sur les leçons posant problème. **Le devoir n'est pas un examen**, il a pour objectif de s'assurer que, même quelques jours ou semaines après son étude, une notion est toujours comprise.
Aux *Cours Pi*, chaque élève travaille à son rythme, parce que chaque élève est différent et que ce mode d'enseignement permet le « sur-mesure ».
Nous vous engageons à respecter le moment indiqué pour faire les devoirs. Vous les identifierez par le bandeau suivant :

Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le devoir n°1

Il est **important de tenir compte des remarques, appréciations et conseils du professeur-correcteur**. Pour cela, il est **très important d'envoyer les devoirs au fur et à mesure** et non groupés. **C'est ainsi que vous progresserez !**

Donc, dès qu'un devoir est rédigé, envoyez-le aux *Cours Pi* par le biais que vous avez choisi :

1) Par **soumission en ligne** via votre espace personnel sur **PoulPi**, pour un envoi **gratuit**, **sécurisé** et plus **rapide**.
2) Par **voie postale** à *Cours Pi*, 9 rue Rebuffy, 34 000 Montpellier
   *Vous prendrez alors soin de joindre une **grande enveloppe** **libellée à vos nom et adresse**, et **affranchie** **au tarif en vigueur** pour qu'il vous soit retourné par votre professeur*

N.B. : *quel que soit le mode d'envoi choisi, vous veillerez à **toujours joindre l'énoncé du devoir ;** plusieurs énoncés étant disponibles pour le même devoir.*
N.B. : *si vous avez opté pour un envoi par voie postale et que vous avez à disposition un scanner, nous vous engageons à conserver une copie numérique du devoir envoyé. Les pertes de courrier par la Poste française sont très rares, mais sont toujours source de grand mécontentement pour l'élève voulant constater les fruits de son travail.*

VOTRE RESPONSABLE PÉDAGOGIQUE

Professeur des écoles, professeur de français, professeur de maths, professeur de langues : notre Direction Pédagogique est constituée de spécialistes capables de dissiper toute incompréhension.

Au-delà de cet accompagnement ponctuel, notre Etablissement a positionné ses Responsables pédagogiques comme des « super profs » capables de co-construire avec vous une scolarité sur-mesure.
En somme, le Responsable pédagogique est votre premier point de contact identifié, à même de vous guider et de répondre à vos différents questionnements.

Votre Responsable pédagogique est la personne en charge du suivi de la scolarité des élèves.
Il est tout naturellement votre premier référent : une question, un doute, une incompréhension ? Votre Responsable pédagogique est là pour vous écouter et vous orienter. Autant que nécessaire et sans aucun surcoût.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?

Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.

QUEL EST SON RÔLE ?

Orienter les parents et les élèves.
Proposer la mise en place d'un accompagnement individualisé de l'élève.
Faire évoluer les outils pédagogiques.
Encadrer et coordonner les différents professeurs.

VOS PROFESSEURS CORRECTEURS

Notre Etablissement a choisi de s'entourer de professeurs diplômés et expérimentés, parce qu'eux seuls ont une parfaite connaissance de ce qu'est un élève et parce qu'eux seuls maîtrisent les attendus de leur discipline. En lien direct avec votre Responsable pédagogique, ils prendront en compte les spécificités de l'élève dans leur correction. Volontairement bienveillants, leur correction sera néanmoins juste, pour mieux progresser.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?

Une question sur sa correction ?

- faites un mail ou téléphonez à votre correcteur et demandez-lui d'être recontacté en lui laissant un message avec votre nom, celui de votre enfant et votre numéro.
- autrement pour une réponse en temps réel, appelez votre Responsable pédagogique.

LE BUREAU DE LA SCOLARITÉ

Placé sous la direction d'Elena COZZANI, le Bureau de la Scolarité vous orientera et vous guidera dans vos démarches administratives. En connaissance parfaite du fonctionnement de l'Etablissement, ces référents administratifs sauront solutionner vos problématiques et, au besoin, vous rediriger vers le bon interlocuteur.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?

Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.
04.67.34.03.00
scolarite@cours-pi.com

LE SOMMAIRE

Mathématiques – Module 2 – Dérivation

OBJECTIFS

- Découvrir la notion algébrique de taux de variation et faire le lien avec la notion géométrique de sécantes à la courbe représentative d'une fonction en un point donné.
- Définir le nombre dérivé d'une fonction en un point, comme limite du taux de variation et utiliser la notation $f'(a)$.
- Définir la notion de tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point, comme « limite des sécantes » et faire le lien entre pente de cette droite et nombre dérivé.
- Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a. C'est la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

COMPÉTENCES VISÉES

- Savoir calculer un taux de variation, la pente d'une sécante.
- Interpréter le nombre dérivé en contexte : pente d'une tangente, vitesse instantanée, coût marginal…
- Déterminer graphiquement un nombre dérivé par la pente de la tangente.
- Construire la tangente en un point à une courbe représentative connaissant le nombre dérivé.
- Savoir déterminer l'équation de la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction.
- À partir de la définition, calculer le nombre dérivé en un point.

OBJECTIFS

- Apprendre la notion de fonction dérivable sur un intervalle et celle de fonction dérivée.
- Connaître les fonctions dérivées des fonctions usuelles : carré, cube, inverse, racine carrée.
- Connaître les opérations sur les fonctions dérivables : somme, produit, inverse, quotient, fonction dérivée de $x \mapsto g(ax + b)$
- Dérivez toutes les fonctions de la forme $x \mapsto x^n$ pour n entier.
- Découvrez un exemple de fonction continue non dérivable à travers l'exemple de la valeur absolue : courbe représentative, étude de la dérivabilité en 0.

COMPÉTENCES VISÉES

- À partir de la définition, calculez la fonction dérivée de la fonction carrée, de la fonction inverse.
- Dans des cas simples, calculez une fonction dérivée en utilisant les propriétés de la fonction carrée, de la fonction inverse.

OBJECTIFS

- Étudier le signe d'une fonction dérivée pour en déduire les variations de la fonction.
- Application à la recherche d'extrema.
- Construire la courbe représentative d'une fonction en tenant compte des informations données par la dérivabilité.

COMPÉTENCES VISÉES

- Construire le tableau de variation d'une fonction à partir du signe de sa dérivée.
- Déterminer les extrema d'une fonction.
- Positionner une courbe par rapport à ses tangentes.

SUGGESTIONS CULTURELLES

ESSAIS

- **Les maths c'est magique !** *Johnny Ball*
- **La grande aventure des nombres et du calcul** *Jason Lapeyronnie*
- **17 Équations qui ont changé le monde** *Ian Stewart*
- **Alex au pays des chiffres** *Alex Bellos*
- **Le grand roman des maths : de la préhistoire à nos jours** *Mickael Launay*
- **Histoire universelle des chiffres : L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul** *Georges Ifrah*
- **Le démon des maths** *Hans Magnus Enzensberger*
- **A propos de rien : une histoire du zéro** *Robert Kaplan*

BANDES-DESSINÉES

- **Logicomix** *Doxiádis / Papadátos / Papadimitríou*
- **Les maths en BD 1 et 2** *Larry Gonick*

DOCUMENTAIRES AUDIOVISUELS

- **L'extraordinaire aventure du chiffre 1** *Terry Jones*
- **Voyage au pays des maths** *Arte*

PODCASTS

- **L'oreille mathématiques** *Podcast de la Maison Poincarré*
- **Maths en tête** *toutes plateformes*

YOUTUBE

- **Chaîne YouTube Maths et Tiques** *Yvan Monka*
- **Chaîne YouTube Micmaths** *Mickaël Launay*
- **Chaîne YouTube de la Maison des mathématiques et de l'informatique**
- **Chaîne YouTube Automaths** *Jason Lapeyronnie*

Le Cours

En un beau jour de XVII^{ème} siècle, deux savants se disputent : il s'agit d'Isaac Newton et de Gottfried Wilhelm Leibniz. L'objet de leur dispute est celle de la paternité d'une belle idée, une idée nouvelle : celle de la modélisation mathématique des variations infinitésimales à travers le concept de « nombre dérivé ». Les physiciens de l'époque le réclament pour leurs études !

En effet, la compréhension d'un phénomène s'éclaire grâce à l'étude de ses variations ; par exemple, pour déterminer à quel moment une pomme qui tombe d'un arbre va toucher le sol, il suffit de comprendre à chaque instant comment varie son accélération… la notion de fonction dérivée va devenir la clé de la résolution du problème.

Les deux premiers chapitres vont nous fournir des outils puissants pour l'étude des fonctions, en particulier celle de leurs variations. A travers le chapitre 1, nous allons découvrir la notion de « nombre dérivé » en zoomant au niveau d'un point de la courbe d'une fonction. Ensuite, dans le chapitre 2, nous nous consacrerons aux calculs de « dérivées ». Enfin le chapitre 3 nous permettra de mettre en application la dérivation, en particulier pour déterminer les variations de fonctions complexes.

CHAPITRE 1
DÉRIVATION : POINT DE VUE LOCAL

Ce chapitre ainsi que le suivant vont vous fournir des outils puissants pour l'étude des fonctions, en particulier leurs variations. Ce premier chapitre est consacré à la mise en évidence du nombre dérivé et aux tangentes.

OBJECTIFS

- Découvrir la notion algébrique de taux de variation et faire le lien avec la notion géométrique de sécantes à la courbe représentative d'une fonction en un point donné.
- Définir le nombre dérivé d'une fonction en un point, comme limite du taux de variation et utiliser la notation $f'(a)$.
- Définir la notion de tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point, comme « limite des sécantes » et faire le lien entre pente de cette droite et nombre dérivé.
- Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a. C'est la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

COMPÉTENCES VISÉES

- Savoir calculer un taux de variation, la pente d'une sécante.
- Interpréter le nombre dérivé en contexte : pente d'une tangente, vitesse instantanée, coût marginal…
- Déterminer graphiquement un nombre dérivé par la pente de la tangente.
- Construire la tangente en un point à une courbe représentative connaissant le nombre dérivé.
- Savoir déterminer l'équation de la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction.
- À partir de la définition, calculer le nombre dérivé en un point.

PRÉREQUIS

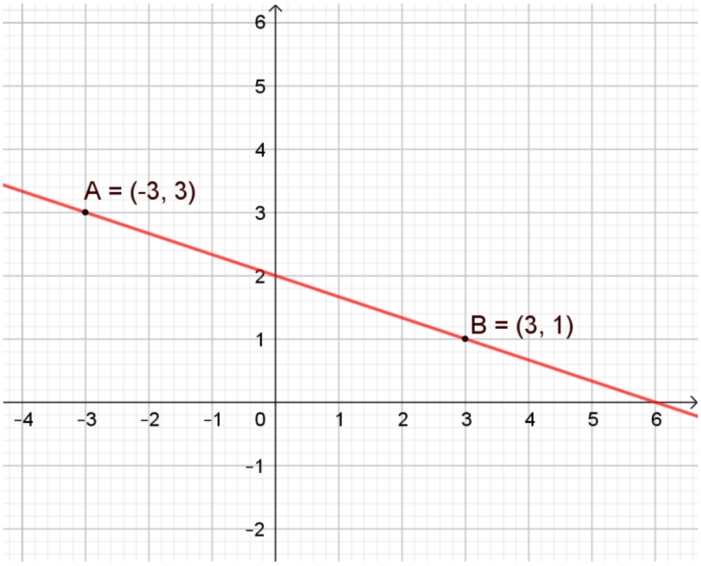
- Coefficient directeur d'une droite.
- Équation réduite d'une droite connaissant un point et son coefficient directeur.

DÉRIVATION : POINT DE VUE LOCAL

Sécantes à une courbe et taux de variation

ACTIVITÉ 1.1

Cette activité vous permettra de faire le point sur les équations de droite. En vous appuyant sur le graphique ci-dessous remplissez les vides des phrases ci-dessous.



1) Détermination graphique de l'équation de (AB) ;

Si on se déplace horizontalement de 3 unités, on baisse de …….. unité(s).

