# COURS PI

☆ L'école sur-mesure ☆

de la Maternelle au Bac, Établissement d'enseignement privé à distance, déclaré auprès du Rectorat de Paris

**Première - Module 4 - Géométrie**

# Mathématiques

v.5.1

- **Guide de méthodologie**
  *pour appréhender notre pédagogie*
- **Leçons détaillées**
  *pour apprendre les notions en jeu*
- **Exemples et illustrations**
  *pour comprendre par soi-même*
- **Prolongement numérique**
  *pour être acteur et aller + loin*
- **Exercices d'application**
  *pour s'entraîner encore et encore*
- **Corrigés des exercices**
  *pour vérifier ses acquis*


www.cours-pi.com

Paris & Montpellier

# EN ROUTE VERS LE BACCALAURÉAT

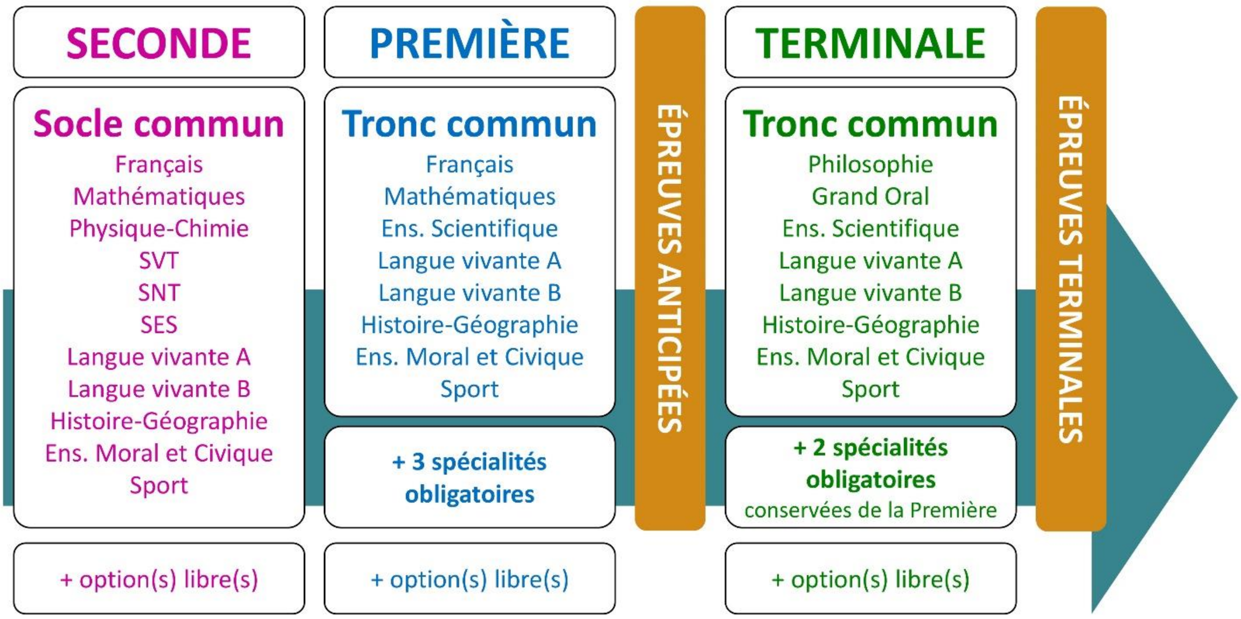
Comme vous le savez, **la réforme du Baccalauréat** est entrée en vigueur progressivement jusqu'à l'année 2021, date de délivrance des premiers diplômes de la nouvelle formule.

Dans le cadre de ce nouveau Baccalauréat, **notre Etablissement**, toujours attentif aux conséquences des réformes pour les élèves, s'est emparé de la question avec force **énergie** et **conviction** pendant plusieurs mois, animé par le souci constant de la réussite de nos lycéens dans leurs apprentissages d'une part, et par la **pérennité** de leur parcours d'autre part. Notre Etablissement a questionné la réforme, mobilisé l'ensemble de son atelier pédagogique, et déployé tout **son savoir-faire** afin de vous proposer un enseignement tourné continuellement vers l'**excellence**, ainsi qu'une scolarité tournée vers la **réussite**.

- Les **Cours Pi** s'engagent pour faire du parcours de chacun de ses élèves un **tremplin vers l'avenir**.
- Les **Cours Pi** s'engagent pour ne pas faire de ce nouveau Bac un diplôme au rabais.
- Les **Cours Pi** vous offrent **écoute** et **conseil** pour coconstruire une **scolarité sur-mesure**.

# LE BAC DANS LES GRANDES LIGNES

Ce nouveau Lycée, c'est un enseignement à la carte organisé à partir d'un large tronc commun en classe de Seconde et évoluant vers un parcours des plus spécialisés année après année.




## CE QUI A CHANGÉ

- Il n'y a plus de séries à proprement parler.
- Les élèves choisissent des spécialités : trois disciplines en classe de Première ; puis n'en conservent que deux en Terminale.
- Une nouvelle épreuve en fin de Terminale : le Grand Oral.
- Pour les lycéens en présentiel l'examen est un mix de contrôle continu et d'examen final laissant envisager un diplôme à plusieurs vitesses.
- Pour nos élèves, qui passeront les épreuves sur table, le Baccalauréat conserve sa valeur.

## CE QUI N'A PAS CHANGÉ

- Le Bac reste un examen accessible aux candidats libres avec examen final.
- Le système actuel de mentions est maintenu.
- Les épreuves anticipées de français, écrit et oral, tout comme celle de spécialité abandonnée se dérouleront comme aujourd'hui en fin de Première.

**A l'occasion de la réforme du Lycée, nos manuels ont été retravaillés dans notre atelier pédagogique pour un accompagnement optimal à la compréhension. Sur la base des programmes officiels, nous avons choisi de créer de nombreuses rubriques :**

- **Suggestions de lecture** pour s'ouvrir à la découverte de livres de choix sur la matière ou le sujet
- **L'essentiel** et **le temps du bilan** pour souligner les points de cours à mémoriser au cours de l'année
- **À vous de jouer** pour mettre en pratique le raisonnement vu dans le cours et s'accaparer les ressorts de l'analyse, de la logique, de l'argumentation, et de la justification
- Et enfin ... la rubrique **Les Clés du Bac by Cours Pi** qui vise à vous donner, et ce dès la seconde, toutes les cartes pour réussir votre examen : notions essentielles, méthodologie pas à pas, exercices types et fiches étape de résolution !

# MATHÉMATIQUES PREMIÈRE

## Module 4 – Géométrie

## L'AUTEURE

**Sylvie LAMY**

« Faire des maths c'est jouer aux legos. Il s'agit d'assembler des briques pour solutionner des problèmes ». Diplômée de l'Ecole Polytechnique et agrégée de Mathématiques, elle poursuit aujourd'hui son parcours professionnel à l'Institut Géographique National et au Ministère des Transports comme chargée de mission sur les projets spatiaux. Passionnée par les sciences physiques, son approche pédagogique réside dans la transmission du raisonnement scientifique. Elle attend de ses élèves de comprendre et d'expliciter leur démarche dans la résolution des problèmes.

## PRÉSENTATION

Ce **cours** est divisé en chapitres, chacun comprenant :

- Le **cours**, conforme aux programmes de l'Education Nationale
- Des **exercices d'application et d'entraînement**
- Les **corrigés** de ces exercices
- Des **devoirs** soumis à correction (et ***se trouvant hors manuel***). Votre professeur vous renverra le corrigé-type de chaque devoir après correction de ce dernier.

