# COURS PI

☆ L'école sur-mesure ☆

de la Maternelle au Bac, Établissement d'enseignement privé à distance, déclaré auprès du Rectorat de Paris

**Première - Module 3 - Suites**

# Mathématiques

v.5.1

- **Guide de méthodologie** pour appréhender notre pédagogie
- **Leçons détaillées** pour apprendre les notions en jeu
- **Exemples et illustrations** pour comprendre par soi-même
- **Prolongement numérique** pour être acteur et aller + loin
- **Exercices d'application** pour s'entraîner encore et encore
- **Corrigés des exercices** pour vérifier ses acquis


www.cours-pi.com

Paris & Montpellier

# EN ROUTE VERS LE BACCALAURÉAT

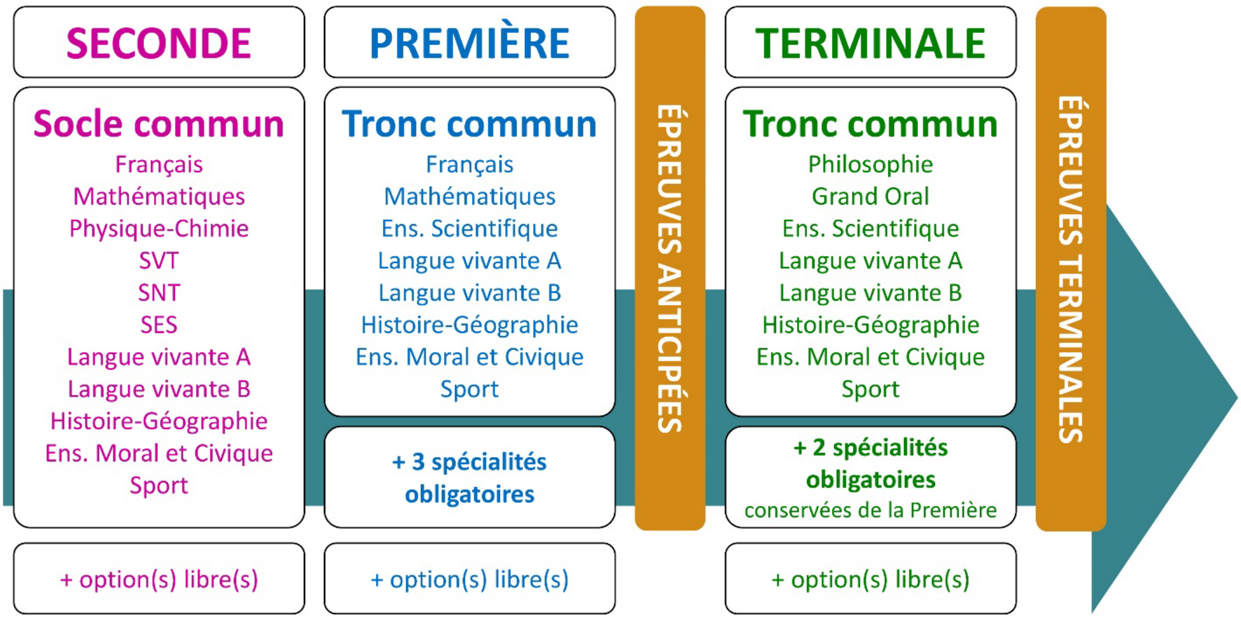
Comme vous le savez, **la réforme du Baccalauréat** est entrée en vigueur progressivement jusqu'à l'année 2021, date de délivrance des premiers diplômes de la nouvelle formule.

Dans le cadre de ce nouveau Baccalauréat, **notre Etablissement**, toujours attentif aux conséquences des réformes pour les élèves, s'est emparé de la question avec force **énergie** et **conviction** pendant plusieurs mois, animé par le souci constant de la réussite de nos lycéens dans leurs apprentissages d'une part, et par la **pérennité** de leur parcours d'autre part. Notre Etablissement a questionné la réforme, mobilisé l'ensemble de son atelier pédagogique, et déployé tout **son savoir-faire** afin de vous proposer un enseignement tourné continuellement vers l'**excellence**, ainsi qu'une scolarité tournée vers la **réussite**.

- Les **Cours Pi** s'engagent pour faire du parcours de chacun de ses élèves un **tremplin vers l'avenir**.
- Les **Cours Pi** s'engagent pour ne pas faire de ce nouveau Bac un diplôme au rabais.
- Les **Cours Pi** vous offrent **écoute** et **conseil** pour coconstruire une **scolarité sur-mesure**.

# LE BAC DANS LES GRANDES LIGNES

Ce nouveau Lycée, c'est un enseignement à la carte organisé à partir d'un large tronc commun en classe de Seconde et évoluant vers un parcours des plus spécialisés année après année.




## CE QUI A CHANGÉ

- Il n'y a plus de séries à proprement parler.
- Les élèves choisissent des spécialités : trois disciplines en classe de Première ; puis n'en conservent que deux en Terminale.
- Une nouvelle épreuve en fin de Terminale : le Grand Oral.
- Pour les lycéens en présentiel l'examen est un mix de contrôle continu et d'examen final laissant envisager un diplôme à plusieurs vitesses.
- Pour nos élèves, qui passeront les épreuves sur table, le Baccalauréat conserve sa valeur.

## CE QUI N'A PAS CHANGÉ

- Le Bac reste un examen accessible aux candidats libres avec examen final.
- Le système actuel de mentions est maintenu.
- Les épreuves anticipées de français, écrit et oral, tout comme celle de spécialité abandonnée se dérouleront comme aujourd'hui en fin de Première.

A l’occasion de la réforme du Lycée, nos manuels ont été retravaillés dans notre atelier pédagogique pour un accompagnement optimal à la compréhension. Sur la base des programmes officiels, nous avons choisi de créer de nombreuses rubriques :

- **Suggestions de lecture** pour s’ouvrir à la découverte de livres de choix sur la matière ou le sujet
- **L’essentiel** et **le temps du bilan** pour souligner les points de cours à mémoriser au cours de l’année
- **À vous de jouer** pour mettre en pratique le raisonnement vu dans le cours et s’accaparer les ressorts de l’analyse, de la logique, de l’argumentation, et de la justification
- Et enfin ... la rubrique **Les Clés du Bac by Cours Pi** qui vise à vous donner, et ce dès la seconde, toutes les cartes pour réussir votre examen : notions essentielles, méthodologie pas à pas, exercices types et fiches étape de résolution !