Donc le coefficient directeur de (AB) vaut : $m = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = -\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

L'ordonnée à l'origine vaut : $p = \dots\dots$

L'équation de (AB) est donc : (AB) $y = \dots\dots x + \dots\dots$

2) Détermination algébrique de l'équation de (AB)

$x_A \neq x_B$ donc la droite (AB) est ……………………………………

On calcule son ……………………………………………………………… m :

$$m = \frac{y_B - \dots\dots}{\dots\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots - \dots\dots}{\dots\dots} = \dots\dots$$

On calcule son ……………………………………………………………… p :

$y_A = mx_A + p \quad \Leftrightarrow 3 = \dots\dots \times \dots\dots + p \quad \Leftrightarrow 3 = \dots\dots + p \Leftrightarrow p = \dots\dots$

L'équation de (AB) est donc : (AB) $y = \dots\dots x + \dots\dots$

ACTIVITÉ 1.2

Une voiture démarre à l'instant $t=0$. On appelle d la distance parcourue à l'instant t.
On suppose $d(t)=2,5t^2$.
Rappel :

La vitesse moyenne entre 2 instants t_1 et t_2 vaut : $V=\dfrac{D}{t_2-t_1}$ où D est la distance parcourue entre t_1 et t_2

1) Répondez aux questions ci-dessous.

a. Quelle est la distance parcourue entre $t=4$ et $t=10$? ....

Quelle est la vitesse moyenne entre $t=4$ et $t=10$? ....

b. Quelle est la distance parcourue entre $t=4$ et $t=8$? ....

Quelle est la vitesse moyenne entre $t=4$ et $t=8$? ....

c. Quelle est la distance parcourue entre $t=4$ et $t=6$? ....

Quelle est la vitesse moyenne entre $t=4$ et $t=6$? ....

2) Répondez aux questions ci-dessous.

a. Montrez que la vitesse moyenne entre $t=4$ et $t=4+h$ s'écrit $V(h)=\dfrac{d(4+h)-d(4)}{h}$

....

....

....

b. Montrez que $V(h) = 20 + 2,5h$

....

....

c. Que se passe-t-il quand h devient très petit ?

....

d. Comment interprétez-vous cette valeur ?

....

....

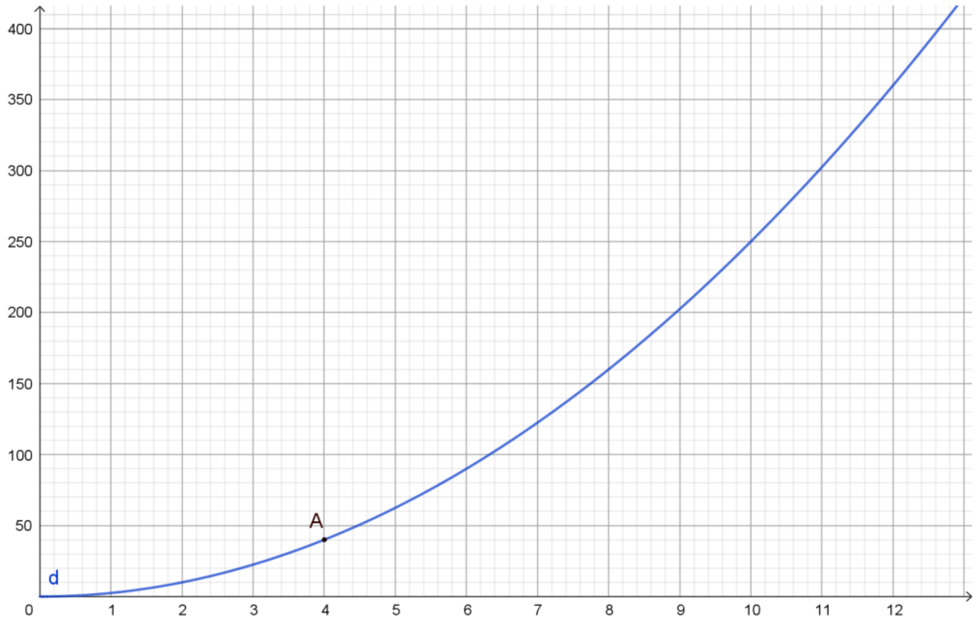
....

....

....

....

3) On a tracé la courbe représentative de d.
En vous appuyant sur le graphique ci-dessous, répondez aux questions suivantes.



a. Soit B le point $B(10;d(10))$ Placez le point B sur la courbe et tracez la droite (AB).

Déterminez graphiquement sa pente et comparez avec la question 2.a.

----

b. Même question avec le point $C(6;d(6))$.

----

4) Soit M le point $(4+h,d(4+h))$

a. Vers quel point tend M quand h devient petit ?

----

b. Que devient la sécante (AM) quand *h* devient très petit ? Tracez cette droite limite.

----

c. Cette droite limite est appelée la tangente à la courbe en A. Déterminez graphiquement sa pente.

----

d. Auriez-vous pu prévoir le résultat ?

SOLUTIONS DE L'ACTIVITÉ 1.1

1) Détermination graphique de l'équation de (AB)

Si on se déplace horizontalement de 3 unités, on baisse de 1 unité(s).

Donc le coefficient directeur de (AB) vaut : $m = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$

L'ordonnée à l'origine vaut : $p = 2$

L'équation de (AB) est donc : (AB) $y = -\frac{1}{3}x + 2$

2) Détermination algébrique de l'équation de (AB)

$x_A \neq x_B$ donc la droite (AB) est oblique.

On calcule son coefficient directeur *m* :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-3}{3-(-3)} = -\frac{1}{3}$$

On calcule son ordonnée à l'origine *p* :

$$y_A = mx_A + p \quad \Leftrightarrow 3 = -\frac{1}{3}\times(-3)+p \quad \Leftrightarrow 3 = 1 + p \Leftrightarrow p = 2$$

L'équation de (AB) est donc : (AB) $y = -\frac{1}{3}x + 2$

SOLUTIONS DE L'ACTIVITÉ 1.2

1) Ainsi

a. $d(10) - d(4) = 2{,}5 \times 10^2 - 2{,}5 \times 4^2 = 210$ m $\quad V = \frac{D}{t_2 - t_1} = \frac{210}{6} = 35$ m/s

b. $d(8) - d(4) = 2{,}5 \times 8^2 - 2{,}5 \times 4^2 = 120$ m $\quad V = \frac{D}{t_2 - t_1} = \frac{120}{4} = 30$ m/s

c. $d(6) - d(4) = 2{,}5 \times 6^2 - 2{,}5 \times 4^2 = 50$ m $\quad V = \frac{D}{t_2 - t_1} = \frac{50}{2} = 25$ m/s

2) Ainsi

a. $t_1 = 4$ et $t_2 = 4 + h$ donc $=4$ et $t_2 - t_1 = 4 + h - 4 = h \quad D = d(4+h) - d(4)$

a. $V(h) = \frac{D}{t_2 - t_1} = \frac{d(4+h) - d(4)}{h}$

$$V(h) = \frac{2{,}5(4+h)^2 - 2{,}5\times 4^2}{h} = \frac{2{,}5(16+8h+h^2) - 2{,}5\times 16}{h} = \frac{20h + 2{,}5h^2}{h} = 20 + 2{,}5h$$

b. $V(h)$ se rapproche de 20.

c. Il s'agit de la vitesse instantanée (celle du compteur).

3)

a. $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{250 - 40}{6} = 35$ On retrouve la vitesse moyenne calculée en 2.a.

b. $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{90 - 40}{2} = 25$ On retrouve la vitesse moyenne calculée en 2.b.

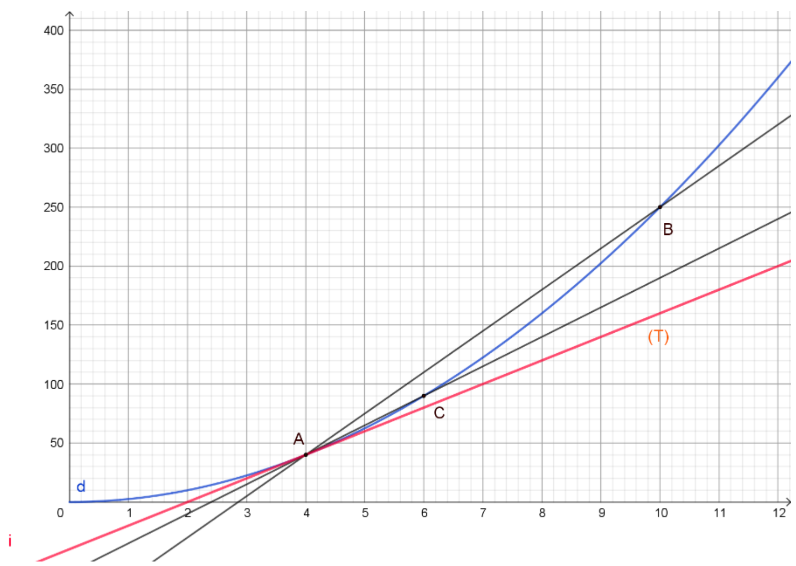
4)

a. Le point M se rapproche de A.

b. La sécante se rapproche d'une droite limite.

c. On monte de 100 quand on se décale à droite de 5. $m = \frac{100}{5} = 20$

d. On retrouve la valeur limite déterminée en 2.d.

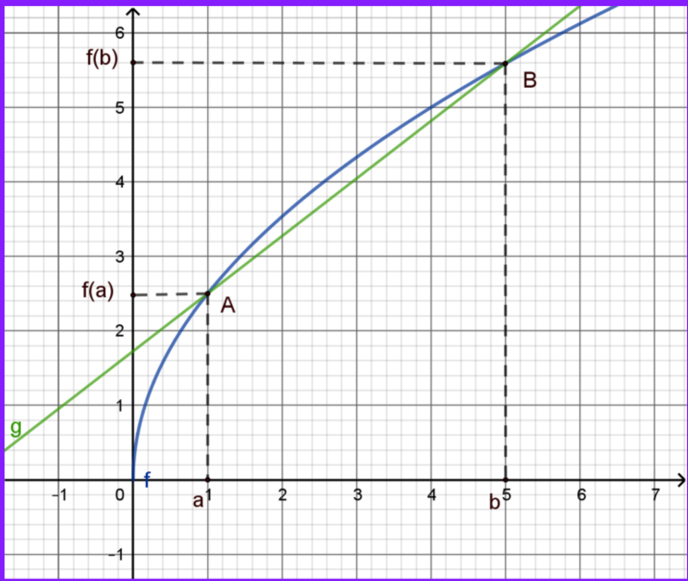


A présent, entrons dans le cours.

SÉCANTES À UNE COURBE ET TAUX DE VARIATION

Dans ce paragraphe : *f* est une fonction définie sur D_f , *I* est un intervalle inclus dans D_f .

L'ESSENTIEL



Soient deux points *a* et *b* de *I* .
On pose : A $(a; f(a))$et B$(b; f(b))$
La droite (AB) est une sécante à la courbe C.

Le taux de variation τ de la fonction f entre *a* et *b* est égal à la pente de la droite (AB), soit :

$$\tau = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Notation : $\Delta y = y_B - y_A$ et $\Delta x = x_B - x_A$
- On retrouve l'expression de la pente d'une droite passant par 2 points. La différence avec les droites vues en géométrie, est qu'on sait que les points A et B sont sur la courbe ; donc connaissant a et b on peut calculer la pente.
- On parle de taux de variation pour une fonction et de pente (ou de coefficient directeur) pour une droite.
- A la place de l'expression « taux de variation », on peut également utiliser taux d'accroissement moyen. Mais attention, on peut avoir un taux d'accroissement négatif.