Pour une manipulation plus facile, les corrigés-types des exercices d'application et d'entraînement sont regroupés en fin de manuel.

## CONSEILS A L'ÉLÈVE

Vous disposez d'un support de Cours complet : **prenez le temps** de bien le lire, de le comprendre mais surtout de l'**assimiler**. Vous disposez pour cela d'exemples donnés dans le cours et d'exercices types corrigés.
Vous pouvez rester un peu plus longtemps sur une unité mais travaillez régulièrement.

## LES FOURNITURES

Vous devez posséder :

- une **calculatrice graphique pour l'enseignement scientifique au Lycée comportant un mode examen (requis pour l'épreuve du baccalauréat).**
- un **tableur** comme Excel de Microsoft (payant) ou Calc d'Open Office (gratuit et à télécharger sur http://fr.openoffice.org/). En effet, certains exercices seront faits de préférence en utilisant un de ces logiciels, mais vous pourrez également utiliser la calculatrice).

## LES DEVOIRS

Les devoirs constituent le moyen d'évaluer l'acquisition de vos *savoirs* (« Ai-je assimilé les notions correspondantes ? ») et de vos *savoir-faire* (« Est-ce que je sais expliquer, justifier, conclure ? »).

Placés à des endroits clés des apprentissages, ils permettent la vérification de la bonne assimilation des enseignements.

Aux *Cours Pi*, vous serez accompagnés par un professeur selon chaque matière tout au long de votre année d'étude. Référez-vous à votre « Carnet de Route » pour l'identifier et découvrir son parcours.
Avant de vous lancer dans un devoir, assurez-vous d'avoir **bien compris les consignes**.
**Si vous repérez des difficultés lors de sa réalisation**, n'hésitez pas à le mettre de côté et à revenir sur les leçons posant problème. **Le devoir n'est pas un examen**, il a pour objectif de s'assurer que, même quelques jours ou semaines après son étude, une notion est toujours comprise.
**Aux *Cours Pi*, chaque élève travaille à son rythme, parce que chaque élève est différent et que ce mode d'enseignement permet le « sur-mesure ».**
Nous vous engageons à respecter le moment indiqué pour faire les devoirs. Vous les identifierez par le bandeau suivant :

Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le devoir n°1

Il est **important de tenir compte des remarques, appréciations et conseils du professeur-correcteur**. Pour cela, il est **très important d'envoyer les devoirs au fur et à mesure** et non groupés. **C'est ainsi que vous progresserez !**

**Donc, dès qu'un devoir est rédigé**, envoyez-le aux *Cours Pi* par le biais que vous avez choisi :

1) Par **soumission en ligne** via votre espace personnel sur **PoulPi**, pour un envoi **gratuit**, **sécurisé** et plus **rapide**.
2) Par **voie postale** à *Cours Pi*, 9 rue Rebuffy, 34 000 Montpellier
   *Vous prendrez alors soin de joindre une **grande enveloppe** **libellée à vos nom et adresse**, et **affranchie** **au tarif en vigueur** pour qu'il vous soit retourné par votre professeur*

***N.B. :*** *quel que soit le mode d'envoi choisi, vous veillerez à **toujours joindre l'énoncé du devoir ;** plusieurs énoncés étant disponibles pour le même devoir.*
***N.B. :*** *si vous avez opté pour un envoi par voie postale et que vous avez à disposition un scanner, nous vous engageons à conserver une copie numérique du devoir envoyé. Les pertes de courrier par la Poste française sont très rares, mais sont toujours source de grand mécontentement pour l'élève voulant constater les fruits de son travail.*

# SOUTIEN ET DISPONIBILITÉ

## VOTRE RESPONSABLE PÉDAGOGIQUE

Professeur des écoles, professeur de français, professeur de maths, professeur de langues : notre Direction Pédagogique est constituée de spécialistes capables de dissiper toute incompréhension.

Au-delà de cet accompagnement ponctuel, notre Etablissement a positionné ses Responsables pédagogiques comme des « super profs » capables de co-construire avec vous une scolarité sur-mesure.
En somme, le Responsable pédagogique est votre premier point de contact identifié, à même de vous guider et de répondre à vos différents questionnements.

Votre Responsable pédagogique est la personne en charge du suivi de la scolarité des élèves.
Il est tout naturellement votre premier référent : une question, un doute, une incompréhension ? Votre Responsable pédagogique est là pour vous écouter et vous orienter. Autant que nécessaire et sans aucun surcoût.

| | |
|---|---|
| QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ? | Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi. |
| QUEL EST SON RÔLE ? | Orienter les parents et les élèves.<br>Proposer la mise en place d'un accompagnement individualisé de l'élève.<br>Faire évoluer les outils pédagogiques.<br>Encadrer et coordonner les différents professeurs. |

## VOS PROFESSEURS CORRECTEURS

Notre Etablissement a choisi de s'entourer de professeurs diplômés et expérimentés, parce qu'eux seuls ont une parfaite connaissance de ce qu'est un élève et parce qu'eux seuls maîtrisent les attendus de leur discipline. En lien direct avec votre Responsable pédagogique, ils prendront en compte les spécificités de l'élève dans leur correction. Volontairement bienveillants, leur correction sera néanmoins juste, pour mieux progresser.

| | |
|---|---|
| QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ? | Une question sur sa correction ?<br>• faites un mail ou téléphonez à votre correcteur et demandez-lui d'être recontacté en lui laissant un message avec votre nom, celui de votre enfant et votre numéro.<br>• autrement pour une réponse en temps réel, appelez votre Responsable pédagogique. |

## LE BUREAU DE LA SCOLARITÉ

Placé sous la direction d'Elena COZZANI, le Bureau de la Scolarité vous orientera et vous guidera dans vos démarches administratives. En connaissance parfaite du fonctionnement de l'Etablissement, ces référents administratifs sauront solutionner vos problématiques et, au besoin, vous rediriger vers le bon interlocuteur.

| | |
|---|---|
| QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ? | Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.<br>04.67.34.03.00<br>scolarite@cours-pi.com |

# LE SOMMAIRE

Mathématiques – Module 4 – Géométrie



COMPÉTENCES VISÉES

- Cercle trigonométrique. Longueur d'arc. Radian.
- Enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique. Image d'un nombre réel.
- Cosinus et sinus d'un nombre réel. Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle. Valeurs remarquables.



COMPÉTENCES VISÉES

- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans le plan ou dans l'espace.
- En vue de la résolution d'un problème, calculer le produit scalaire de deux vecteurs en choisissant une méthode adaptée (en utilisant la projection orthogonale, à l'aide des coordonnées, à l'aide des normes et d'un angle, à l'aide de normes).
- Utiliser le produit scalaire pour résoudre un problème géométrique.

**COMPÉTENCES VISÉES**

- Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur normal.
- Déterminer un vecteur normal à une droite.
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite.
- Déterminer l'équation d'un cercle connaissant son centre et son rayon, ou son diamètre.
- Reconnaître une équation de cercle en déterminant centre et rayon.