# MATHÉMATIQUES PREMIÈRE

## Module 3 – Suites

## L’AUTEURE

**Sylvie LAMY**

« Faire des maths c'est jouer aux legos. Il s'agit d'assembler des briques pour solutionner des problèmes ». Diplômée de l'Ecole Polytechnique et agrégée de Mathématiques, elle poursuit aujourd'hui son parcours professionnel à l'Institut Géographique National et au Ministère des Transports comme chargée de mission sur les projets spatiaux. Passionnée par les sciences physiques, son approche pédagogique réside dans la transmission du raisonnement scientifique. Elle attend de ses élèves de comprendre et d'expliciter leur démarche dans la résolution des problèmes.

## PRÉSENTATION

Ce **cours** est divisé en chapitres, chacun comprenant :

- Le **cours**, conforme aux programmes de l’Education Nationale
- Des **exercices d’application et d’entraînement**
- Les **corrigés** de ces exercices
- Des **devoirs** soumis à correction (et ***se trouvant hors manuel***). Votre professeur vous renverra le corrigé-type de chaque devoir après correction de ce dernier.

Pour une manipulation plus facile, les corrigés-types des exercices d’application et d’entraînement sont regroupés en fin de manuel.

## CONSEILS A L’ÉLÈVE

Vous disposez d’un support de Cours complet : **prenez le temps** de bien le lire, de le comprendre mais surtout de l’**assimiler**. Vous disposez pour cela d’exemples donnés dans le cours et d’exercices types corrigés.
Vous pouvez rester un peu plus longtemps sur une unité mais travaillez régulièrement.

## LES FOURNITURES

Vous devez posséder :

- une **calculatrice graphique pour l'enseignement scientifique au Lycée comportant un mode examen (requis pour l'épreuve du baccalauréat).**
- un **tableur** comme Excel de Microsoft (payant) ou Calc d'Open Office (gratuit et à télécharger sur http://fr.openoffice.org/). En effet, certains exercices seront faits de préférence en utilisant un de ces logiciels, mais vous pourrez également utiliser la calculatrice).

## LES DEVOIRS

Les devoirs constituent le moyen d'évaluer l'acquisition de vos *savoirs* (« Ai-je assimilé les notions correspondantes ? ») et de vos *savoir-faire* (« Est-ce que je sais expliquer, justifier, conclure ? »).

Placés à des endroits clés des apprentissages, ils permettent la vérification de la bonne assimilation des enseignements.

Aux *Cours Pi*, vous serez accompagnés par un professeur selon chaque matière tout au long de votre année d'étude. Référez-vous à votre « Carnet de Route » pour l'identifier et découvrir son parcours.
Avant de vous lancer dans un devoir, assurez-vous d'avoir **bien compris les consignes**.
**Si vous repérez des difficultés lors de sa réalisation**, n'hésitez pas à le mettre de côté et à revenir sur les leçons posant problème. **Le devoir n'est pas un examen**, il a pour objectif de s'assurer que, même quelques jours ou semaines après son étude, une notion est toujours comprise.
**Aux *Cours Pi*, chaque élève travaille à son rythme, parce que chaque élève est différent et que ce mode d'enseignement permet le « sur-mesure ».**
Nous vous engageons à respecter le moment indiqué pour faire les devoirs. Vous les identifierez par le bandeau suivant :

Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le devoir n°1

Il est **important de tenir compte des remarques, appréciations et conseils du professeur-correcteur**. Pour cela, il est **très important d'envoyer les devoirs au fur et à mesure** et non groupés. **C'est ainsi que vous progresserez !**

**Donc, dès qu'un devoir est rédigé**, envoyez-le aux *Cours Pi* par le biais que vous avez choisi :

1) Par **soumission en ligne** via votre espace personnel sur **PoulPi**, pour un envoi **gratuit**, **sécurisé** et plus **rapide**.
2) Par **voie postale** à *Cours Pi*, 9 rue Rebuffy, 34 000 Montpellier
   *Vous prendrez alors soin de joindre une **grande enveloppe libellée à vos nom et adresse**, et **affranchie au tarif en vigueur** pour qu'il vous soit retourné par votre professeur*

***N.B. :*** *quel que soit le mode d'envoi choisi, vous veillerez à **toujours joindre l'énoncé du devoir ;** plusieurs énoncés étant disponibles pour le même devoir.*
***N.B. :*** *si vous avez opté pour un envoi par voie postale et que vous avez à disposition un scanner, nous vous engageons à conserver une copie numérique du devoir envoyé. Les pertes de courrier par la Poste française sont très rares, mais sont toujours source de grand mécontentement pour l'élève voulant constater les fruits de son travail.*

# SOUTIEN ET DISPONIBILITÉ

## VOTRE RESPONSABLE PÉDAGOGIQUE

Professeur des écoles, professeur de français, professeur de maths, professeur de langues : notre Direction Pédagogique est constituée de spécialistes capables de dissiper toute incompréhension.

Au-delà de cet accompagnement ponctuel, notre Etablissement a positionné ses Responsables pédagogiques comme des « super profs » capables de co-construire avec vous une scolarité sur-mesure.
En somme, le Responsable pédagogique est votre premier point de contact identifié, à même de vous guider et de répondre à vos différents questionnements.

Votre Responsable pédagogique est la personne en charge du suivi de la scolarité des élèves.
Il est tout naturellement votre premier référent : une question, un doute, une incompréhension ? Votre Responsable pédagogique est là pour vous écouter et vous orienter. Autant que nécessaire et sans aucun surcoût.

| | |
|---|---|
| QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ? | Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi. |
| QUEL EST SON RÔLE ? | Orienter les parents et les élèves.<br>Proposer la mise en place d'un accompagnement individualisé de l'élève.<br>Faire évoluer les outils pédagogiques.<br>Encadrer et coordonner les différents professeurs. |

## VOS PROFESSEURS CORRECTEURS

Notre Etablissement a choisi de s'entourer de professeurs diplômés et expérimentés, parce qu'eux seuls ont une parfaite connaissance de ce qu'est un élève et parce qu'eux seuls maîtrisent les attendus de leur discipline. En lien direct avec votre Responsable pédagogique, ils prendront en compte les spécificités de l'élève dans leur correction. Volontairement bienveillants, leur correction sera néanmoins juste, pour mieux progresser.