Exemple : on considère la fonction $f:\begin{cases}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\\ x \mapsto x^2\end{cases}$

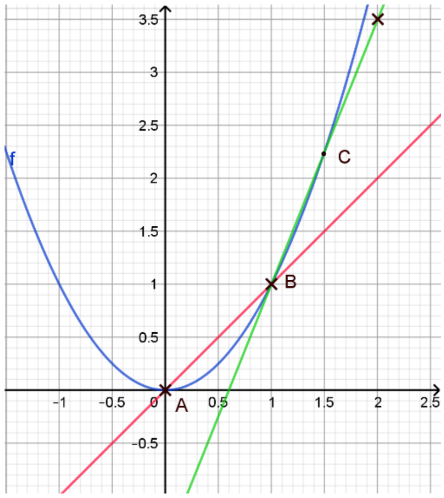
Le taux de variation τ de la fonction *f* entre 0 et 1 vaut : $\tau = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1$.

C'est la pente de la droite (AB), soit 1.

Le taux de variation τde la fonction *f* entre 1 et 3/2 vaut : $\tau = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\frac{3}{2})-f(1)}{\frac{3}{2}-1} = \frac{\frac{9}{4}-1}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.

C'est la pente de la droite (BC), soit 2,5.

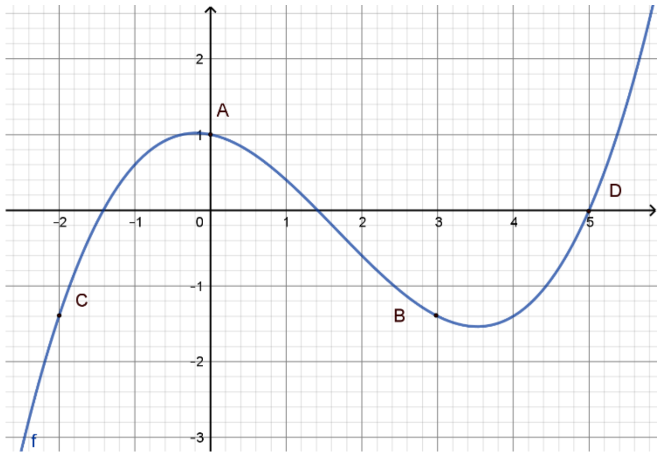
On a indiqué par des croix les points utiles pour déterminer les pentes.



À VOUS DE JOUER 1

$$f:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0{,}1x^3 - 0{,}5x^2 - 0{,}2x + 1\end{cases}$$

1) A, B et C sont des points de la courbe représentative de f.
A a pour abscisse 0 ;
B a pour abscisse 3 ;C a pour abscisse -2
Complétez.



$\mathrm{f}(0) =$.................................=...............

$\mathrm{f}(3) =$.................................=...............

$\mathrm{f}(-2) =$.................................=...............

2) Le .... de la fonction f entre 0 et 3 : est $\tau = \dfrac{f(.....)-f(.....)-}{.....-......}$=................

Le .... de la fonction f entre 0 et −2 : est $\tau = \dfrac{f(.....)-f(.....)-}{.....-......}$=................

3) Tracez les .... (AB) et (AC).

4) Pouvait-on prévoir le signe des taux de variations calculées en 2 ?

----

5) Tracez la sécante (AE).
Graphiquement le taux de variation entre 0 et 5 vaut : $\dfrac{\Delta y}{.....} = \dfrac{.....}{.....}$ ....

02

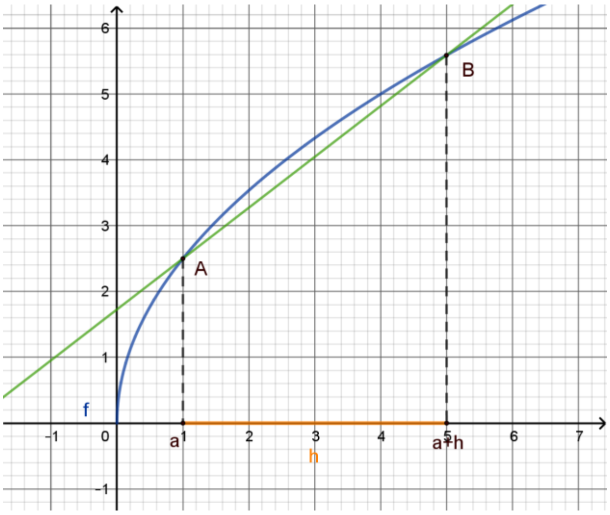
DÉRIVATION : POINT DE VUE LOCAL

Nombre dérivé et tangente à une courbe

Reprenons le schéma précédent.

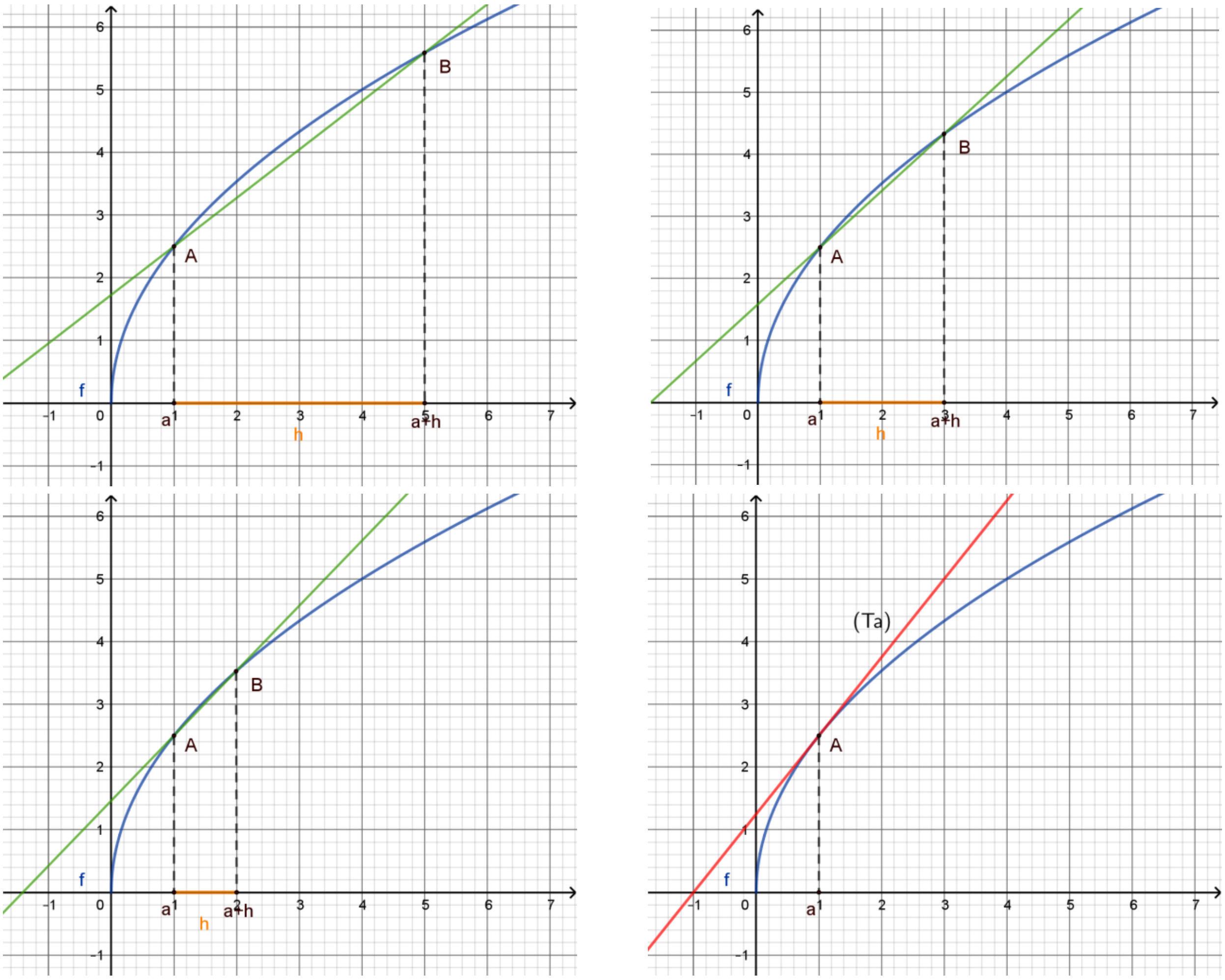
A $(a; f(a))$ et B$(b; f(b))$

On pose $b = a + h$, avec h réel non nul. Donc B a pour coordonnées B$(a + h, f(a + h))$.



L'expression du taux de variation devient : $\tau(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

On va rapprocher maintenant B de A (en restant bien sur la courbe) en rendant h de plus en plus petit.



La sécante (AB) va atteindre une droite limite appelée tangente à la courbe au point A.
La pente de cette tangente va être la limite du taux de variation quand *h* devient infiniment proche de 0.

L'ESSENTIEL

Le **nombre dérivé** de la fonction *f* au point *a* est égal à la **limite du taux de variation** entre *a* et *a*+*h* quand *h* tend vers 0 si cette limite existe. On le note : $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si le nombre dérivé de *f* au point *a* existe, on dit que *f* est dérivable au point *a*.

La **tangente** à la courbe C_f au point A $(a;f(a))$est la droite passant par A et de coefficient directeur$f'(a)$

UN PEU D'HISTOIRE

La notion de tangente existe depuis l'Antiquité. Le mathématicien Français Pierre de Fermat (1610-1665), la définit comme position limite d'une sécante à une courbe (c'est l'approche faite dans ce cours).
Au XVIII^ème Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) définit le nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement (taux de variation). Il introduit également le terme "dérivé" ainsi que la notation $f'(a)$ pour désigner le nombre dérivé en un point a.

- $\tau(0)$ n'existe pas !
- *h* peut a priori prendre des valeurs positives ou négatives : quand *h* est positif, B se rapproche de A par la droite : quand *h* est négatif, B se rapproche de A par la gauche.
- **Quand le nombre dérivé est nul, la tangente est horizontale.**

Exemple : on considère la fonction $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{cases}$

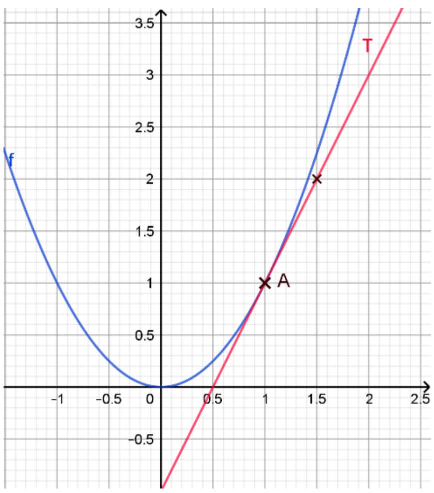
La fonction *f* est-elle dérivable en 1 ?
On calcule le taux de variation au voisinage de 1.

$f(1)=1$

$$\tau(h)=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^2-1}{h}=\frac{1+2h+h^2-1}{h}=\frac{2h+h^2}{h}=\frac{(2+h)\cancel{h}}{\cancel{h}}=2+h$$

$\lim_{h\to 0}2+h=2$ On en déduit que f est dérivable en 1 et $f'(1)=2$

La pente de la tangente à la courbe en $A(1,1)$ vaut 2.



À VOUS DE JOUER 2

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2-3x+1\end{cases}$$

1)

Complétez.