# SUGGESTIONS CULTURELLES

## ESSAIS

- **Les maths c'est magique !** *Johnny Ball*
- **La grande aventure des nombres et du calcul** *Jason Lapeyronnie*
- **17 Équations qui ont changé le monde** *Ian Stewart*
- **Alex au pays des chiffres** *Alex Bellos*
- **Le grand roman des maths : de la préhistoire à nos jours** *Mickael Launay*
- **Histoire universelle des chiffres : L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul** *Georges Ifrah*
- **Le démon des maths** *Hans Magnus Enzensberger*
- **A propos de rien : une histoire du zéro** *Robert Kaplan*

## BANDES-DESSINÉES

- **Logicomix** *Doxiádis / Papadátos / Papadimitríou*
- **Les maths en BD 1 et 2** *Larry Gonick*

## DOCUMENTAIRES AUDIOVISUELS

- **L'extraordinaire aventure du chiffre 1** *Terry Jones*
- **Voyage au pays des maths** *Arte*

## PODCASTS

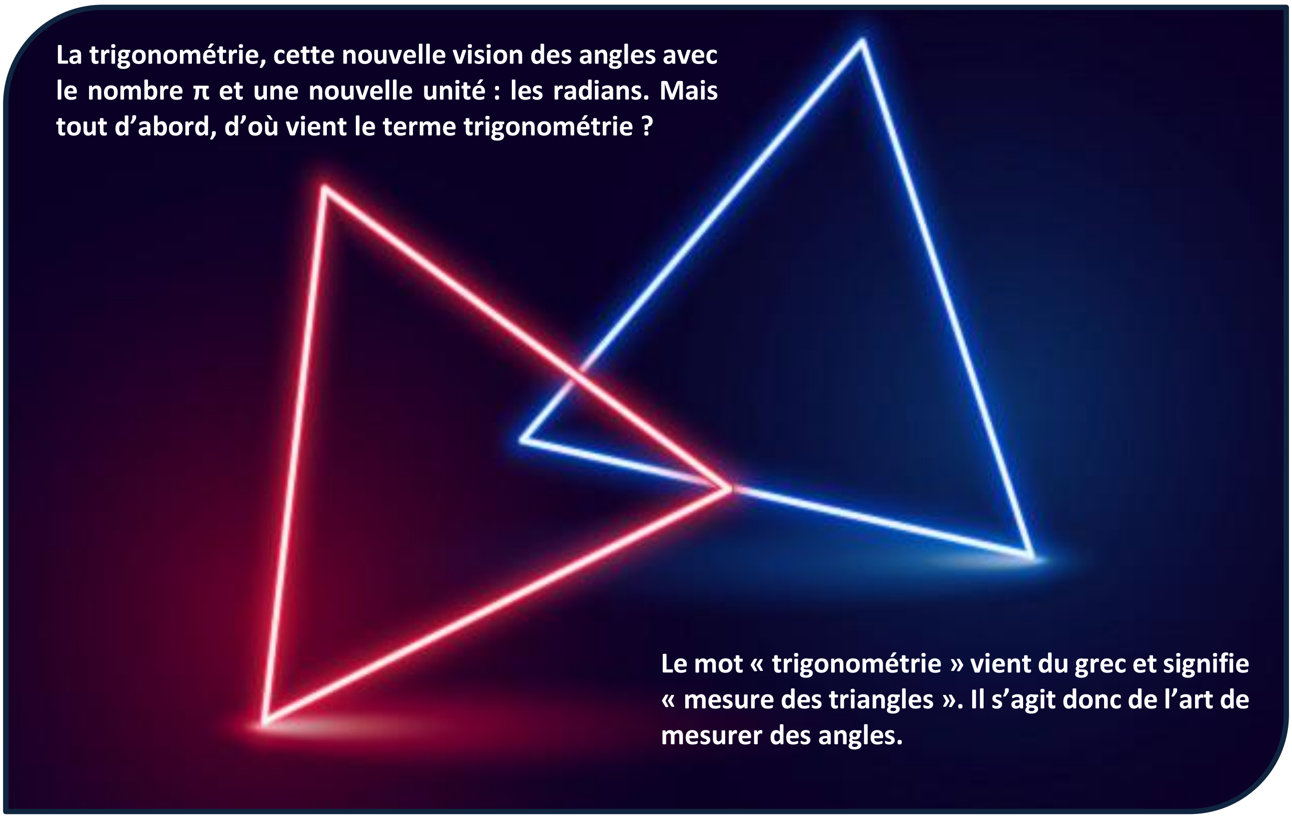
- **L'oreille mathématiques** *Podcast de la Maison Poincarré*
- **Maths en tête** *toutes plateformes*

## YOUTUBE

- **Chaîne YouTube Maths et Tiques** *Yvan Monka*
- **Chaîne YouTube Micmaths** *Mickaël Launay*
- **Chaîne YouTube de la Maison des mathématiques et de l'informatique**
- **Chaîne YouTube Automaths** *Jason Lapeyronnie*

# Le Cours

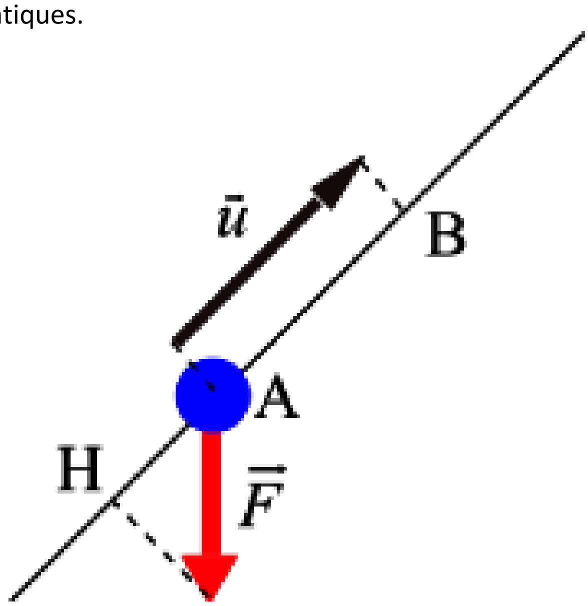
# INTRODUCTION




C'est l'astronome grec Hipparque qui deux siècles avant JC, a créé la trigonométrie en calculant les premières tables trigonométriques (calculs de sinus, cosinus et tangente d'un angle). Cet outil lui a notamment permis de mesurer le rapport des distances entre la Terre, la Lune et le Soleil.

Cette notion va ensuite nous permettre d'utiliser le produit scalaire tant utilisé par Descartes et surtout Galilée dans le domaine de la physique.

Ce module va donc permettre de marcher dans les pas de ces illustres scientifiques et de découvrir cette nouvelle vision des mathématiques.




Application du produit scalaire - Travail d'une force (source wikipedia)

# TRIGONOMÉTRIE, ANGLES EN RADIANS

Dans ce chapitre, vous allez revoir la trigonométrie et découvrir une unité de mesure d'angles très importante : le radian. Par la suite, de nouvelles définitions du sinus et du cosinus vont vous être apportées. Enfin seront étudiés les angles associés et les équations et inéquations trigonométriques.

## *COMPÉTENCES VISÉES*

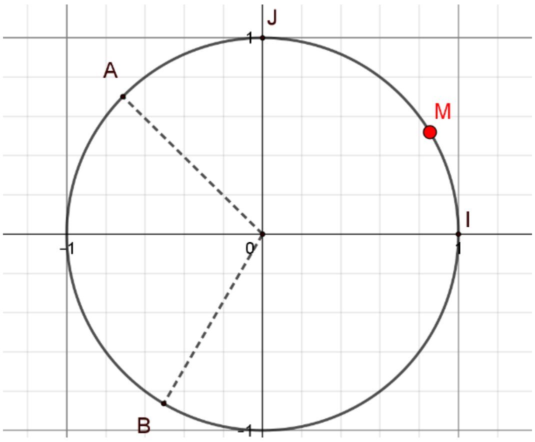
- Cercle trigonométrique. Longueur d'arc. Radian.
- Enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique. Image d'un nombre réel.
- Cosinus et sinus d'un nombre réel. Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle. Valeurs remarquables.