| | |
|---|---|
| QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ? | Une question sur sa correction ?<br>• faites un mail ou téléphonez à votre correcteur et demandez-lui d'être recontacté en lui laissant un message avec votre nom, celui de votre enfant et votre numéro.<br>• autrement pour une réponse en temps réel, appelez votre Responsable pédagogique. |

## LE BUREAU DE LA SCOLARITÉ

Placé sous la direction d'Elena COZZANI, le Bureau de la Scolarité vous orientera et vous guidera dans vos démarches administratives. En connaissance parfaite du fonctionnement de l'Etablissement, ces référents administratifs sauront solutionner vos problématiques et, au besoin, vous rediriger vers le bon interlocuteur.

| | |
|---|---|
| QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ? | Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.<br>04.67.34.03.00<br>scolarite@cours-pi.com |

# LE SOMMAIRE





**COMPÉTENCES VISÉES**

- Dans le cadre de l'étude d'une suite, utiliser le registre de la langue naturelle, le registre algébrique, le registre graphique, et passer de l'un à l'autre.
- Proposer, modéliser une situation permettant de générer une suite de nombres.
- Déterminer une relation explicite ou une relation de récurrence pour une suite définie par un motif géométrique, par une question de dénombrement.
- Calculer des termes d'une suite définie explicitement, par récurrence ou par un algorithme.



**COMPÉTENCES VISÉES**

- Pour une suite arithmétique, calculer le terme général, la somme de termes consécutifs, déterminer le sens de variation.
- Modéliser un phénomène discret à croissance linéaire par une suite arithmétique.
- Conjecturer, dans des cas simples, la limite éventuelle d'une suite.

COMPÉTENCES VISÉES

- Pour une suite géométrique, calculer le terme général, la somme de termes consécutifs, déterminer le sens de variation.
- Modéliser un phénomène discret à croissance linéaire par une suite arithmétique, un phénomène discret à croissance exponentielle par une suite géométrique.
- Conjecturer, dans des cas simples, la limite éventuelle d'une suite.

## ESSAIS

- **Les maths c'est magique !** *Johnny Ball*
- **La grande aventure des nombres et du calcul** *Jason Lapeyronnie*
- **17 Équations qui ont changé le monde** *Ian Stewart*
- **Alex au pays des chiffres** *Alex Bellos*
- **Le grand roman des maths : de la préhistoire à nos jours** *Mickael Launay*
- **Histoire universelle des chiffres : L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul** *Georges Ifrah*
- **Le démon des maths** *Hans Magnus Enzensberger*
- **A propos de rien : une histoire du zéro** *Robert Kaplan*

## BANDES-DESSINÉES

- **Logicomix** *Doxiádis / Papadátos / Papadimitríou*
- **Les maths en BD 1 et 2** *Larry Gonick*

## DOCUMENTAIRES AUDIOVISUELS

- **L'extraordinaire aventure du chiffre 1** *Terry Jones*
- **Voyage au pays des maths** *Arte*

## PODCASTS

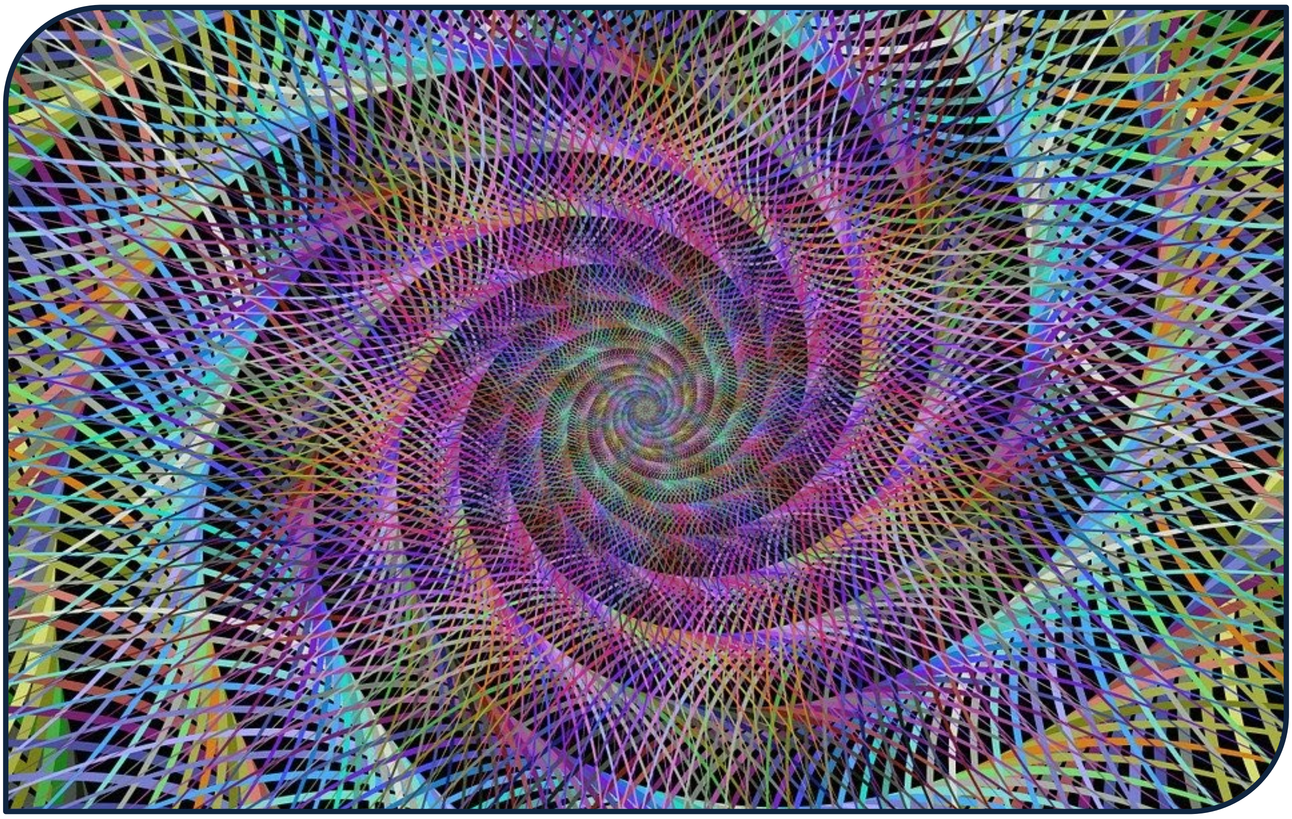
- **L'oreille mathématiques** *Podcast de la Maison Poincarré*
- **Maths en tête** *toutes plateformes*

## YOUTUBE

- **Chaîne YouTube Maths et Tiques** *Yvan Monka*
- **Chaîne YouTube Micmaths** *Mickaël Launay*
- **Chaîne YouTube de la Maison des mathématiques et de l'informatique**
- **Chaîne YouTube Automaths** *Jason Lapeyronnie*

# Le Cours

# INTRODUCTION



Voici deux énigmes mathématiques :

« Sachant qu'un nénuphar double de taille chaque jour et qu'il met 30 jours à recouvrir la totalité d'un lac, combien de temps mettra-t-il à en recouvrir la moitié ? ».