La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

On calcule le ……………………………………………. au voisinage de ……

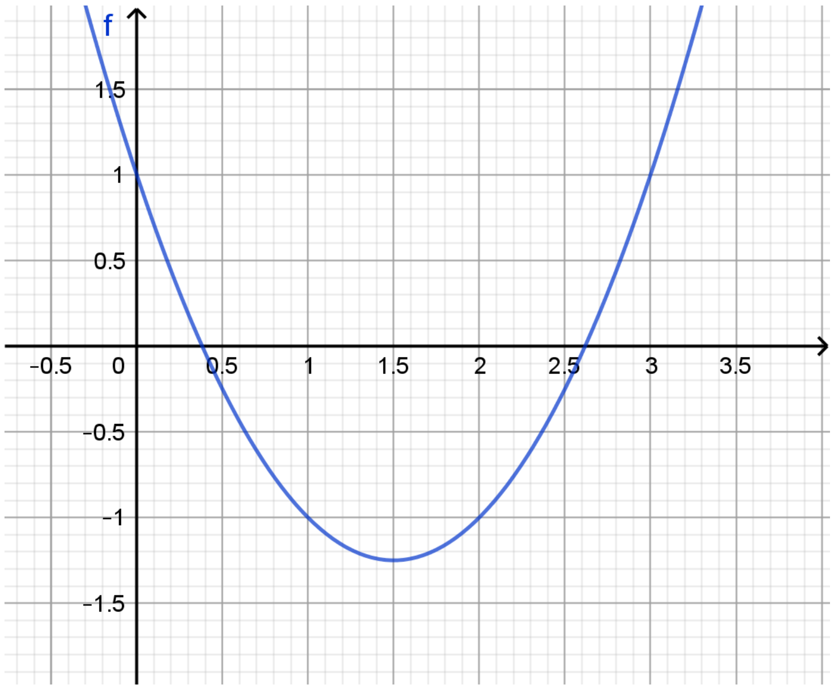
$f(0)=$……….

$$\tau(h)=\frac{f(\ldots\ldots\ldots\ldots)-f(\ldots\ldots\ldots\ldots)}{h}=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}=h-3$$

$\lim\limits_{h\to 0} h-3=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ On en déduit que f est ……………. en 0 et $f'(0)=\ldots\ldots\ldots\ldots$

2) Tracez les ………………………………… (AB) et (AC). La pente de la tangente à la courbe en vaut 3.

Tracez la tangente.



Cas de non dérivabilité

- La limite est un nombre. Dans certains cas, il n'y a pas de limite. La fonction n'est alors pas dérivable au point concerné et on ne doit pas utiliser la notation f'.

Les cas de non dérivabilité seront rares pour les fonctions que vous rencontrerez. Il y a 2 principaux cas :

- Une limite infinie du taux de variation : graphiquement, la courbe part verticalement.
- Une limite différente si on approche par la gauche ou par la droite. La courbe présente un point anguleux (elle n'est pas lisse en ce point).

Exemple : $f:\begin{cases}\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\sqrt{x}\end{cases}$

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME

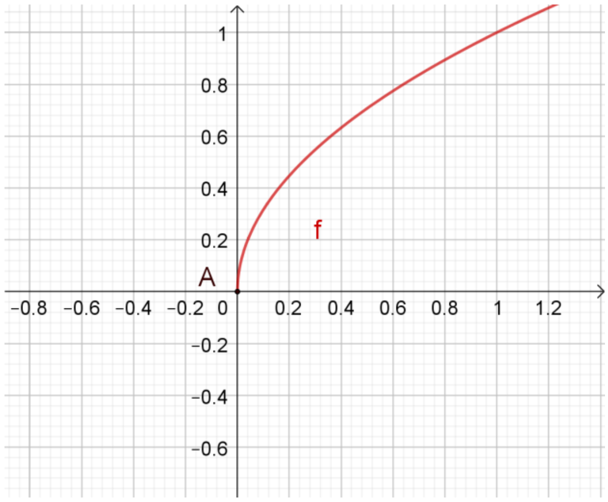
<u>La fonction *racine carrée* n'est pas dérivable en 0.</u>

f est définie pour x positif. Donc h ne peut prendre que des valeurs positives.

$$\tau(h)=\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt{h}-0}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$$

Quand h devient très petit, $\frac{1}{\sqrt{h}}$ devient très grand. $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$

Donc f n'est pas dérivable en 0



La courbe part verticalement en (0,0).

Exemple de non dérivabilité avec cassure : $f:\begin{cases}\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}\\x\mapsto|x|\end{cases}$

La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

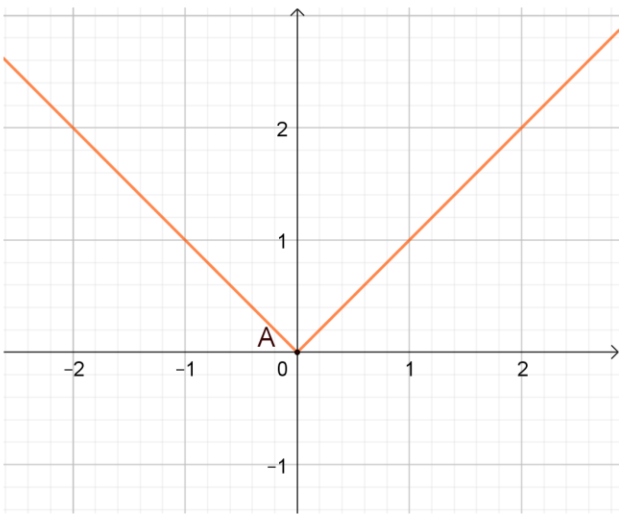
$$\tau(h)=\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{|h|}{h}$$

Si $h>0$, $|h|=h$ donc $\tau(h)=\frac{h}{h}=1$ $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}}\tau(h)=1$

Si

Si $h<0$, $|h|=-h$ donc $\tau(h)=\frac{-h}{h}=-1$ $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h<0}}\tau(h)=-1$

Les 2 limites sont différentes. Donc f n'est pas dérivable en 0.



La courbe présente un point anguleux en (0,0).

L'ESSENTIEL

Equation de la tangente en un point A $(a; f(a))$:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Par abus de langage, on parle également de tangente à la courbe au point *a* (ou en *a*).

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME

Équation de la tangente en un point

Soit la tangente à la courbe C. Son équation réduite s'écrit : $y=mx+p$ où m est sa pente.

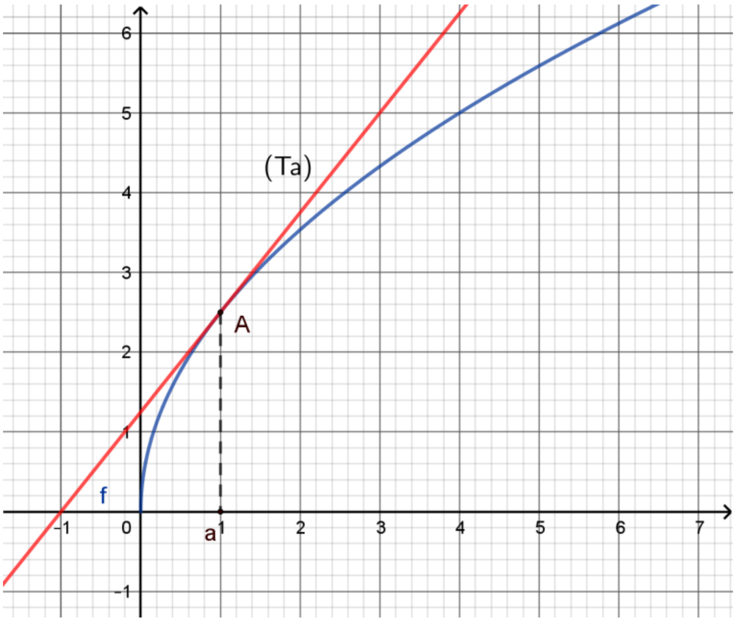
La pente de la tangente est égale au nombre dérivé $f'(a)$. Donc $y=f'(a)x+p$

Détermination de p

Comme la tangente passe par $A(a; f(a))$ on a : $f(a)=f'(a)\times a+p$ soit $p=-f'(a)\times a+f(a)$

$y=f'(a)x-f'(a)xa+f(a)$ soit $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

Exemple :



A a pour coordonnées $A(1;\frac{5}{2})$; $f'(a)=\frac{5}{4}$;

Equation de la tangente : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$y=\frac{5}{4}(x-1)+\frac{5}{2}$

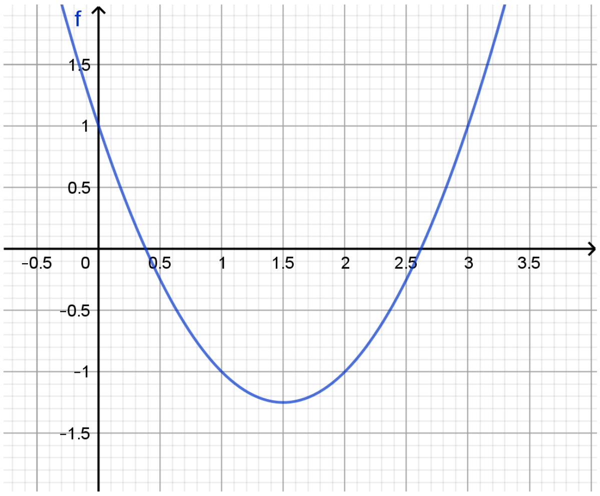
$y=\frac{5}{4}x-\frac{5}{4}+\frac{5}{2}$ soit $(T_a)\ y=\frac{5}{4}x+\frac{5}{4}$

On peut vérifier graphiquement :

- La pente : on monte de 5 quand on se décale de 4.
- L'ordonnée à l'origine (un peu supérieure à 1).

À VOUS DE JOUER 3

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2-3x+1\end{cases}$$



On a trouvé précédemment que $f'(0)=-3$

Complétez.

Equation de la tangente en 0 :

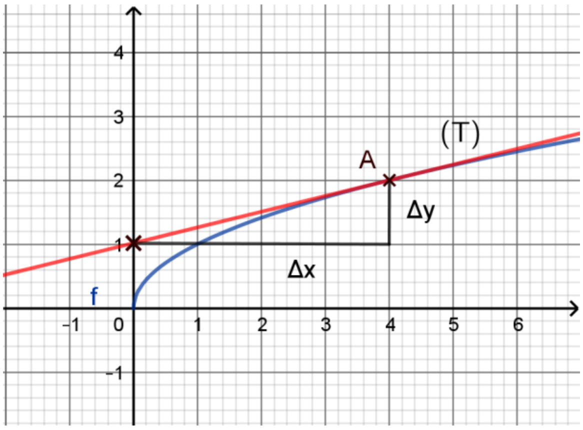
$y = f'(0)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)+\ldots\ldots\ldots$

$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Détermination graphique d'un nombre dérivé et de l'équation d'une tangente

Exemple :

Déterminez $f'(4)$.



Le **nombre dérivé est la pente de la tangente** (T). Il suffit de savoir de combien on monte ou on descend quand on se décale de Δx .

On monte de 1 quand on se décale de 4. Donc $f'(4)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{4}$

Déterminez l'équation de la tangente en 4

On détermine $f'(4)$ comme précédemment : $f'(4)=\dfrac{1}{4}$.

Méthode 1 : on utilise l'expression de la tangente.
On a besoin des coordonnées de A : ici $A(4;2)$

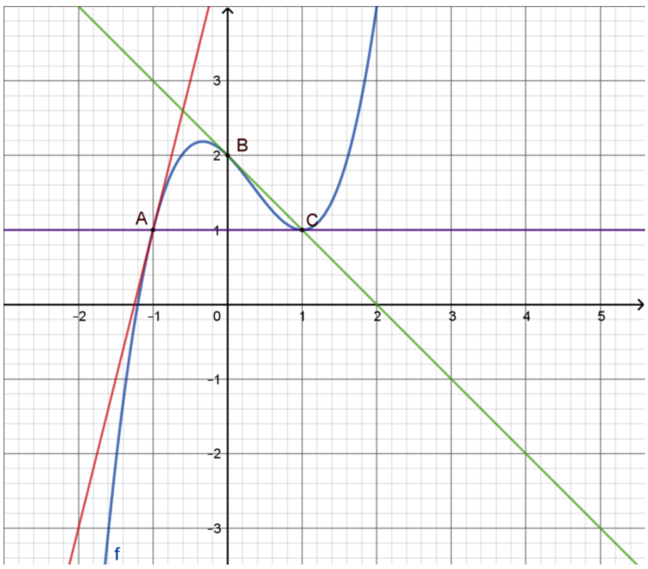
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$y=\frac{1}{4}(x-4)+2=\frac{1}{4}x-1+2$ soit (T) $y=\frac{1}{4}x+1$

Méthode 2 : on lit l'ordonnée à l'origine qui vaut 1. On obtient $y=\frac{1}{4}x+1$.