## *PRÉREQUIS*

- Sinus et cosinus d'un angle.

## ACTIVITÉ

Un point M peut se déplacer sur le cercle, soit dans le sens anti-horaire appelé sens direct, soit dans le sens horaire appelé sens indirect.




Le point M part de I dans le sens direct.

**1.** Indiquer le sens de parcours sur le schéma ci-dessus.

**2.** Quel est le périmètre du cercle ? ..........

**3.** Quelle distance a parcouru M :

**a.** Quand il repasse la première fois au point I ? ............
Pour la seconde fois ? .............

**b.** Quand il passe la première fois au point J ? ...............
Pour la seconde fois ? .................

**c.** Quand il passe la première fois au point B ? ................
Pour la seconde fois ? ....................

La longueur parcourue est appelée angle en radians.

**4.** Le point M a parcouru $\frac{27\pi}{4}$ .

**a.** Faire la division euclidienne de 27 par 4, puis compléter :

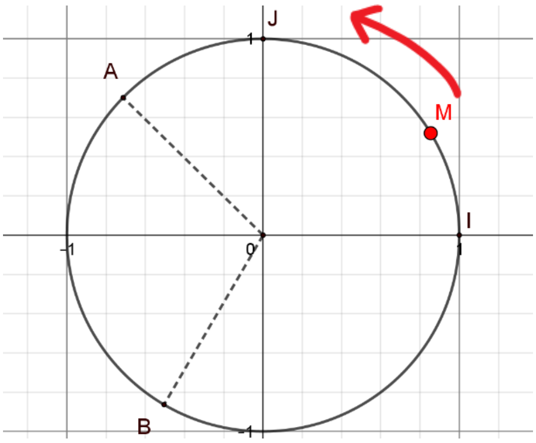
$$\frac{27\pi}{4} = \text{...........}\pi + \frac{\text{.....}\pi}{\text{.......}}$$

**b.** Le point M a donc parcouru ............... tours complets puis a parcouru ................., soit les ......... du demi-cercle.

**c.** Il se retrouve donc au point ..............

## SOLUTIONS DE L'ACTIVITÉ

**1.**




**2.** Quel est le périmètre du cercle ? $2\pi$

**3.** Quelle distance a parcouru M :

**a.** Quand il repasse la première fois au point I ? $2\pi$
Pour la seconde fois ? $4\pi$

**b.** Quand il passe la première fois au point J ? $\frac{\pi}{2}$

Pour la seconde fois ? $\frac{\pi}{2} + 2\pi$

**c.** Quand il passe la première fois au point B ? $\frac{4\pi}{3}$

Pour la seconde fois ? $\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$

**4.** Le point M a parcouru $\frac{27\pi}{4}$ .

**a.** Faire la division euclidienne de 27 par 4, puis compléter :
$\frac{27\pi}{4} = 6\pi + \frac{3\pi}{4}$

**b.** Le point M a donc parcouru **3** tours complets puis a parcouru $\frac{3\pi}{4}$, soit les ¾ du demi-cercle.

**c.** Il se retrouve donc au point A.

# 01 TRIGONOMÉTRIE, ANGLES EN RADIANS
## Cercle trigonométrique, enroulement de la droite

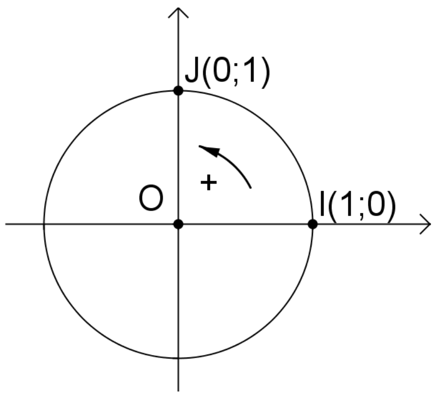
## Cercle trigonométrique

### L'ESSENTIEL

Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on a choisi comme sens de parcours le sens inverse à celui des aiguilles d'une montre.

Ce sens est appelé **sens direct** ou **sens trigonométrique** ou sens anti-horaire.
Le sens contraire est appelé **sens rétrograde** ou **indirect** ou horaire.

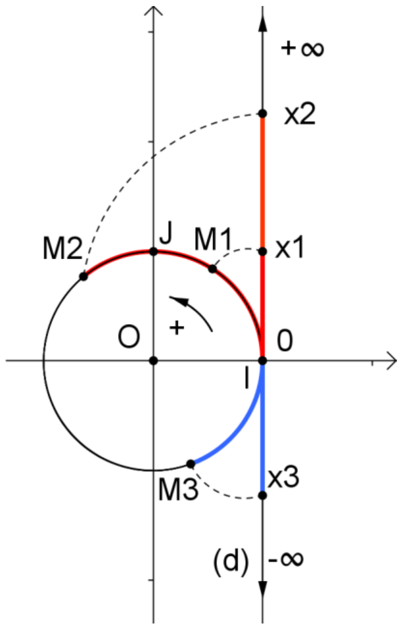
Voir schéma à la page suivante.




## Enroulement de la droite numérique

On reprend les notations du cercle trigonométrique.

On considère la droite graduée *d* tangente au cercle trigonométrique en I, le point d'abscisse 0 de la droite graduée étant confondu avec I. On enroule la demi-droite correspondant aux abscisses positives dans le sens direct, et la demi-droite correspondant aux abscisses négatives dans le sens indirect (ou sens rétrograde).




On peut alors faire correspondre à chaque abscisse de la droite graduée un point image M du cercle trigonométrique.

- Le périmètre du cercle trigonométrique vaut $2\pi$.
  Par conséquent, lorsqu'on a fait un tour du cercle, on retombe sur le point I. L'image des réels $0, 2\pi, 4\pi, .....$ et des réels $-2\pi, -4\pi, .....$ est donc I.

- Plus généralement si M est l'image d'un réel *x*, alors, il est aussi l'image des points $x+2\pi, x+4\pi, .......$ et $x-2\pi, x-4\pi, ....$

**Exemples :**

J est l'image de $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2\pi=\frac{5\pi}{2}, ...$ mais également en enroulant la droite dans le sens rétrograde de $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}-2\pi=-\frac{7\pi}{2}, ....$ .

## 02 TRIGONOMÉTRIE, ANGLES EN RADIANS

### Une nouvelle unité : le radian

Le périmètre du cercle vaut 2π. Donc la longueur de $\overset{\frown}{IJ}$ vaut $\frac{\pi}{2}$ , ce qui correspond à un angle de 90°. Par construction, *x* est la longueur de l'arc OM. La longueur de l'arc de cercle est proportionnelle à l'angle IOM

| | | |
|---|---|---|
| angle en degrés | $d$ | 90 |
| angle en radians | $x$ | $\frac{\pi}{2}$ |

$$d=\frac{90}{\frac{\pi}{2}}x=\frac{180}{\pi}x \quad \text{ou} \quad x=\frac{\pi}{180}d$$

On admet que l'on peut généraliser à tous les angles géométriques. On a donc défini une nouvelle unité d'angle appelée radian (symbole : rad).