« Ce mois-ci j'ai 140 euros sur son compte et j'en ajoute 15 par mois. Quelle somme vais-je avoir dans deux ans ? »

Ces deux énigmes peuvent être résolues grâce au même outil mathématique : les suites !! Au cours de ce chapitres vont être développées de nouvelles notions, manières de raisonner d'un point de vue mathématique.

Et vous serez donc apte à répondre à trouver les solutions posées à ces deux énigmes à l'issue de ces chapitres…

# CHAPITRE 1
# GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

Au cours de cette première partie de module, nous commencerons par définir une suite puis nous nous intéresserons à ses caractéristiques. Nous nous arrêterons alors sur la détermination de son sens de variation. Les notions de suites majorées et minorées ainsi que sa limite seront alors étudiées. Enfin, le langage python appliqué aux suites sera entrevu.

## COMPÉTENCES VISÉES

- Dans le cadre de l'étude d'une suite, utiliser le registre de la langue naturelle, le registre algébrique, le registre graphique, et passer de l'un à l'autre.
- Proposer, modéliser une situation permettant de générer une suite de nombres.
- Déterminer une relation explicite ou une relation de récurrence pour une suite définie par un motif géométrique, par une question de dénombrement.
- Calculer des termes d'une suite définie explicitement, par récurrence ou par un algorithme.

## PRÉREQUIS

- Étude des fonctions, dérivation.
- Informatique : programmation Python.

## ACTIVITÉ 1.

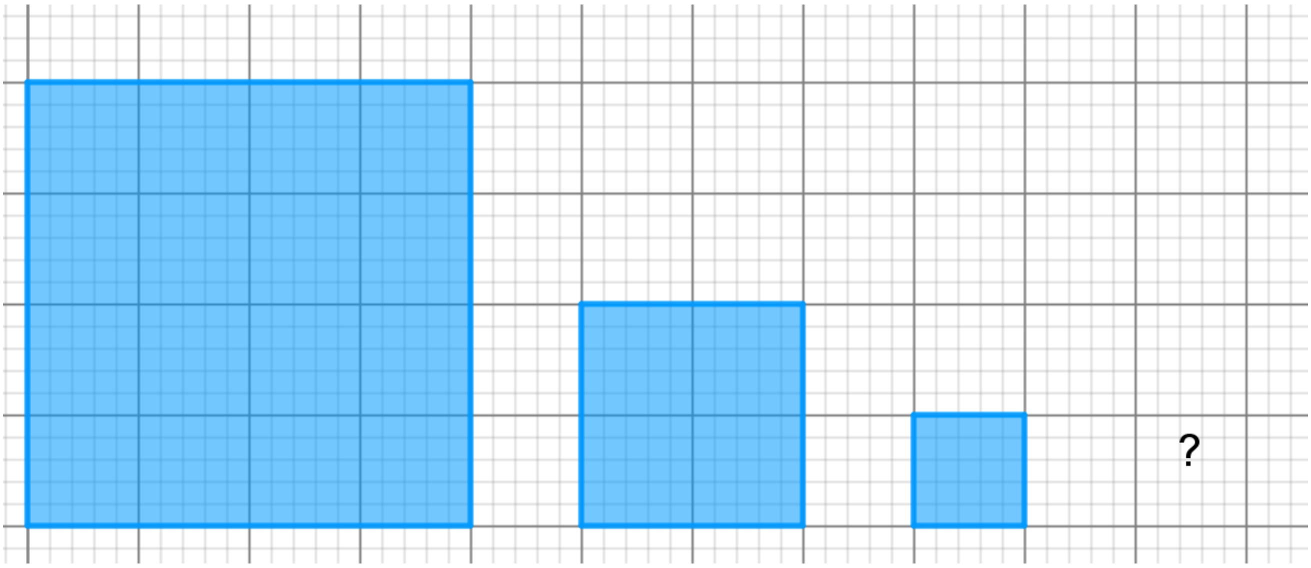
1) Donnez le terme suivant :

**3 5 7 9** ..............................................................................

**4 9 16 25** ..............................................................................

**5 10 17 26** ..............................................................................

2) Donnez la figure suivante :




3) On considère la suite déterminée par l'aire du carré dans l’illustration ci-dessus. Quel est le terme suivant ?

**16 4 1** ..............................................................................

4) On lance un dé et on note le résultat. Peut-on donner le terme suivant ?

**3 5 2 5** ..............................................................................

## SOLUTIONS DE L’ACTIVITÉ 1.

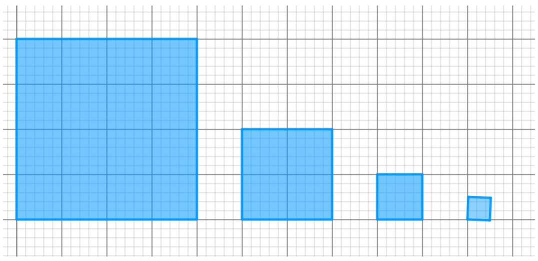
1)

3 5 7 9 $\boxed{11}$

4 9 16 25 $\boxed{36}$

5 10 17 26 $\boxed{37}$

2)



3) 16 4 1 $\boxed{0,25}$

4) Il s'agit d'un tirage aléatoire. On ne peut pas connaître le terme suivant.

Une suite numérique est simplement une suite de nombres. Les suites qui sont intéressantes sont les suites "logiques", celles que l'on peut construire, c'est-à-dire anticiper la valeur d'un terme. Nous allons voir des types de construction et étudier certains de leurs comportements.

# 01 GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES
## Définitions et vocabulaire

### L'ESSENTIEL

Une **suite numérique *u*** est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) sur $\mathbb{R}$.