Cette méthode n'est pas toujours possible car l'ordonnée à l'origine peut être en dehors du graphique.

À VOUS DE JOUER 4



Complétez.

A	$a=-1$	$f(-1)=$............	$f'(-1)=$............
B	$a=0$	$f(0)=$............	$f'(0)=$............
C	$a=1$	$f(1)=$............	$f'(1)=$............

Équation de la tangente en A :

$y=f'(a)$.................................

$y=$......(..............)+......=.................. soit (T_A) $y=$...................................

Équation de la tangente en B :

La pente vaut .... et l'ordonnée à l'origine vaut ....

(T_B) $y=$...................................

Équation de la tangente en C :

La pente vaut ..... donc la tangente est ....

(T_c) $y=$...................................

03 DÉRIVATION : POINT DE VUE LOCAL

Approximation linéaire

UN PEU D'HISTOIRE

Le développement d'un calcul des variations chez Leibniz et Newton se fonde sur l'hypothèse que les phénomènes naturels évoluent linéairement quand on leur applique des petites variations.

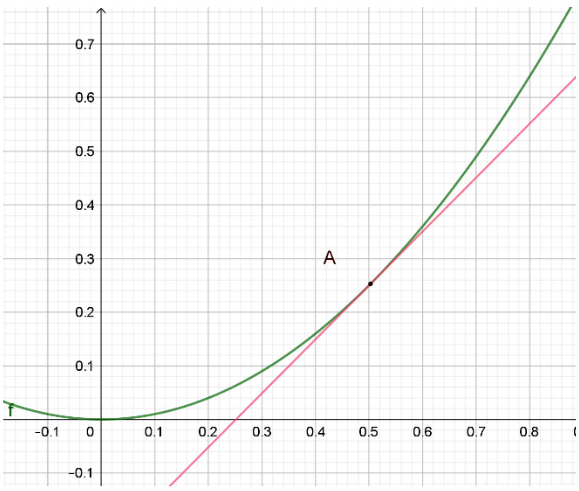
Comment interpréter cette approche ? On peut approximer une fonction au voisinage d'un point par la fonction linéaire associée à la tangente.

En effet : $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h est petit on a : $f(a+h)\approx hf'(a)+f(a)$

Or $(a+h, hf'(a)+f(a))$ appartient à la tangente en a.

Exemple :

On considère la fonction carrée et le point $a=0,5$.
On a tracé la tangente en ce point.



On voit qu'au voisinage de A, la courbe et la tangente en A sont quasiment confondues.
L'équation de la tangente est : $y=x-0,25$

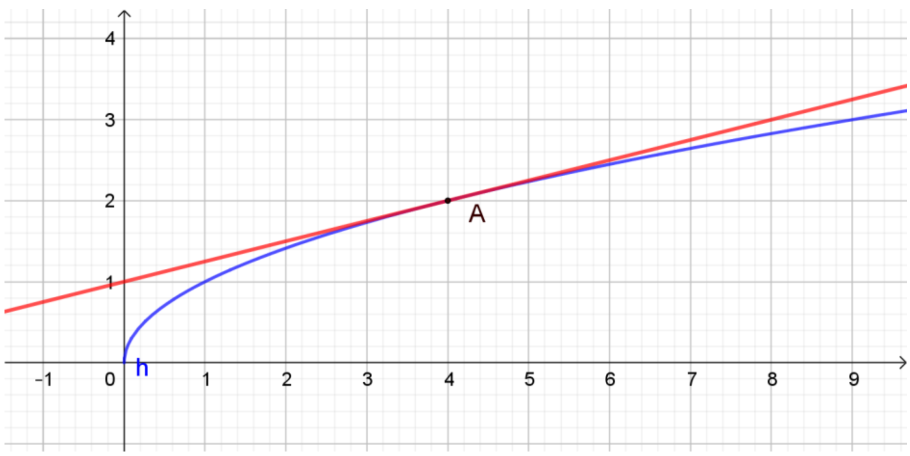
Comparons la fonction carrée $x\mapsto x-0,25$ au voisinage de 0,5.

x	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6
x^2	0,160	0,202	0,250	0,303	0,360
$x-0,25$	0,150	0,200	0,250	0,300	0,350

On voit qu'entre 0,45 et 0,55 on a une approximation au centième.

À VOUS DE JOUER 5

On considère la fonction racine carrée. On a tracé la tangente en $x=4$.



1) Déterminez graphiquement l'équation de la tangente en 4. $y=$.................................

2) Au voisinage de 4, on peut approximer $\sqrt{x}$ par ....

3) Donnez une valeur approchée de $\sqrt{3,8}$: $\sqrt{3,8}\approx$.. .

Comparez avec le résultat de la calculatrice ....

LE TEMPS DU BILAN

- Une fonction est dérivable au point a si son taux de variation en a admet une limite (finie) :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

On note alors f’(a) cette limite qui est le nombre dérivé de f en a.

- Géométriquement, le nombre dérivé au point s’interprète comme le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point a.

- L’équation de la tangente au point (a,f(a)) est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Abordons maintenant une série d'exercices, afin de vérifier vos connaissances.
Les exercices ont été classés dans un ordre d'approfondissement croissant.
Les réponses aux exercices se trouvent en fin de manuel.

EXERCICE 01

Étudiez la dérivabilité des fonctions suivantes en a.

$f(x) = x\sqrt{x} - 3x \quad a = 0$

$g(x) = \sqrt{x-1} \quad a = 1$

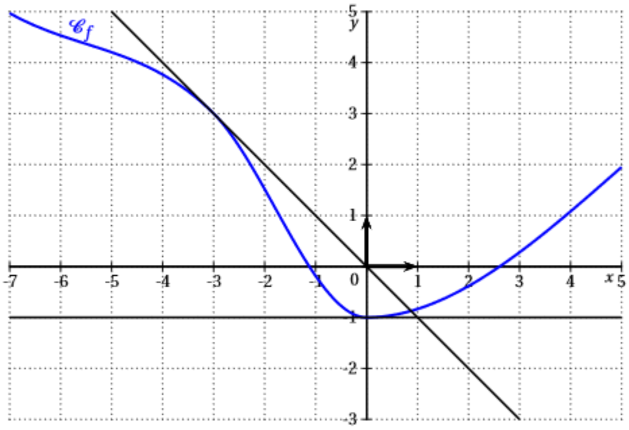
$u(x) = |x+2| \quad a = -2$

$v(x) = \dfrac{1}{x+1} \quad a = 0$

EXERCICE 02

Répondez à ces QCM.

1) On a tracé la représentation graphique d'une fonction et ses tangentes aux points −3 et 0.



Laquelle de ces propositions est vraie ?

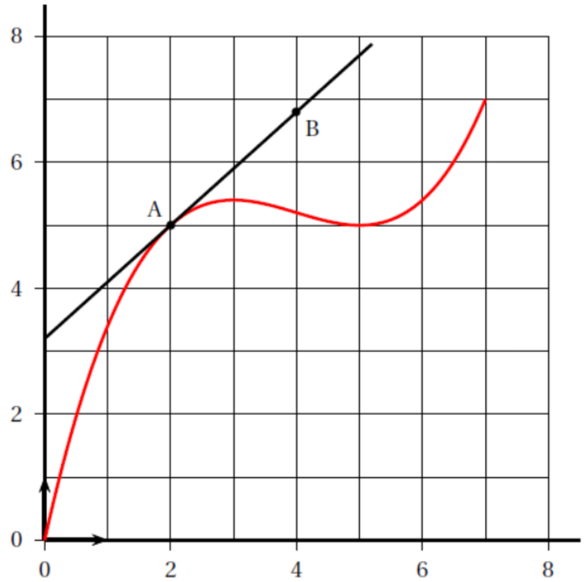
a. $f'(0) = -1$

b. $f'(-1) = 0$

c. $f^{'}(-3) = -1$

d. $f'(-3) = 3$

2) Sur le graphique ci-dessous est représentée la courbe C*f d'une* fonction *f* sur l'intervalle [0; 7].
Les points A et B ont pour coordonnées A(2; 5) et B(4; 6,8).
La droite (AB) est tangente à la courbe C*f* au point A.



La tangente à la courbe au point A admet pour équation :

a. $y = -0{,}9x + 3{,}2$

b. $y = 0{,}9x + 3{,}5$

c. $y = 0{,}9x + 3{,}27$

d. $y = 1{,}8x + 3{,}2$

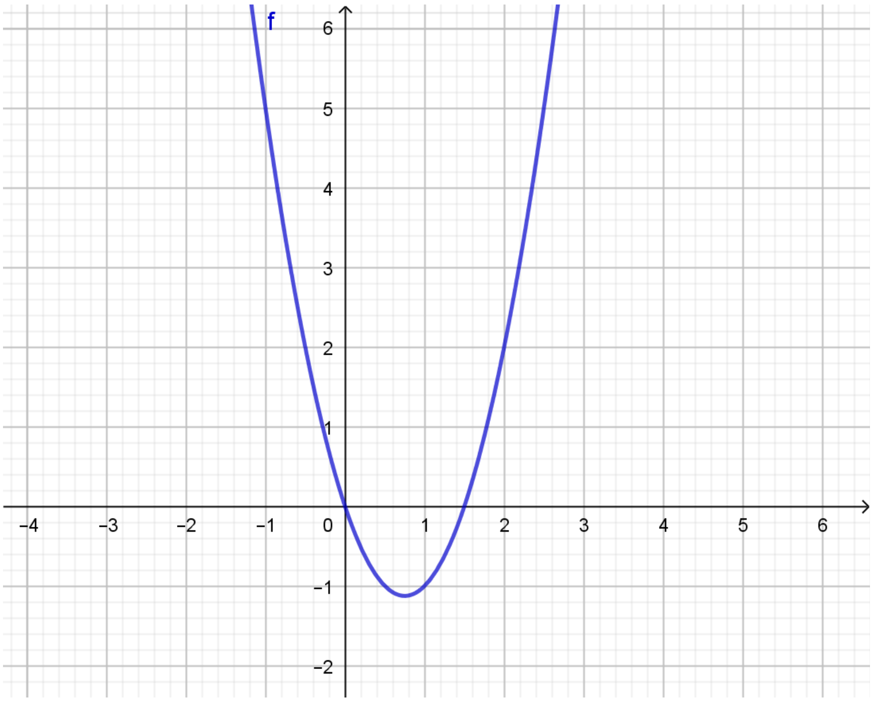
EXERCICE 03

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x$ et C sa courbe représentative.

1) Calculez le taux de variation de *f* entre 0 et 2, puis entre 2 et 4.

2) Calculez le taux de variation de *f* entre 1 et $1+h$ pour $h \neq 0$.
En déduire que *f* est dérivable en 1 et déterminez le nombre dérivé $f'(1)$.

3) Déterminez l'équation de la tangente à en 1. Tracez la tangente.



EXERCICES

EXERCICE 04

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ f(x) = x^2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

1) Tracez la courbe représentative de *f*.

2) Calculez le taux d'accroissement moyen de *f* entre 1 et $1+h$ pour $h>0$.