## L'ESSENTIEL

1 rad est la mesure de l'angle géométrique interceptant un arc de cercle de longueur 1 sur le cercle trigonométrique.

**1 rad≈57,3°**

Les correspondances suivantes doivent être connues par cœur !

| Angle en degrés | 0 | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| Angle en radians | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |

On peut en déduire directement certaines mesures :

**Exemples :**

$$15° = \frac{30°}{2} \text{ donc } 15° \to \frac{\pi}{12}$$

## À VOUS DE JOUER 1

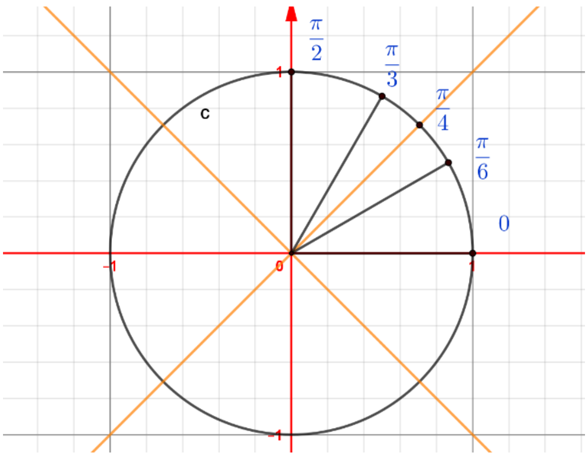
Compléter :

$$135° = 90° + \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{\pi}{24} = \frac{\frac{\pi}{6}}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \qquad 75° = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad 120° = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Compléter le tableau :

| Angle en degrés | 135° | .......... | 75° | 120° |
|---|---|---|---|---|
| Angle en radians | ......... | $\frac{\pi}{24}$ | ............. | ................... |

Placer les images de réels par enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique. Il faut placer le point qui correspond à l'angle géométrique en degrés, en tenant compte du sens. On a placé ci-dessous les angles remarquables dans le premier quadrant.

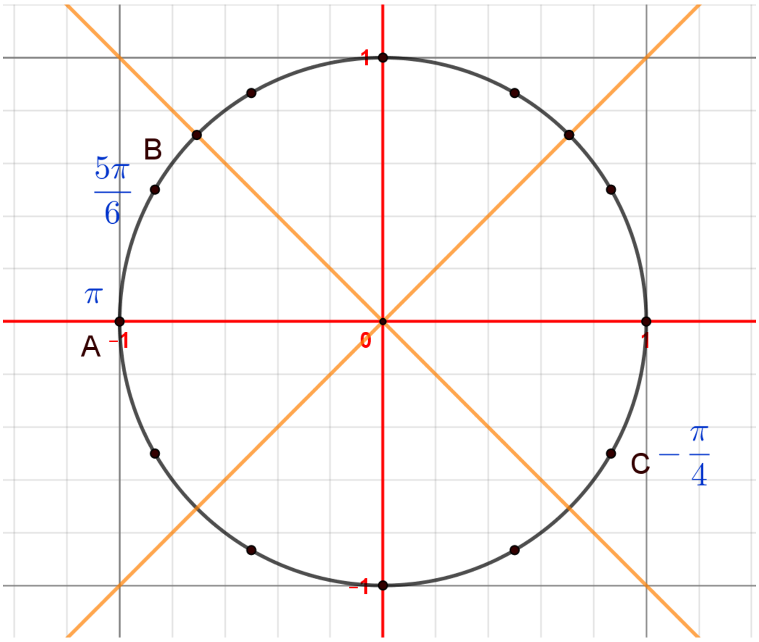


**Exemples :**

On veut placer les points A, B, C et D images respectives de : $a=\pi$ $\quad b=\dfrac{5\pi}{6}$ $\quad c=-\dfrac{\pi}{4}$

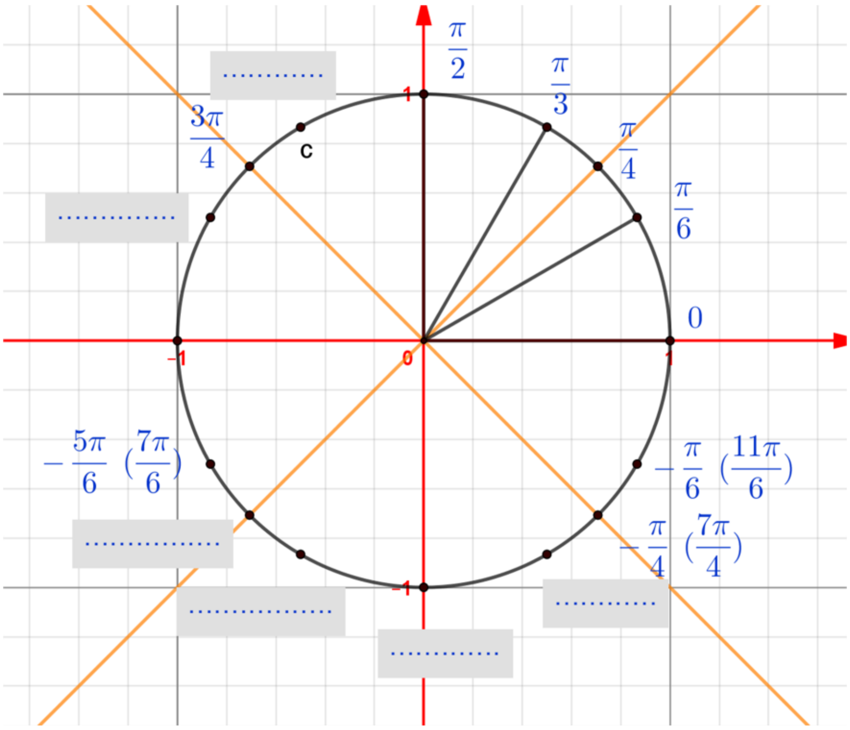
- π correspond à 180° (angle plat) . On place A.
- $b=\dfrac{5\pi}{6}$ soit $150°$, ou encore $180°-30°$

  On peut également remarquer que : $b=\pi-\dfrac{\pi}{6}$
- $c=-\dfrac{\pi}{4}$ Il faut donc partir dans le sens rétrograde pour un arc correspondant à 45°.




**À VOUS DE JOUER 2**

Pour les quadrants du bas, on mettra les valeurs dans $]-\pi;\pi]$ et $[0;2\pi[$.



## L'ESSENTIEL

Méthode générale pour trouver le point image des angles positifs de type $\frac{a\pi}{b}$

On essaie de se ramener à un angle de l'intervalle ]-**π**;**π**]

- on fait la division euclidienne de $a$ par $b$ : $a = bq + r$
- -si $q$ est pair : on place $\frac{r\pi}{b}$
- -si $q$ est impair : on place $\frac{r\pi}{b} - \pi$

Pour un angle négatif, on calcule l'angle positif correspondant et on prend l'opposé. Remarque : ce n'est pas toujours la méthode la plus rapide, mais elle a l'avantage d'être systématique.

Pour un angle négatif, on calcule l'angle positif correspondant et on prend l'opposé.
Remarque : ce n'est pas toujours la méthode la plus rapide, mais elle a l'avantage d'être systématique.