L'image de l'entier naturel *n* par *u* peut être notée de deux manières différentes :

- Notation **fonctionnelle** : $u(n)$
- Notation **indicielle** utilisée pour les suites : $u_n$

➢ Une **suite est finie** si elle est définie sur une partie finie de $\mathbb{N}$.

➢ **La suite se note également $(u_n)$.**

- $u_n$ est le **terme général** de la suite.
- $u_p$ est le **terme de rang *p*** (*p* est alors une valeur particulière).
- $u_{n+1}$ est le **terme suivant** $u_n$ ; $u_{n-1}$ est le **terme précédent** $u_n$.
- Le premier terme de la suite est le **terme initial**.

  Si la suite est définie sur $\mathbb{N}$ il s'agit de $u_0$.

➢ Ne pas confondre le rang d'un terme et sa position dans la suite (voir exemple).

*Exemple :*

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$, de terme général $u_n = n^2 + n$.

Les premiers termes de la suite sont donc :

$u_0 = 0^2 + 0 = 0, u_1 = 1^2 + 1 = 3,\ u_2 = 2^2 + 2 = 6,$

$u_3 = 3^2 + 3 = 12, u_4 = 4^2 + 4 = 20$

Le <u>terme initial</u> est $u_0 = 0$.

Le <u>terme de rang</u> 3 vaut $u_3 = 12$

**Le terme de rang 3 est le 4ème terme de la suite !**

➢ Toutes les suites ne sont pas forcément définies par un terme général (suite finie aléatoire).

### À VOUS DE JOUER 1
Complétez

Suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ : 3 5 7 9 .....

Le terme initial vaut ....................

Le terme de rang 3 vaut ................

# GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES
## Génération d'une suite

### L'ESSENTIEL

Une suite numérique $(u_n)$ peut être définie à l'aide :

- **d'une formule explicite :** $u_n = f(n)$
- **d'une formule par récurrence :** $u_{n+1} = f(u_n)$ **:** les termes sont définis en fonction d'un ou plusieurs termes précédents.

➢ Ne pas confondre le rang d'un terme et sa position dans la suite (voir exemple).

*Exemple :*

*Suite définie de manière explicite :*

$(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \sqrt{n+3}$

*Suite définie par récurrence :*

$(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = n + \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

## GÉNÉRATION PAR UNE FORMULE EXPLICITE $u_n = f(n)$

### L'ESSENTIEL

Une suite générée de manière explicite est définie par :

- l'expression de la fonction permettant de calculer le rang n,
- l'ensemble des entiers sur lesquels la suite est définie.

➢ La relation $u_n = f(n)$ permet de calculer chaque terme de la suite en connaissant uniquement le rang. En revanche, elle ne permet pas généralement de calculer un terme en fonction du précédent.

➢ Une suite définie de manière explicite est donc une fonction définie sur $\mathbb{N}$. On dit qu'il s'agit d'une fonction discrète.

*Exemple :* on considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} n \geq 2 \\ u_n = \sqrt{n-2} \end{cases}$ :

La fonction sous-jacente est *f* définie sur $[2;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-2}$

Remarque : Le premier terme de cette suite est donc le terme de rang 2 : $u_2 = 0$.

La suite $(u_n)$ est définie sur $\mathbb{N} - \{0;1\}$

### À VOUS DE JOUER 2

Complétez

1. Suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N} - \{0,1\}$ : 5 10 17 26 ....

   $(u_n)$ est la suite définie par : $\begin{cases} n\text{.........} \\ u_n = n^2\text{..........} \end{cases}$

2. Suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}-\{0,1\}$ : 5 10 17 26 ....

$(u_n)$ est la suite définie par : $\begin{cases} n \geq 0 \\ u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

## GÉNÉRATION PAR UNE FORMULE EXPLICITE $u_{n+1} = f(u_n)$

### L'ESSENTIEL

Une suite générée par récurrence est définie par :

- de la connaissance d'au moins un terme de la suite (le plus souvent $u_0$).
- d'une fonction établissant une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ permettant de définir chaque terme à partir du précédent (dans la plupart des cas).

➢ La relation de récurrence permet de connaître la relation entre des termes consécutifs mais ne permet pas généralement de calculer directement en fonction du rang un terme de la suite.

*Exemple* 1 : on considère la suite $u$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

- la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.
- $u_0 = 1$.

*Remarque :* la relation de récurrence est donnée par la fonction : $f(x) = x^2 + x$

$u_{n+1} = f(u_n)$

Calcul des premiers termes : $u_1 = u_0^{\ 2} + u_0 = 2$ $u_2 = u_1^{\ 2} + u_1 = 6$ $u_3 = u_2^{\ 2} + u_2 = 42$

➢ Une formule de récurrence peut également être donnée par une fonction portant sur plusieurs termes précédents. Dans ce cas, il faut donner autant de termes initiaux.

*Exemple* 2 : on considère la suite $u$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \end{cases}$

Calcul des premiers termes : $u_2 = u_0 + u_1 = 3$ $u_3 = u_1 + u_2 = 5$ $u_4 = u_2 + u_3 = 8$

### À VOUS DE JOUER 3

Complétez

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = -3u_n + 2 \end{cases}$

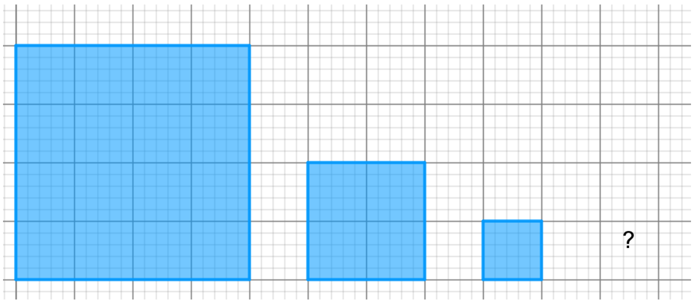
Il s'agit d'une suite définie par ..................................

$u_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $u_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $u_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

➢ Dans certains cas, c'est vous qui devrez trouver la relation de récurrence. L'exemple classique est une suite définie à l'aide de figures géométriques.

*Exemple* :

On reprend l'exemple de l'activité.




On passe d'un carré au suivant en divisant le côté par 2.

On appelle $(A_n)$ A la suite des aires.

L'aire à chaque étape est donc divisée par 4.