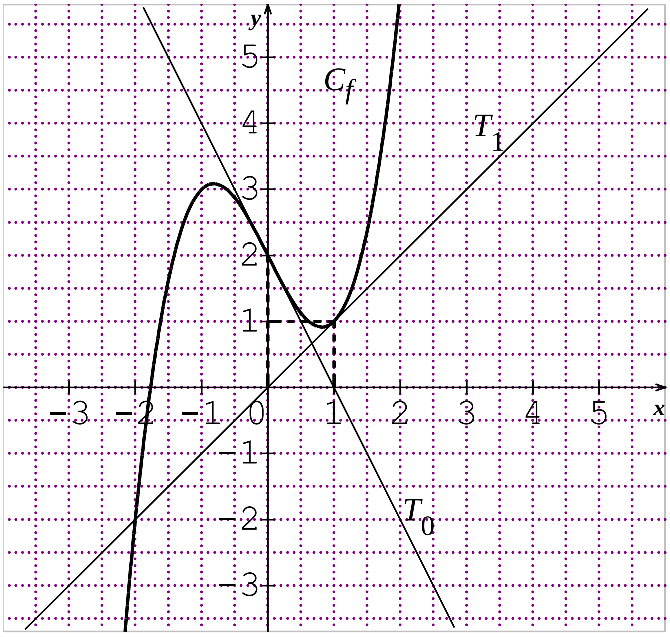
3) Calculez le taux d'accroissement moyen de *f* entre 1 et $1+h$ pour $h<0$

4) Conclure. Pouvait-on prévoir visuellement le résultat ?

EXERCICE 05

On considère une fonction f de courbe représentative C_f.

T_0 et T_1 sont les tangentes aux points 0 et 1 à C_f.



Déterminez par lecture graphique les nombres dérivés en 0 et 1 de f.

Déterminez ensuite les équations de T_0 et T_1.

EXERCICE 06

On considère la droite (d) d'équation : $(d)\ y=-2x+3$.

On suppose que cette droite est tangente à la courbe d'une fonction f en 2.

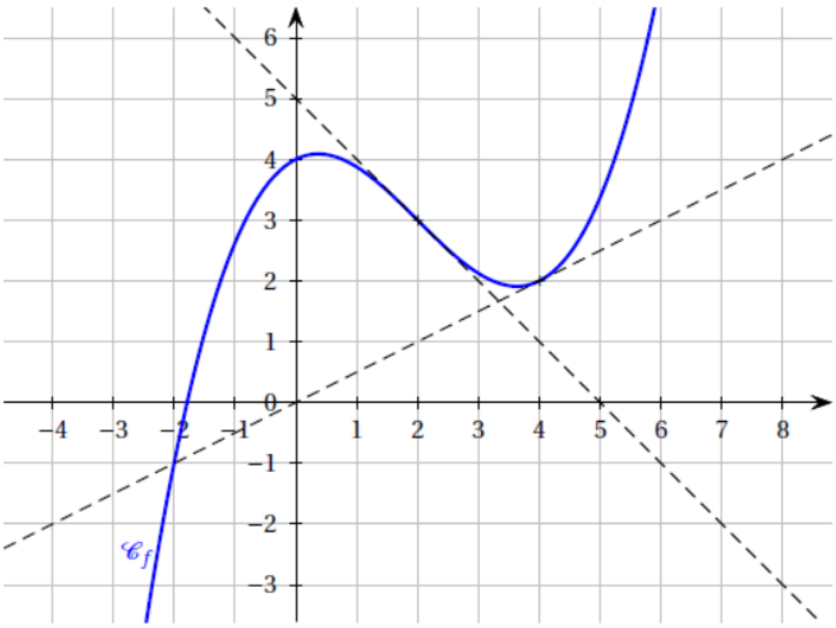
Déterminez $f(2)$ et $f'(2)$.

DÉRIVATION
POINT DE VUE LOCAL

Les sujets de bac où l'on vous demande de déterminer la dérivabilité en un point sont rares. En revanche, il y a de nombreuses questions concernant les tangentes, que ce soit :

- en détermination graphique ou par calcul
- sous la forme d'une question d'un QCM ou dans le cadre d'un exercice d'analyse

Pour les questions **1.** et **2.** et **3.**, on a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f ainsi que deux de ses tangentes aux points d'abscisses respectives 2 et 4.



1. $f'(4)$ est égal à :

A. 2	**B.** −1
C. 0,5	**D.** 0

Vous pouvez retenir l'expression de l'équation de tangente en A, mais il est conseillé de savoir la recalculer à partir des 2 propriétés : elle passe par A et a pour coefficient directeur f'(a).

DÉRIVATION : POINT DE VUE GLOBAL

Dans le chapitre précédent vous avez appris à déterminer le nombre dérivé éventuel en un point. Nous allons passer à la vitesse supérieure en déterminant le nombre dérivé d'une fonction en un point quelconque de son ensemble de définition (à quelques points près).

Ce chapitre est essentiel ! vous n'échapperez pas le jour du bac à un calcul de dérivée.

OBJECTIFS

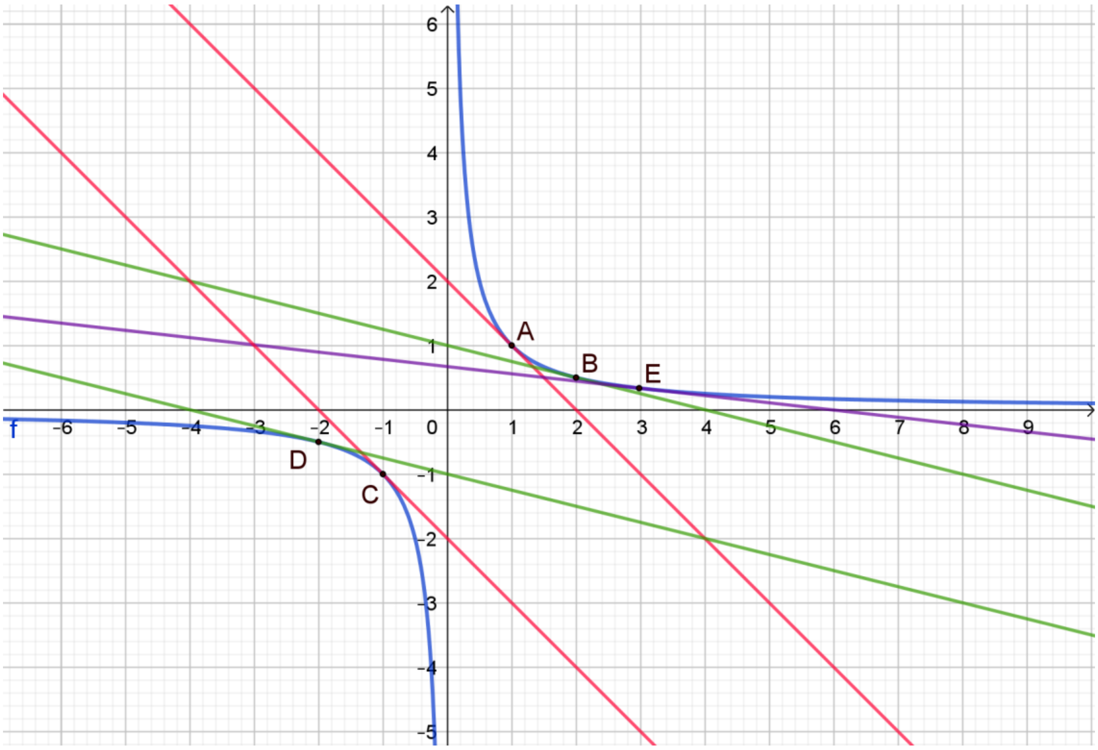
- Apprendre la notion de fonction dérivable sur un intervalle et celle de fonction dérivée.
- Connaître les fonctions dérivées des fonctions usuelles : carré, cube, inverse, racine carrée.
- Connaître les opérations sur les fonctions dérivables : somme, produit, inverse, quotient, fonction dérivée de $x \mapsto g(ax + b)$
- Dérivez toutes les fonctions de la forme $x \mapsto x^n$ pour n entier.
- Découvrez un exemple de fonction continue non dérivable à travers l'exemple de la valeur absolue : courbe représentative, étude de la dérivabilité en 0.

COMPÉTENCES VISÉES

- À partir de la définition, calculez la fonction dérivée de la fonction carrée, de la fonction inverse.
- Dans des cas simples, calculez une fonction dérivée en utilisant les propriétés de la fonction carrée, de la fonction inverse.

ACTIVITÉ 2.1

On a tracé la courbe de la fonction inverse et les tangentes en 5 points.



1) Quel est le lien entre la tangente en un point et le nombre dérivé ?

2) Complétez le tableau par lecture graphique en mettant les réponses sous forme de fraction irréductible.

	A	B	C	D	E
$a=\ldots$	1				
$f\,'(a)$					

3) Conjecturez la valeur de $f'(x)$ pour tout nombre x non nul.

La fonction trouvée en 3) est la dérivée de la fonction inverse.

SOLUTIONS DE L'ACTIVITÉ 2.1

1) La pente de la tangente en un point est le nombre dérivé en ce point.
2)

	A	B	C	D	E
a	1	2	-1	-2	3
$f'(a)$	-1	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$

3) On peut conjecturer que $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

- **Fonction dérivée**

Dans ce paragraphe : f est une fonction définie sur D_f , I est un intervalle inclus dans D_f .

L'ESSENTIEL

La fonction f est **dérivable sur un intervalle** I, si en tout point de I elle admet un nombre dérivé.

La **fonction dérivée** de f sur I peut alors se définir par : $f' : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$

Exemple : la fonction carrée est dérivable sur $\mathbb{R}$

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME

Dérivée de la fonction carrée $f(x)=x^2$

Calcul du nombre dérivé en un point $\boldsymbol{x}$ quelconque (il s'agit de la généralisation du calcul fait au chapitre précédent).

Soit x un réel quelconque. On détermine le taux de variation au voisinage de x.

Pour $h\neq 0, \tau(h)=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{(x+h+x)(x+h-x)}{h}=\frac{(2x+h)h}{h}=2x+h$

Par conséquent : $\lim\limits_{h\to 0}\tau(h)=\lim\limits_{h\to 0}\ (2x+h)=2x$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x)=2x$

À VOUS DE JOUER 6

Montrez que la fonction cube est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Indication : $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Soit x un réel quelconque. On détermine le .... au voisinage de x.

Pour $h \neq 0, \tau(h) = \frac{(\ldots\ldots\ldots)^3 - x^3}{h} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{h} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$

Par conséquent : $\lim\limits_{h\to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h\to 0} \quad (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

f est .... sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

- **<u>Pour aller plus loin : écriture différentielle d'une dérivée</u>**

Reprenons la manière dont on avait défini le nombre dérivé comme limite du taux de variation.

$\tau_a = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ quand b se rapproche de a

On utilise généralement la lettre grecque Δ pour indiquer une différence.

On pose : $f(b)-f(a)=\Delta f_a$ et $b-a=\Delta x$ donc $\tau_a = \frac{\Delta f_a}{\Delta x}$

Quand b se rapproche de a, Δf et Δx vont devenir infiniment petits : on va l'indiquer en transformant le Δ en d. $\frac{\Delta f_a}{\Delta x} \to \frac{\mathrm{d} f_a}{\mathrm{d}x}$ qu'on va écrire $\frac{df}{dx}(a)$

On en déduit une autre notation de la dérivée : $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

Exemple :

On appelle $x(t)$ la distance parcourue entre l'instant 0 et l'instant *t.*

La vitesse instantanée à l'instant *t* s'écrit : $v(t)=x'(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$

Attention ! Dans cet exemple :

- x est la fonction
- t dans dt est la variable. Le t dans (t) est le point où on calcule la dérivée.

On suppose que la vitesse instantanée à $t=10\text{ s}$ vaut 4 m/s.

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(10)=4$ alors au voisinage de 10 s, la distance infinitésimale dx parcourue pendant dt vaudra $\mathrm{d}x=4\mathrm{d}t$.

Vous retrouverez cette écriture dans d'autres circonstances, en particulier en physique, dans des versions parfois un peu différentes, plus ou moins correctes comme : $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v(t)$ ou $\mathrm{d}x=v(t)\ \mathrm{d}t$.

- **<u>2 exemples d'interprétation de la dérivée</u>**

Exemple 1 : en physique

Comme on l'a vu précédemment, si x est la distance parcourue, la dérivée de x est la vitesse instantanée v. La dérivée de la fonction v est l'accélération.

Exemple 2 : en économie

On dispose d'une fonction coût de production C qui donne pour q unités de production le coût.