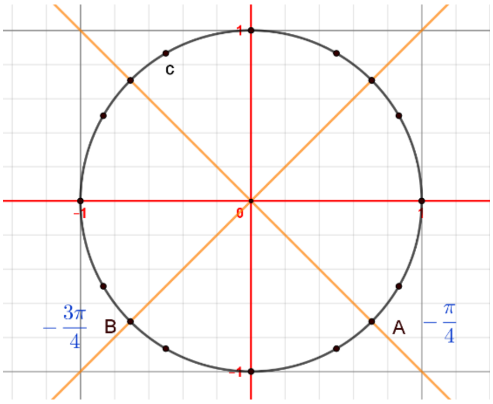
**Exemples :**

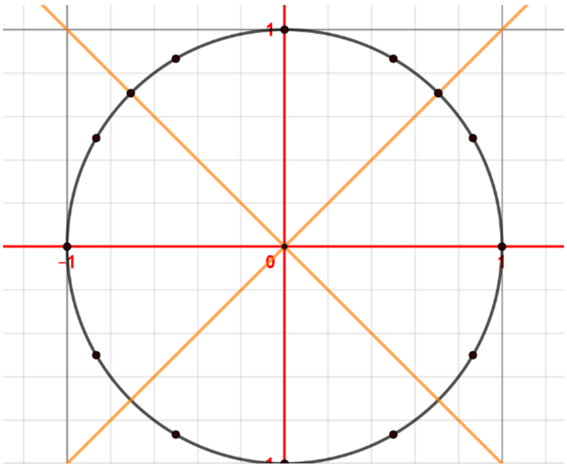
On veut placer le point A image de : $a = \frac{55\pi}{4}$

$55 = 13 \times 4 + 3 \quad a = 13\pi + \frac{3\pi}{4} \qquad a' = \frac{3\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4}$

On veut placer le point B image de : $b = -\frac{59\pi}{4}$

$59 = 14 \times 4 + 3 \quad b = -(14\pi + \frac{3\pi}{4}) \qquad b' = -\frac{3\pi}{4}$




1. On veut placer le point A image de : $a = \frac{43\pi}{6}$

   $43 = \ldots\ldots \times 6 + 1 \quad a = \ldots\ldots\ldots\pi + \frac{\pi}{6} \qquad a' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. On veut placer le point B image de : $b = -\frac{35\pi}{3}$

   $35 = \ldots\ldots\ldots\ldots \times 3 + 2 \quad b = -(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \qquad b' = -(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

   Autre méthode : on ajoute 12π à $b$.

   $-\frac{35\pi}{3} + 12\pi = \ldots\ldots\ldots\ldots$

## L'ESSENTIEL

Parmi les points donnant la même image par enroulement de la droite, un seul appartient à l'intervalle . On l'appelle **mesure principale** de l'angle.

# 03 TRIGONOMÉTRIE, ANGLES EN RADIANS

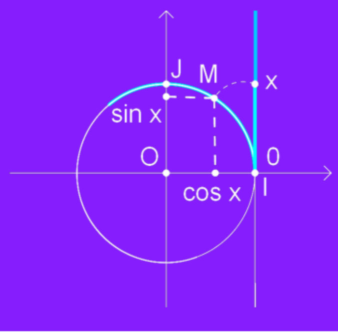
## Cosinus et sinus d'un nombre réel

### Nouvelle définition du cosinus et du sinus

## L'ESSENTIEL

Soit $x$ un nombre réel et M son image par l'enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique.

- L'abscisse de M est appelée **cosinus** du réel $x$. Elle est notée $\cos x$.
- L'ordonnée de M est appelée **sinus** du réel $x$. Elle est notée $\sin x$.




➢ **Notation :** $(\cos x)^2 = \cos^2 x$ et $(\sin x)^2 = \sin^2 x$

## L'ESSENTIEL

Pour tout réel $x$ :

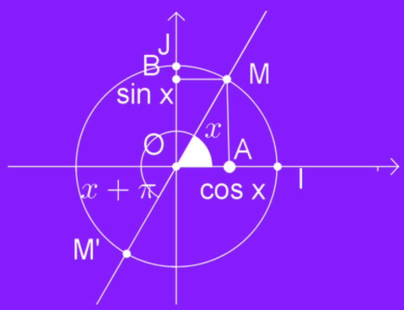
**(1)** $-1 \leq \cos x \leq 1$

**(2)** $-1 \leq \sin x \leq 1$

**(3)** $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

**(4)** $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

**(5)** $\sin(x + 2\pi) = \sin x$




**Justifications :**

Les images d'un réel par enroulement de la droite sont sur le cercle trigonométrique. Leurs abscisses et ordonnées sont donc comprises entre −1 et 1. On en déduit les inégalités (1) et (2).

Le triangle OAB est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore :

$$OM^2 = OA^2 + AM^2 = OA^2 + OB^2$$

Avec : $OM = 1$ (rayon du cercle trigonométrique), $OA = \cos x, OB = \sin x$

On en déduit l'égalité (3).

Les égalités (4) et (5) sont issues de la remarque faite au paragraphe précédent.

## À VOUS DE JOUER 4

**1.** Le sinus d'un angle se lit sur l'axe des ....................................
Le cosinus d'un angle se lit sur l'axe des ...................................

**2.** Réécrivez en fonction de $\sin x$ ou $\cos x$ .

$\sin(x+2\pi) =$ .................

$\cos(x-4\pi) =$ ......................

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1......................) =$ .................................

## Lien avec les cosinus et sinus au collège

Pour $x$ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, le point image est sur l'arc $\widehat{IJ}$.

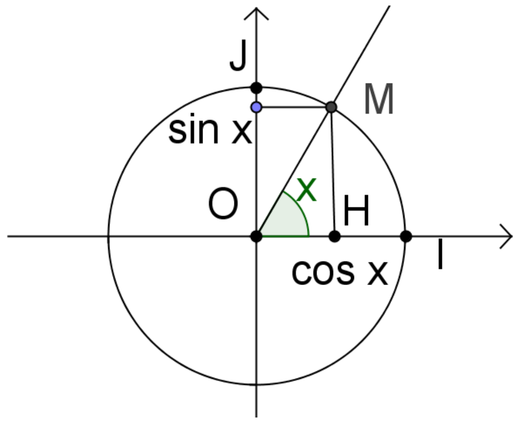
Ses coordonnées sont $M(\cos x ; \sin x)$.

$x$ est également l'angle en radian de $\widehat{IOM}$.

Dans les triangles OHM et OH'M, on a par conséquent :

$$\cos(\widehat{HOM}) = \frac{\textit{côté adjacent}}{\textit{hypoténuse}} = \frac{OH}{OM} = \frac{\cos x}{1} = \cos x$$

$$\sin(\widehat{HOM}) = \frac{\textit{côté opposé}}{\textit{hypoténuse}} = \frac{OH}{OM} = \frac{\sin x}{1} = \sin x$$




➢ Si $x$ correspond à l'angle géométrique $\widehat{HOM}$, les angles $x+2k\pi$ (pour $k$ dans $\mathbb{Z}$) correspondent au même angle géométrique.

## Valeurs particulières d'angles et de leur cosinus et sinus

**Ces valeurs doivent être connues par cœur.**

| Angle en degrés | 0 | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| Angle en radians | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |

Les justifications font l'objet d'exercices.

➢ Sur une calculatrice, il faut toujours vérifier si les fonctions trigonométriques calculent en radians ou en degrés.