La suite $(A_n)$ est donc définie par : $\begin{cases} A_0 = 16 \\ A_{n+1} = \dfrac{A_n}{4} \end{cases}$

## 03 GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

### Variations d'une suite

Comme pour les fonctions, on peut étudier les variations d'une suite. Attention ! la variation d'une suite n'est pas toujours identique à la variation de la fonction sous-jacente.

### L'ESSENTIEL

- Une suite $(u_n)$est **croissante** à partir du rang $p$ si on a :
  pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \geq u_n$
- Une suite $(u_n)$est **strictement croissante** à partir du rang $p$ si on a :
  pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} > u_n$
- Une suite $(u_n)$est **décroissante** à partir du rang $p$ si on a :
  pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \leq u_n$
- Une suite $(u_n)$est **strictement décroissante** à partir du rang $p$ si on a :
  pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} < u_n$
- Une suite $(u_n)$est **constante** à partir du rang $p$ si on a :
  pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} = u_n$
- **Remarque :** une suite est **strictement monotone** lorsqu'elle est soit strictement croissante soit strictement décroissante.

➢ Si on ne précise pas le rang *p*, la suite est croissante (décroissante…) à partir du premier rang où elle est définie.

*Exemple* 1 : on considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 3n$

Cette suite est strictement croissante.

*Exemple* 2 : on considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = (-1)^n$

Les termes de cette suite valent alternativement +1 et −1.

Cette suite n'est ni strictement croissante, ni strictement décroissante, ni constante.

# MÉTHODE POUR LES VARIATIONS

## Méthode 1 : étude du signe de $u_{n+1} - u_n$

Si pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n > 0$, $(u_n)$ est strictement croissante.

Si pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, $(u_n)$ est croissante.

Si pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n < 0$, $(u_n)$ est strictement décroissante.

Si pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, $(u_n)$ est décroissante.

*Exemple* 1 : on considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 3n$

$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 3n = 3 \text{ donc } u_{n+1} - u_n > 0$.
Cette suite est strictement croissante.

*Exemple* 2 : on considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = u_n + 4$

$u_{n+1} - u_n = 4 \text{ donc } u_{n+1} - u_n > 0$
La suite est strictement croissante à partir de 0.

## À VOUS DE JOUER 4

Complétez

1) On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$par $u_n = 5 - 2n$.

$u_{n+1} - u_n =$ ..............................................................................

La suite est .............................................

2) On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = u_n - n \end{cases}$.

$u_{n+1} - u_n =$ .......................................

La suite est décroissante.

**On suppose que pour $n \geq p$, la suite $(u_n)$ est strictement positive**

## Méthode 2 : étudier le signe de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

Si pour tout $n \geq p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, $(u_n)$ est strictement croissante à partir de $p$.

Si pour tout $n \geq p$, $n \geq p$, $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, $(u_n)$ est strictement décroissante à partir de $p$.

*Exemple* 1 : on considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 3n$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(n+1)}{3n} = 1 + \frac{1}{3n} \; donc \; \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$
La suite est strictement croissante à partir de 1.
La méthode ne marche pas pour 0.
Comme $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$, la suite est strictement croissante à partir de 0.

*Exemple* 2 : on considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = 2u_n$ et $u_0 = 1$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ : la suite est strictement croissante.

*Exemple* 3 : l'exemple suivant montre pourquoi pour cette méthode on a supposé que la suite devait être strictement positive.

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = -2u_n$ et $u_0 = 1$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -2$

Attention ! $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ mais la suite n'est pas strictement décroissante (suite alternée).

### Méthode 3 : étudier les variations de la fonction de définition de la suite

Attention ! Cette méthode n'est valable que pour les suites explicites.

- Remarque : il suffit d'étudier les variations de la fonction sur $\mathbb{R}^+$.

Si pour tout $n \geq p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, $(u_n)$ est strictement croissante à partir de $p$.

Si pour tout $n \geq p$, $n \geq p$, $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, $(u_n)$ est strictement décroissante à partir de $p$.

*Exemple* 1 : on considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{1}{n}$

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

La suite est donc strictement décroissante à partir de 1.

*Exemple* 2 : l'exemple suivant montre pourquoi pour cette méthode, on a supposé que la suite devait être explicite.

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$

La suite est décroissante alors que la fonction racine carrée est croissante

## À VOUS DE JOUER 5

Complétez

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5 - 2n$.

La fonction sous-jacente est : $f(x) =$ ................................. qui est une fonction .................................

La suite $(u_n)$ est donc .................................

- La méthode à utiliser dépend de la facilité des calculs, donc de la forme de génération de la suite.
- Pour montrer qu'une suite est croissante ou décroissante, il ne suffit pas de montrer qu'il y a croissance sur les premiers termes. Il faut faire les calculs pour tout $n$.

# 04 GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

## Suites majorées, minorées, notions de limite

### L'ESSENTIEL

Soit $(u_n)$une suite définie sur $\mathbb{N}$.

- $(u_n)$ est **majorée** par un nombre $M$ si on a pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n \leq M$. $M$ est alors un **majorant** de la suite.
- $(u_n)$ est **minorée** par un nombre $m$ si on a pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $m \leq u_n$. $m$ est alors un **minorant** de la suite.

Une suite est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

- Ces définitions s'apparentent à celles vues précédemment pour les fonctions.
- Une suite peut n'admettre ni majorant ni minorant.

- Remarques :
  Une suite croissante est minorée par son premier terme.
  Une suite décroissante est majorée par son premier terme.

*Exemple* 1 : on considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \sin(n)$

Pour tout nombre *x* on a $-1 \leq \sin x \leq 1$.
La suite est donc bornée (majorée par 1 et minorée par −1).

*Exemple* 2 : on considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{1}{n}$

Cette suite est décroissante (vu précédemment). Elle est majorée par $u_1 = 1$.

## RECHERCHE DE SEUIL ET DE LIMITES

Cette partie sera abordée sous forme d'exemples, la théorie étant du programme de Terminale.