La dérivée de C peut être assimilée au **coût marginal** de production : quand on a produit q unités, le coût marginal est le coût de production de l'unité suivante.

02

DÉRIVATION : POINT DE VUE GLOBAL

Dérivées des fonctions usuelles

Les dérivées des fonctions suivantes sont à connaître par cœur (certains résultats sont démontrés en exercice).

Fonction	Fonction dérivée	Intervalles de validité
$f(x)=Cste$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$f(x)=x^n\ ,\ n\in\mathbb{Z}^*$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n>0$ $\mathbb{R}^*$ si $n<0$

Remarque : les dérivées des fonctions $x, x^2, x^3, \dfrac{1}{x}$ sont des cas particuliers de la dérivée de x^n.

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME

Dérivée de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Taux de variation de *f* entre x $x\neq 0$) et $x+h$ ($h\neq 0$; on prend h assez petit pour que $x+h$ soit du même signe que *x*) :

$$\tau(h)=\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}=-\frac{h}{x(x+h)h}=-\frac{1}{x(x+h)}$$

$$\lim_{h\to 0}\tau(h)=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

Pour tout *x* de $\mathbb{R}^*$, *f* est dérivable en *x* et $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

Démonstration

La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}^+$

$f : x \mapsto \sqrt{x}$

On a démontré précédemment que f n'était pas dérivable en 0.

Soit un point $x>0$.

Taux d'accroissement moyen de *f* entre *x* et $x+h$ ($h\neq 0$; on prend *h* assez petit pour que $x+h$ soit strictement positif) :

$$\tau(h)=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{h\to 0}\tau(h)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Pour tout *x* de $\mathbb{R}^{+*}$, *f* est dérivable en *x* et $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exemples

- $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 5\end{cases}$ $\quad f'(x)=0 \quad\quad f'(0)=0 \quad f'(\frac{1}{2})=0 \quad f'(2)=0$

- $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 3x-2\end{cases}$ $\quad f'(x)=3 \quad\quad f'(0)=3 \quad f'(\frac{1}{2})=3 \quad f'(2)=3$

- $f:\begin{cases}\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{cases}$ $\quad f'(x)=2x \quad\quad f'(0)=0 \quad f'(\frac{1}{2})=1 \quad f'(2)=4 \quad f'(-3)=9$

- $f:\begin{cases}\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \dfrac{1}{x}\end{cases}$ $\quad f'(x)=-\dfrac{1}{x^2} \quad\quad f'(\frac{1}{2})=-4 \quad f'(2)=-\dfrac{1}{4} \quad f'(-3)=-9$

- $f:\begin{cases}\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \sqrt{x}\end{cases}$ $\quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad\quad f'(2)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \quad f'(4)=\dfrac{1}{4}$

- $f:\begin{cases}\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^4\end{cases}$ $\quad f'(x)=4x^3 \quad f'(2)=32$

- $f:\begin{cases}\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \dfrac{1}{x^3}\end{cases}$ $\quad f(x)=x^{-3} \quad f'(x)=-3x^{-3-1}=-\dfrac{3}{x^4} \quad f'(2)=-\dfrac{3}{16}$

À VOUS DE JOUER 7

Remplissez.

1) $f:\begin{cases}\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^5\end{cases}$ $\quad f'(x)=$..................

2) $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto -x+3\end{cases}$ $\quad f'(x)=$............

3) $f:\begin{cases}\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \dfrac{1}{x}\end{cases}$ $\quad f'(x)=$........................

4) $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 1\end{cases}$ $\quad f'(x)=$...................

5) $f:\begin{cases}\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \sqrt{x}\end{cases}$ $\quad f'(x)=$..............................

6) $f:\begin{cases}\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \dfrac{1}{x^2}\end{cases}$ $\quad f'(x)=$.....................

03 DÉRIVATION : POINT DE VUE GLOBAL
Opérations sur les dérivées

À partir de la dérivée de fonctions de référence, on va pouvoir par des opérations simples calculer un grand nombre de dérivées.

- **Définitions**

L'ESSENTIEL

Soient *u* et *v* dérivables sur un intervalle *I*.
La dérivée d'une somme est la somme des dérivées. (1) $(u+v)' = u' + v'$

Démonstration : on prend les notations ci-dessus.

$$(u+v)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h}$$

$$\frac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h}=\frac{u(x+h)+v(x+h)-u(x)-v(x)}{h}$$

$$=\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x) \text{ et } \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=v'(x)$$

$$\text{donc } \lim_{h\to 0}\frac{(u+v)(x+h)-(u+v)'(x)}{h}=u'(x)+v'(x)$$

Exemples

$f(x)=x^2+3x-5$	$f(x)=x+\frac{1}{x}$	$f(x)=2x+\sqrt{x}$
$f'(x)=2x+3$	$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$	$f'(x)=2+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

À VOUS DE JOUER 8

Remplissez.

$f(x)=x^2+3x-5$	$f(x)=x+\frac{1}{x}$	$f(x)=2x+\sqrt{x}$
$f'(x)=$....................	$f'(x)=$....................	$f'(x)=$....................

L'ESSENTIEL

Soient *u* et *v* dérivables sur un intervalle *I* et *k* un réel.
La dérivée du produit *ku* est égale à :

(2) $(ku)' = ku'$

Démonstration : on prend les notations ci-dessus.

$$(ku)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(ku)(x+h)-(ku)(x)}{h}$$

$$\frac{(ku)(x+h)-(ku)(x)}{h}=\frac{ku(x+h)-ku(x)}{h}=k\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x) \quad \text{donc } \lim_{h\to 0}\frac{(ku)(x+h)-(ku)(x)}{h}=ku'(x)$$

➢ **Conséquence de (1) et (2) : toutes les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.**

➢ *Exemples*

$f(x)=3x^2$ $\quad$ $f(x)=3x-\dfrac{1}{x}$ $\quad$ $f(x)=-3x^5+3\sqrt{x}$

$f'(x)=3\times 2x=6x$ $\quad$ $f'(x)=3+\dfrac{1}{x^2}$ $\quad$ $f'(x)=-15x^4+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

À VOUS DE JOUER 9

Remplissez.

$f(x)=2x^3$ $\quad$ $f(x)=3x+\dfrac{1}{2x^2}$ $\quad$ $f(x)=\dfrac{3}{x}+4\sqrt{x}$

$f'(x)=$............=............... $\quad$ $f'(x)=$....................=.................. $\quad$ $f'(x)=$....................=....................

L'ESSENTIEL

Soient u et v dérivables sur un intervalle I. La dérivée du produit est égale à :

$$(3)\ (u\cdot v)'=u'v+uv'$$

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME

Dérivée d'un produit de fonctions

Soient u et v dérivables sur un intervalle I.

$$(u.v)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(u.v)(x+h)-(u.v)(x)}{h}$$

$$\frac{(u.v)(x+h)-(u.v)(x)}{h}=\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$

$$=\frac{u(x+h)v(x+h)-v(x+h)u(x)}{h}+\frac{v(x+h)u(x)-u(x)v(x)}{h}$$

$$=\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x+h)+u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x)\quad \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=v'(x)\quad \lim_{h\to 0}v(x+h)=v(x)$$

$$\text{donc }\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x+h)+u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

Au début, il est conseillé quand on reconnaît un produit de poser les fonctions u et v, et de calculer leurs dérivées.

Exemples

- $f(x)=(2x+5)(x^2+1)$ $\quad$ $u(x)=2x+5$ $\quad$ $v(x)=x^2+1$

  $u'(x)=2$ $\quad$ $v'(x)=2x$

  $f(x)=2(x^2+1)+(2x+5)\times 2x=2x^2+2+4x^2+10x=6x^2+10x+2$

- $f(x)=x(x^2+1)$ $\quad$ $u(x)=x$ $\quad$ $v(x)=x^2+1$

  $u'(x)=1$ $\quad$ $v'(x)=2x$

  $f(x)=x^2+1+x\times 2x=3x^2+1$

À VOUS DE JOUER 10

Remplissez.

$f(x)=(2x^2+5)(x^2-3)$ $\quad u(x)=\dots\dots\dots\dots$ $\quad v(x)=\dots\dots\dots$

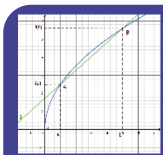
$u'(x)=\dots\dots\dots$ $\quad v'(x)=\dots\dots\dots\dots$

$f(x)=\dots\dots\dots\dots\dots\dots+\dots\dots\dots\dots\dots\dots=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$f(x)=\sqrt{x}(2x+1)$ $\quad u(x)=\dots\dots\dots\dots$ $\quad v(x)=\dots\dots\dots$

$u'(x)=\dots\dots\dots$ $\quad v'(x)=\dots\dots\dots\dots$

$f(x)=\dots\dots\dots\dots\dots\dots+\dots\dots\dots\dots\dots\dots=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots=\dfrac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{2\sqrt{x}}$



L'ESSENTIEL

Conséquence de (3) : (4) $(u^2)'=2u'u$

Démonstration :

On applique la formule du produit avec $v=u$.

$(u^2)'=(u\times u)'=u'u+uu'=2uu'$

Exemples :

$f(x)=(6x^2+5)^2$ $\qquad u(x)=6x^2+5 \qquad u'(x)=12x$

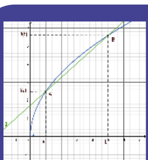
$f'(x)=2\times 12x(6x^2+5)=24x(6x^2+5)$

À VOUS DE JOUER 11

Remplissez.

$f(x)=(4-3x^3)^2$ $\qquad u(x)=\dots\dots\dots\dots \qquad u'(x)=\dots\dots$

$f'(x)=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$



L'ESSENTIEL

Soient u dérivable sur I, u ne s'annulant pas sur I.

La dérivée de la fonction inverse $\dfrac{1}{u}$ vaut : (5) $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$

Démonstration : On prend les notations ci-dessus.

$$\left(\frac{1}{u}\right)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{u}(x+h)-\frac{1}{u}(x)}{h}$$

$$\frac{\frac{1}{u}(x+h)-\frac{1}{u}(x)}{h}=\frac{\frac{1}{u(x+h)}-\frac{1}{u(x)}}{h}=\frac{u(x)-u(x+h)}{h\,u(x+h)u(x)}=\frac{u(x)-u(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{u(x+h)u(x)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x) \text{ et } \lim_{h\to 0}u(x+h)u(x)=u^2(x)$$

$$\text{donc } \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{u}(x+h)-\frac{1}{u}(x)}{h}=-\frac{u'(x)}{u^2(x)}v$$

Exemples

$f(x)=\frac{1}{6x^2+5}$ $\qquad u(x)=6x^2+5 \qquad u'(x)=12x$

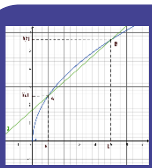
$f'(x)=-\frac{12x}{(6x^2+5)^2}$

À VOUS DE JOUER 12

Remplissez.

$f(x)=\frac{1}{4-3x^3}$ $\qquad u(x)=..............\qquad u'(x)=........$

$f'(x)=............................=.............................$



L'ESSENTIEL

Soient u et v dérivables sur un intervalle I avec v ne s'annulant pas sur l'intervalle.

La dérivée d'un quotient $\frac{u}{v}$ est donnée par : (6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Démonstration :

On prend les notations ci-dessus. On applique les résultats (3) et (5).

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\left(u\cdot\frac{1}{v}\right)'=u'\cdot\frac{1}{v}+u\left(\frac{1}{v}\right)'=u'\cdot\frac{1}{v}-u\cdot\frac{v'}{v^2}=u'\cdot\frac{v}{v^2}-u\cdot\frac{v'}{v^2}=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Exemples :

$f(x)=\frac{2x+5}{x^2+1}$ $\qquad u(x)=2x+5 \qquad v(x)=x^2+1$

$\qquad u'(x)=2 \qquad v'(x)=2x$

$$f(x)=\frac{2(x^2+1)-(2x+5)\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2-10x+2}{(x^2+1)^2}$$

À VOUS DE JOUER 13

Remplissez.