## À VOUS DE JOUER 5

Complétez le tableau :

| Angle en degrés | 0 | ……..° | 45° | ……..° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| Angle en radians | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | ……… | …… | ………… |
| $\cos x$ | 1 | ………….. | …….. | ………… | 0 |
| $\sin x$ | ……….. | ……… | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |

# 04 TRIGONOMÉTRIE, ANGLES EN RADIANS

## Angles associés

➢ $t$ est un angle associé à $x$ si $\cos t$ et $\sin t$ s'exprime en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$.

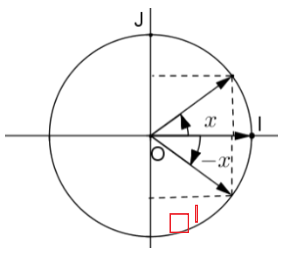
### L'ESSENTIEL

Pour tout réel $x$ :

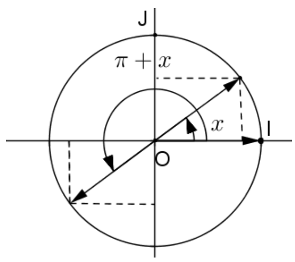
(1) $\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$

(2) $\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$

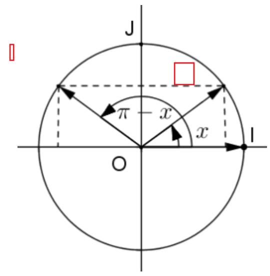
$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$




$\cos(-x) = \cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$




$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(\pi + x) = -\sin x$




$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$

**Justifications :**

Les égalités (1) sont issues de la symétrie par rapport à l'axe des abscisses de M et M'. Les égalités (2) sont issues de la symétrie par rapport à O de M et M'.

Egalités (3) :

$\cos(\pi - x) = \cos(-(\pi - x)) = \cos(x - \pi) = \cos(x - \pi + 2\pi) = \cos(x + \pi) = -\cos x$

$\sin(\pi - x) = \sin(-(\pi - x)) = -\sin(x - \pi) = -\sin(x - \pi + 2\pi) = -\sin(x + \pi) = \sin x$

➢ Quelques petits repères : ajouter ou soustraire un multiple de $\pi$ conserve le cosinus et le sinus en changeant éventuellement de signe.

Ces formules permettent de simplifier des expressions et de trouver la valeur du sinus et du cosinus d'angles remarquables.

**Exemples :**

Simplifier : $\cos(x-\pi)+\cos(x+3\pi)$

$\cos(x-\pi)+\cos(x+3\pi)=-\cos x+\cos(x+\pi)=-\cos x-\cos x=-2\cos x$

$\sin(\pi-x)+\sin(x+3\pi)=\sin x+\sin(x+\pi)=\sin x-\cos x=0$

$\cos(\frac{3\pi}{4})=\cos(\pi-\frac{\pi}{4})=-\cos(-\frac{\pi}{4})=-\cos(\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

### À VOUS DE JOUER 6

Réécrire en fonction de $sin\,x$ ou $cos\,x$ :

$\cos(x+\pi)=$.........................

$\sin(x+2\pi)=$.........................

$\cos(\pi-x)=$...........................

$\sin(x+3\pi)=$.........................

### À VOUS DE JOUER 7

Remplissez mes espaces vide :

$\cos(x+13\pi)+\cos(-x+56\pi)=\cos($...................$)+\cos($....................$)=$.............................. $=0$

$\sin(4\pi-x)+\sin(x+9\pi)=\sin($..................$)+\sin($...................$)=$......................... $=$..................

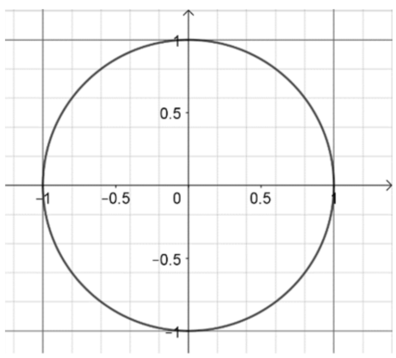
$\sin(\frac{7\pi}{6})=\sin(\pi+$...................$)=-\sin($...................$)=$....................

# 05 TRIGONOMÉTRIE, ANGLES EN RADIANS

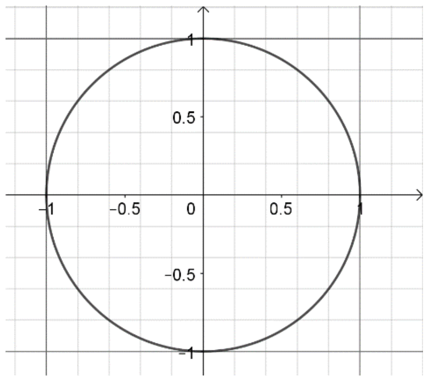
## Équations et inéquations trigonométrique

### A VOUS DE JOUER 8

Aidez-vous des schémas pour répondre :




**1.** Tracez la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$.
En déduire les solutions de l'équation :
$cos\,x=\frac{1}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$



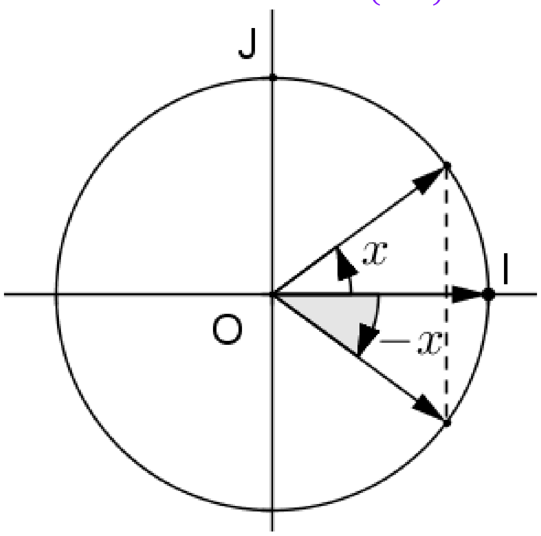

**2.** Tracez la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.
En déduire les solutions de l'équation :
$\sin x = \frac{1}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$

## Résolution des équations simples $cos\ x$ = a ou $\sin x$ = a sur un intervalle d'amplitude 2π

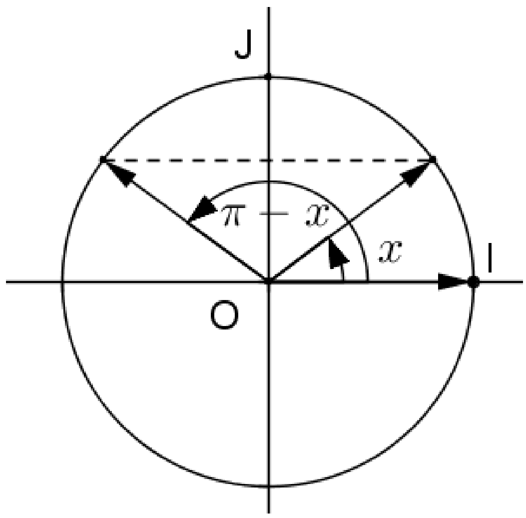
La plupart du temps, les intervalles seront $]-\pi;\pi]$ ou $[0;2\pi[$

On a vu précédemment les formules suivantes :

$$\cos(-x) = \cos x \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$




*x* et – *x* ont le même cosinus




*x* et π– *x* ont le même sinus.