*Exemple* 1 : on considère la suite $u$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 5n - 2$

Il s'agit d'une suite croissante.
Problématique : Peut-on déterminer un rang $n_0$ appelé **seuil** à partir duquel les termes de la série sont supérieurs à 10000 ?

$$u_n \geq 10000 \Leftrightarrow 5n - 2 \geq 10000 \Leftrightarrow n \geq \frac{10002}{5} \Leftrightarrow n \geq 2000{,}4$$

Pour tout on a donc : pour tout $n \geq 2001$, $u_n \geq 10000$ Le seuil $n_0$ vaut 2001.
Plus généralement, pour tout nombre *A* (aussi grand soit-il !), on peut trouver un seuil à partir duquel les termes de la série sont <u>tous</u> supérieurs à *A*. **La suite tend donc vers $+\infty$ .**

### L'ESSENTIEL

Soit $(u_n)$une suite définie sur $\mathbb{N}$

$(u_n)$ **a pour limite** $+\infty$ quand *n* tend vers $+\infty$, si pour tout nombre *A*, il existe un seuil à partir duquel tous les termes de la série sont supérieurs à *A*.

$$\text{notation : } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

$(u_n)$ **a pour limite** $-\infty$ quand *n* tend vers $+\infty$, si pour tout nombre *A*, il existe un seuil à partir duquel tous les termes de la série sont inférieurs à *A*.

$$\text{notation : } \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

- La notation de la limite est la même que celle utilisée dans l'étude de la dérivation.

*Exemple* 2 : on considère la suite $u$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{5}{n}$

La suite est positive et strictement décroissante à partir de 1.
Problématique : Peut-on déterminer un rang $n_0$ appelé **seuil** à partir duquel les termes de la série sont compris entre 0 et 0,001 ?

$$0 < u_n \leq 0{,}001 \Leftrightarrow 0 < \frac{5}{n} \leq 0{,}001 \Leftrightarrow n \geq \frac{5}{0{,}001} \Leftrightarrow n \geq 5000$$

On a donc : pour tout $n \geq 5000$, $0 < u_n \leq 0{,}001$ Le seuil $n_0$ vaut 5000.
Plus généralement, pour tout nombre *a* strictement positif (aussi proche de 0 soit-il !), on peut trouver un seuil à partir duquel les termes de la série sont compris entre 0 et *a*. La suite tend donc vers 0.

## L'ESSENTIEL

Soit $(u_n)$une suite définie sur $\mathbb{N}$

$(u_n)$ **a pour limite** $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$, si pour tout nombre strictement positif $a$, il existe un seuil à partir duquel tous les termes de la série sont compris entre 0 et $a$ .

notation : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

$(u_n)$ **a pour limite**$\ell$ quand $n$ tend vers $+\infty$, si pour tout nombre strictement positif $a$, il existe un seuil à partir duquel tous les termes de la série sont compris entre $\ell - a$et $\ell + a$.

notation : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

➢ Intuitivement, une suite admet une limite finie quand, au bout d'un certain temps, elle semble stagner.

Certaines suites n'ont pas de limite (ni finie, ni infinie) :

*Exemple :* on considère la suite $u$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = (-1)^n n$

Cette suite n'admet pas de limite.

## À VOUS DE JOUER 6

Complétez

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ $\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} \end{cases}$

Un programme Python a permis de calculer les n premiers termes.
[100, 30.0, 16.43168, 12.1608, 10.4617, 9.70337, 9.34507, 9.17091, 9.08505, 9.04243, 9.02119, 9.01059, 9.00529, 9.00264, 9.00132, 9.00066, 9.00033, 9.00016, 9.00008, 9.00004]

On peut conjecturer que la suite semble avoir pour limite ...........

## L'ESSENTIEL

Une suite est convergente si elle admet une limite finie. Sinon, elle est divergente.

➢ Une suite diverge si elle admet une limite infinie ou si elle n'admet pas de limite.

# 05 GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

## Les suites Python

Les suites, en particulier celles définies par récurrence, sont un domaine d'application pour la programmation. On trouve principalement 3 types de scripts (ou de fonctions) :

- -ceux permettant de calculer les termes d'une suite (un terme particulier ou les *n* premiers termes) ;
- -ceux permettant de déterminer un seuil à partir duquel les termes d'une suite croissante (resp. décroissante) dépassent (sont inférieurs à) une certaine valeur.
- -ceux permettant de calculer la somme des premiers termes de la suite.

*Exemple de calcul de termes :* on considère la suite $u$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$

1) On souhaite écrire un script Python permettant de calculer le 5$^{\text{ème}}$ terme de la suite (donc le terme de rang 4).

```
U=2  #u0=2
for i in range(4) :
     U=U+i
print(U)
```

Résultat affiché : 8

2) On souhaite écrire une fonction Python permettant de calculer les *n* premiers termes de la suite. On va utiliser une liste.

```
def exemple2(n) :
   U=2  #u0=2
   L=[U]
   for i in range(0,n-2) :
      U=U+i
      L.append(U)
   return L

print(exemple2(10))
```

Résultat affiché pour n=10 : [2, 2, 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38]

➢ Il faut faire très attention aux indices des boucles. Ne pas hésiter à tester sur les premiers termes.

## À VOUS DE JOUER 7

Complétez

On considère la suite $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - n \end{cases}$

1)
   a. Complétez la fonction **avdj7_1(n)** permettant de calculer le terme de la suite de rang n .

```
def avdj7_1(n) :
   U=1
   for i in ..................... :
      U=.....................
   return U

print(avdj7_1(10))
```

   b. Programmez sur EduPython ou sur la calculatrice.

   c. Quel est le résultat à l'exécution : .............

   d. Testez la fonction sur quelques valeurs de n. Qu'observe-t-on ? ............................

2) Complétez la fonction **avdj7_2(n)** permettant de calculer les n premiers termes de la suite :

$$\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} \end{cases}$$

```
from math import *
def avdj7_2(n) :
    U=…….
    L=…………]
    for i in ………………… :
        U=…………….
        …………………………..
    return L

print(avdj7_2(20))
```

Résultat affiché pour n=20 :
[100, 30.0, 16.43168, 12.1608, 10.4617, 9.70337, 9.34507, 9.17091, 9.08505, 9.04243, 9.02119, 9.01059, 9.00529, 9.00264, 9.00132, 9.00066, 9.00033, 9.00016, 9.00008, 9.00004]

Qu'observe-t-on ?………………………………………………………………………………………………………

*Exemple de détermination d'un seuil* : reprenons l'exemple précédent : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$

Cette suite a pour imite +∞. On veut que l'algorithme affiche le seuil pour une valeur A.

```
def exemple3(A) :
    U=2  #u0=2
    i=0
    while (U<=100) :
        U=U+i
        i=i+1
    return i

print(exemple3(100))
```

Résultat affiché pour A=100 : 15
Voici les premiers termes de la suite:
[2, 2, 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47, 57, 68, 80, 93, 107, 122, 138, 155, 173]

## À VOUS DE JOUER 8

Complétez

On considère la suite $\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} \end{cases}$. On a vu qu'elle semble décroissante et converger vers 9.