$f(x)=\frac{2x^2+5}{x^2-3}$ $\qquad u(x)=............... \qquad v(x)=...........$

$\qquad u'(x)=.......... \qquad v'(x)=............$

$f(x)=\frac{.......................-.........................}{.................................}=\frac{...................................}{...................................}$

04 DÉRIVATION : POINT DE VUE GLOBAL

Dérivées des fonctions composées

- **<u>Notion de fonction composée</u>**

Prenons un exemple : $f:x\mapsto\sqrt{x^2+1}$

Pour calculer l'image de x, on doit d'abord calculer x^2+1. Appelons u la fonction $u:x\mapsto x^2+1$.

Puis on doit prendre la racine carrée de $u(x)$. Appelons g la fonction racine carrée. $g:x\mapsto\sqrt{x}$.

Finalement, $f(x)=g(u(x))$.

On dit que f est la composée de u et de g. On la note $f=gou$

Remarque : on commence par donner la fonction u car on calcule en premier $u(x)$.

Exemples

$f: x \mapsto 2x$ et $g: x \mapsto x^2$

$f o g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2$ $\quad g o f(x) = g(f(x)) = g(2x) = 4x^2$

$f: x \mapsto \sqrt{3x+4}$ et $g: x \mapsto x^2$

$f o g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{3x^2+4}$

g est souvent une fonction de référence, par exemple la fonction racine carrée, inverse…

$f: x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ peut s'écrire : $f = \sqrt{u}$

$f: x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ peut s'écrire : $f = \dfrac{1}{u}$

C'est cette forme qu'on a déjà utilisée pour donner certaines dérivées.

$\dfrac{1}{u}$ est la composée de u et de la fonction inverse.

À VOUS DE JOUER 14

Remplissez.

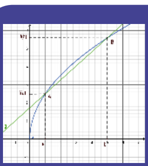
$f(x) = \dfrac{1}{3x^2+5}$ est la composée

de la fonction $u : x \mapsto$ .... et de la fonction $v : x \mapsto$ ....

Donc $f =$ ....o..........

On pose $g = uov$. $g(x) = u(..........) =$ ....

- **Dérivée d'une fonction composée**



L'ESSENTIEL

Soit f une fonction composée qui s'écrit $f = gou$. Si u est dérivable en x et g est dérivable en $u(x)$, alors f est dérivable en x et $f'(x) = g'(u(x)) \times u'(x)$.

➢ Dans la pratique : on dérive g mais au lieu de "x" on met $u(x)$, puis on multiplie par $u'(x)$.

Exemples :

$f(x) = \sqrt{2x+1}$ $\quad u(x) = 2x+1$ $\quad g(x) = \sqrt{x}$

On dérive g ($g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$) et on remplace x par $u(x)$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}} \times$......

On multiplie par la dérivée de u ($u'(x) = 2$) : $\quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}} \times 2$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

À VOUS DE JOUER 15

Remplissez.

$f(x) = (2x^2+1)^5$ $\quad u(x) = 2x^2+1$ $\quad g(x) =$ ....

On dérive g ($g'(x) =$ ....) et on remplace x par $u(x)$: $\quad f'(x) =$ .... $\times$[......]

On multiplie par la dérivée de u ($u'(x) =$ ....) : $\quad f'(x) =$ .... $\times$ ....

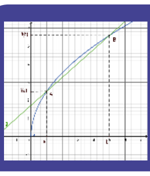
$f'(x) =$ ....

Avec la formule de composition, on retrouve que : $(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$

Mais on a également les formules suivantes : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$

- **<u>Cas particulier : dériver $g(ax+b)$</u>**



L'ESSENTIEL

Si f s'écrit $f(x) = g(ax+b)$,alors $f'(x) = a \times g'(ax+b)$.

Il s'agit d'un cas particulier de la formule générale en posant : $u(x) = ax+b$.

Exemples :

$f(x)=\sqrt{3x+5}$

$a=3$; la fonction g est la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$: $g'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$; $t=3x+5$

$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+5}}$

$f(x)=(3x+5)^4$

$a=3$; la fonction g est la fonction $t \mapsto t^4$ $g'(t)=4t^3$; $t=3x+5$

$f'(x)=3\times 4(3x+5)^3=12(3x+5)^3$

À VOUS DE JOUER 16

Remplissez.

$f(x) = \sqrt{3x+5}$

$a =$.....; la fonction g est la fonction $t \mapsto$ .... : $g'(t) =$............; $t =$.............

$f'(x) = \frac{3}{\text{....................}}$

$f(x) = (3x+5)^4$

$a =$............ ; la fonction g est la fonction $t \mapsto$ .... $g'(t) =$............ ; $t = 3x+5$

$f'(x) = 3\times$.................... = ...

LE TEMPS DU BILAN

➢ Voici les formules que vous devez connaître par cœur

Les dérivées des fonctions usuelles sont :

Fonction	Fonction dérivée	Intervalles de validité
$f(x)=Cste$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$f(x)=x^n\ ,\ n\in\mathbb{Z}^*$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n>0$ $\mathbb{R}^*$ si $n<0$

Les opérations autorisées sur les dérivées sont :

(1) $(u+v)'=u'+v'$ (2) $(ku)'=ku'$ (3) $(u\cdot v)'=u'v+uv'$ (4) $(u^n)'=nu'u^{n-1}$	(5) $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$ (6) $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ (7) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Si f s'écrit $f(x)=g(ax+b)$, alors $f'(x)=a\times g'(ax+b)$.

Abordons maintenant une série d'exercices, afin de vérifier vos connaissances.
Les réponses aux exercices se trouvent en fin de manuel.

EXERCICE 07

Déterminez l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité, la dérivée de *f* dans les cas :

$x=0$; $x=-\frac{1}{2}$ et $x=3$

a) $f(x)=x^3$

b) $f(x)=-2x^3+3x-5$

c) $f(x)=x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{3}x-1$

d) $f(x)=x+\sqrt{x}$

e) $f(x)=\sqrt{x}(x-1)$

Complétez le tableau.

	$f'(0)$	$f'(-\frac{1}{2})$	$f'(3)$
$f(x)=x^3$			
$f(x)=-2x^3+3x-5$			
$f(x)=x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{3}x-1$			
$f(x)=x+\sqrt{x}$			
$f(x)=\sqrt{x}(x-1)$			
$f(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$			

EXERCICE 08

Dérivez les fonctions suivantes (on ne demande pas les ensembles de définition et de dérivabilité) :

$$f(x)=(3x-1)^4$$
$$g(x)=3\sqrt{6-2x}$$

EXERCICE 09

$$f:\begin{cases}[1;+\infty[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{2x-5}{x+1}\end{cases}\qquad g:\begin{cases}[1;+\infty[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{2\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+1}\end{cases}$$

1) Quelle est la nature de la fonction f ?

2) Dérivez *f*.

3) Dérivez g en utilisant la dérivée d'un quotient.

4) Dérivez g en utilisant la dérivée des fonctions composées.

EXERCICE 10

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x^2+3x-5$ de courbe représentative C_f et la droite (d) d'équation : $(d)\ y=-x+3$.

1) Pour quelle(s) valeur(s) de x, (d) est-elle parallèle à la tangente à C_f en x ?

2) Déterminez les équations des tangentes correspondantes.

EXERCICE 11

On appelle $x(t)$ la distance parcourue par un véhicule t secondes après son démarrage pour un crash test.
$x(t) = 0{,}5t^3 + 0{,}4t^2$

1) Déterminez la dérivée de x.

2) Comment interprétez-vous cette dérivée ?

3) À quel instant atteint-on 72 km/h ?

4) On pose $x'(t)=v(t)$. Déterminez la dérivée de v.

---

5) Comment interprétez-vous cette dérivée ?

EXERCICE 12

Le profil d'un toboggan a pour expression $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

On sait que :

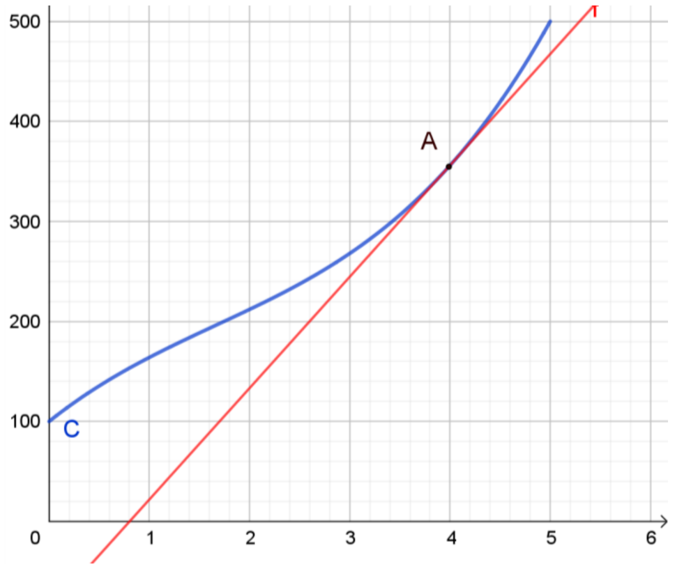
- La hauteur du toboggan et 1,2 m et sa longueur 2 m.
- Le toboggan est horizontal au départ et à l'arrivée.

Déterminez f.

EXERCICE 13

Une entreprise fabrique une boisson conditionnée en bouteille d'un litre.
Le coût de production en euros est donné par la fonction :

$C:\begin{cases}[0;5]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 4x^3-20x^2+80x+100\end{cases}$ où x est le nombre de centaines de litres produites.



1) Les coûts fixes sont les coûts que supporte l'entreprise même lorsque la production est nulle. À l'aide du graphique ou de la formule définissant le coût.

2) Dérivez la fonction C.

3) Le coût marginal est égal au coût de fabrication d'une unité supplémentaire.
   a. Déterminez le coût du 401$^{\text{ème}}$ litre en calculant $C(4{,}01)-C(4)$
   b. Calculez $C'(4)$. Que remarque-t-on ?
   c. Expliquez.

EXERCICE 14

Interpréter une dérivée. Le carbone 14 est un élément radioactif : il se désintègre spontanément et sert à la datation. On considère un échantillon d'un milliard d'atomes de carbone 14 et on compte le nombre d'atomes restant au cours du temps en milliards d'atomes, t étant donné en milliers d'années.

1) En combien d'années le nombre d'atomes aura-t-il été divisé par 2 ?

2) Comment définiriez-vous la dérivée de *N* ?

3) Estimez à l'aide du graphique le nombre d'atomes ayant disparu pendant les 100 premières années, et entre les années 6000 et 6100.

LES CLÉS DU BAC by COURS PI

DÉRIVATION
POINT DE VUE GLOBAL

étapes clés bac

Le calcul d'une dérivée n'est jamais compliqué, mais il exige de la méthode. N'hésitez pas à écrire les formules, les fonctions constituant un produit, un quotient ou une fonction composée.
Dans l'étude des fonctions, voilà où nous en sommes :

1. **Déterminez l'ensemble de définition.**
2. **Étudiez la parité et/ou la périodicité.**
3. Déterminez les limites de la fonction.
4. **Déterminez la dérivabilité de *f* et calculez sa dérivée (et éventuellement sa dérivée seconde).**
5. Étudiez le signe de la dérivée (et éventuellement le signe de la dérivée seconde).
6. Construisez le tableau de variations de la fonction avec les extremums locaux.
7. **Déterminez l'équation de tangentes.**
8. Étudiez la convexité.
9. Construisez la courbe représentative de la fonction en tenant compte des points remarquables.

Remarques :

- Les exercices font souvent intervenir la fonction exponentielle qui est vue dans un autre module mais qui n'engendre pas de réelles difficultés.
- L'ensemble de définition est généralement donné.
- La parité est rarement demandée.
- **Les points 4,5 et 6 sont les plus fréquemment demandés.**

Vous pouvez maintenant faire et envoyer le devoir n°1