Complétez la fonction avdj8() permettant de savoir à partir de quel rang on a : $u_n < 9{,}0001$

```
def avdj8() :
    U=100
    i=……
    ……………………………………….
        U=…………………….
        i=…………………
    return …………….

print(avdj8())
```

# LE TEMPS DU BILAN



➢ Génération d'une suite :

- Explicite : $u_n = f(n)$
- Par récurrence : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

➢ Variations d'une suite :

- *u* est croissante si on a pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$
- *u* est strictement croissante si on a pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$
- *u* est décroissante si on a pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$
- *u* est strictement décroissante si on a pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$
- *u* est constante si on a pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$
- *u* est strictement monotone si *u* est soit strictement croissante soit strictement décroissante.

➢ Suite majorée, minorée, bornée

- *u* est majorée par *M* (réel) si on a pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n \leq M$
- *u* est minorée par *m* (réel) si on a pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n \geq m$
- *u* est bornée si elle est majorée et minorée.

➢ Limites

- Si une suite admet une limite finie, elle est convergente. Une suite non convergente est dite divergente.
- Une suite est divergente si elle n'admet aucune limite ou qu'elle admet une limite infinie.

EXERCICES

Abordons maintenant une série d'exercices, afin de vérifier vos connaissances.
Les exercices ont été classés dans un ordre d'approfondissement croissant.
Les réponses aux exercices se trouvent en fin de manuel.

## EXERCICE 01

Exprimez le terme général des suites définies sur $\mathbb{N}$ suivantes :

1) Suite des multiples de 3

2) Suite des puissances de 10 supérieures ou égales à $10^3$.

## EXERCICE 02

Soit *u* une suite définie sur $\mathbb{N}$. Combien y-a-il de termes ?

*a*) de $u_0$ à $u_8$ *b*) de $u_1$ à $u_{15}$ *c*) de $u_0$ à $u_n$ *d*) de $u_p$ à $u_n$

## EXERCICE 03

Exprimez la suite suivante par une relation de récurrence :

1) Le terme initial vaut 1. Un terme est égal à 1 auquel on ajoute l'inverse du terme précédent.

2) Le terme initial vaut 100. Un terme est égal au terme précédent augmenté de 6%.

## EXERCICE 04

Calculez les termes $u_1, u_2, u_3$ dans les suites suivantes :

a) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - 3{u_n}^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2 - u_n}{3 + u_n} \end{cases}$

EXERCICE 05

Étudiez les variations des suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$ (on étudiera les variations de la fonction sous-jacente) et étudier leur comportement quand *n* tend vers l'infini.

$$a_n = 4 - 5n \qquad b_n = 2n^2 + 1 \qquad c_n = \frac{3n}{n+1}$$

EXERCICE 06

Étudiez les variations des suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$ (on étudiera la différence ou le quotient de 2 termes consécutifs).

$$u_n = 3n^2 - n \qquad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = v_n + 2n + 1 \end{cases} \qquad w_n = \frac{1}{5^n}$$

EXERCICE 07

Vrai ou faux ?

Soit une suite $u$ définie sur $\mathbb{N}$ tel que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $-1 \leq u_n \leq 1$.

a) La suite $u$ est minorée par 1. ..........................

b) La suite $u$ est bornée. ..........................

c) La suite $u$ admet une limite comprise entre -1 et 1. ..........................

d) La suite $u$ est croissante. ..........................

e) Tout nombre inférieur à -1 est un minorant de la suite $u$. ..........................

f) La suite peut admettre une limite infinie. ..........................

EXERCICE 08

Soit une suite $u$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{2n} - 9$

1) Déterminez son sens de variation.

2) Déterminez le seuil pour lequel : $u_n \geq 10$

3) Vérifiez le résultat avec Python.

EXERCICE 09

**Optimiser un programme.**

On considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$

1. Écrivez une fonction Python **terme(n)** permettant de calculer $u_n$ (*n* entré par l'utilisateur).

2. Utilisez cette fonction pour écrire les 3 fonctions suivantes :

   a) Écrivez une fonction Python **seuil(A)** permettant de trouver le plus petit indice *p* tel que $u_p > A$.

   b) Écrivez e une fonction Python **somme(N)** permettant de calculer la somme des *N* premiers termes de la suite.

c) Écrivez une fonction Python **liste(N)** permettant de donner la liste des *N* premiers termes de la suite.

3. Écrivez une fonction Python **liste2(N)** permettant de donner la liste des *N* premiers termes de la suite sans utiliser la fonction **terme(n).**

4. Commentez les 2 programmations.

## EXERCICE 10

Une **suite de Syracuse** une suite d'entiers naturels définie de la manière suivante : on part d'un nombre entier plus grand que zéro ; s'il est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. En répétant l'opération, on obtient une suite d'entiers positifs

Par exemple, à partir de 14, on construit la suite des nombres : 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2… C'est ce qu'on appelle la suite de Syracuse du nombre 14.

Une fois que le nombre 1 a été atteint, la suite des valeurs (1,4,2) se répète indéfiniment.

La **conjecture de Syracuse** est l'hypothèse selon laquelle toute suite de Syracuse atteint 1. Mais elle n'a jamais été démontrée.

1. Écrivez une fonction Python Syracuse(A) qui revoie les 100 premiers termes de la suite de Syracuse du nombre A. Testez pour A = 983.

2. Testez la fonction pour des nombres pas trop grands.

# SUITES ET PYTHON

Les méthodes sont parfois différentes entre les suites explicites et les suites définies par récurrence (étude des variations, représentation graphique…). Il est dont important de bien savoir dès le départ si vous êtres dans un cas ou dans l'autre.

Un exercice sur les suites comporte généralement des questions **Python**. Il faut en particulier bien distinguer les fonctions **donnant le calcul des termes et celles donnant un seuil**.

Quelques indices pour cela :

- On retourne une **liste** et/ou on a une boucle **for** ? il s'agit certainement du calcul de termes.
- On retourne un **indice** et/ou on a une boucle **while** ? il s'agit certainement du calcul d'un seuil.

Un exercice type bac se situe à l'issue du 3ème chapitre de ce module.