Ces formules vont permettre de résoudre les équations trigonométriques de type : $\cos x = a$ et $\sin x = a$

**L'ESSENTIEL**

Résoudre $\cos x = a$ sur un intervalle d'amplitude 2π

Si : $a \notin [-1;1]$: l'équation n'a pas évidemment de solution.
Si $a \in [-1;1]$, on cherche un angle $\theta$ tel que : $\cos x = \cos\theta$
Les solutions sont $\theta$ et -$\theta$ à 2π près.
On ajoute ou on retranche éventuellement 2π, 4π, … pour être dans le bon intervalle.

➢ On peut s'aider du cercle trigonométrique pour trouver une valeur de θ.

**Exemples :**

1. Résoudre dans $I = ]-\pi;\pi]$ : $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

   $cos\, x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow cos\, x = cos\, \frac{\pi}{4}$ $\quad S = \{\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\}$

2. Résoudre dans $I = [0;2\pi[$ : $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$cos\, x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow cos\, x = cos\, \frac{\pi}{4}$$

$\frac{\pi}{4} \in I$ mais $-\frac{\pi}{4} \notin I$ : on ajoute $2\pi$ à cette solution. $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$ $\quad S = \{\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\}$

## L'ESSENTIEL

Résoudre $sin\, x = a$ sur un intervalle d'amplitude $2\pi$

Si : $a \notin [-1;1]$: l'équation n'a pas évidemment de solution.
Si $a \in [-1;1]$, on cherche un angle $\theta$ tel que : $sin\, x = sin\, \theta$
Les solutions sont $\theta$ et $\pi - \theta$ à $2\pi$ près.
On ajoute ou on retranche éventuellement $2\pi$, $4\pi$, … pour être dans le bon intervalle.

**Exemple :**

Résoudre dans $I = [0;2\pi[$ $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ :

$sin\, x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow sin\, x = sin(-\frac{\pi}{4})$

$-\frac{\pi}{4} \notin I$ on ajoute $2\pi$ à cette solution. $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$

$\pi - (-\frac{\pi}{4}) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ $\quad \frac{5\pi}{4} \in I$

$S = \{\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\}$

Attention : cette méthode ne marche pas pour résoudre une équation de type :

$$cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

## À VOUS DE JOUER 9

Résolvez dans $\boldsymbol{I = [0; 2\pi[}$ $2\, sin\, x = \sqrt{3}$:

$2\, sin\, x = \sqrt{3} \Leftrightarrow sin\, x =$…………….$\Leftrightarrow sin\, x = sin$……………….

$\frac{\pi}{3}$ et $\pi -$……….

=…………….. (sont/ne sont pas) ………………………….. dans $I$.

$S = \{$…………………$\}$

## Résolution des équations $cos a = cos b$ et $sin a = sin b$ sur $\mathbb{R}$

### L'ESSENTIEL

Soient $x$ et $a$ deux réels.

- $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

**Exemples :**

$\sin x = \sin\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{5} + 2k\pi = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\cos 3x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $3x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

### À VOUS DE JOUER 10

Remplissez les espaces vide :

$\cos x = \cos\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow x =$ ............................... ou $x =$ ............................... , $k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos($...........$) \Leftrightarrow x =$ ........................... ou $x =$ ............................ , $k \in \mathbb{Z}$

*La suite de ce chapitre est au programme de Terminale.*

## Résolution des équations $cos a = cos b$ et $sin a = sin b$ sur un intervalle

Il est fréquent de résoudre une équation sur un intervalle, généralement d'amplitude 2π, le plus souvent $]-\pi;\pi]$ ou $[0;2\pi[$.

On doit d'abord résoudre sur R, puis chercher les solutions dans l'intervalle.

**Exemples :**

**1.** Résoudre sur $]-\pi;\pi]$: $\sin x = \sin\frac{\pi}{5}$

On résout d'abord sur R :

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{5} + 2k\pi = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Parmi les solutions de type $x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$ , on cherche celles qui sont dans $]-\pi;\pi]$ .

On teste différentes valeurs de $k$ (on commence généralement par $k=0$ , puis $k=1, k=2, k=-1,...$

Ici seul $k=0$ convient.

De même pour les solutions de type $x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi$ , seul $k=0$ convient.

Donc $S = \{\frac{\pi}{5}; \frac{4\pi}{5}\}$

**2.** Voilà un exemple plus compliqué.

Résoudre sur $]-\pi;\pi]$ : $\sin 3x=\frac{1}{2}$.

On résout d'abord sur R :

$$\sin 3x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin 3x=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } 3x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3} \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

- Parmi les solutions de type $x=\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}$, on cherche celles qui sont dans $]-\pi;\pi]$.

On peut procéder comme précédemment par tâtonnement pour trouver les valeurs de $k$.
On peut également les déterminer de manière rationnelle en cherchant les entiers $k$ tels :

$$-\pi<\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}\leq\pi$$

$$-\pi<\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}\leq\pi\Leftrightarrow -1<\frac{1}{18}+\frac{2k}{3}\leq 1 \Leftrightarrow -1-\frac{1}{18}<\frac{2k}{3}\leq 1-\frac{1}{5}\Leftrightarrow -\frac{19}{18}<\frac{2k}{3}\leq\frac{17}{18} \Leftrightarrow -\frac{57}{36}<k\leq\frac{51}{36}$$

Comme $k$ est entier, les valeurs possibles sont : $-1,0,1$

Ce qui donne comme solutions : $\frac{\pi}{18}-\frac{2\pi}{3}=-\frac{11\pi}{18}$ , $\frac{\pi}{18}$, et $\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}=\frac{13\pi}{18}$

- On fait de même pour les solutions de type :

$$x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}$$

$$-\pi<\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}\leq\pi\Leftrightarrow -1<\frac{5}{18}+\frac{2k}{3}\leq 1 \Leftrightarrow -1-\frac{5}{18}<\frac{2k}{3}\leq 1-\frac{5}{18}\Leftrightarrow -\frac{23}{18}<\frac{2k}{3}\leq\frac{13}{18} \Leftrightarrow -\frac{69}{36}<k\leq\frac{39}{36}$$

Comme $k$ est entier, les valeurs possibles sont : $-1,0,1$

Ce qui donne comme solutions : $\frac{5\pi}{18}-\frac{2\pi}{3}=-\frac{7\pi}{18}$ , $\frac{5\pi}{18}$, et $\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}=\frac{17\pi}{18}$

$S=\{-\frac{11\pi}{18};-\frac{7\pi}{18};\frac{\pi}{18};\frac{5\pi}{18};\frac{13\pi}{18};\frac{17\pi}{18}\}$

## À VOUS DE JOUER 11

Résolvez sur $]-\pi;\pi]$ : $\cos 2x=-\frac{1}{2}$

$\cos 2x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos 2x=\cos$.............. $\Leftrightarrow 2x=$................ ou $x=$....................., $k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=$.................................... ou $x=$.................................. , $k\in\mathbb{Z}$

- Parmi les solutions de type $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$, on cherche celles qui sont dans .................

$k=$......... $\rightarrow$ $x=$........... $k=$.......... $\rightarrow$ $x=$.............

Les autre valeurs de $k$ ne conviennent pas.

- Parmi les solutions de type $x=$....................., on cherche celles qui sont dans ..................

$k=$.......... $\rightarrow$ $x=$............ $k=$......... $\rightarrow$ $x=$.............

Les autre valeurs de $k$ ne conviennent pas.

$S=\{$.......................................$\}$

# Résolution des inéquations trigonométriques sur un intervalle d'amplitude 2

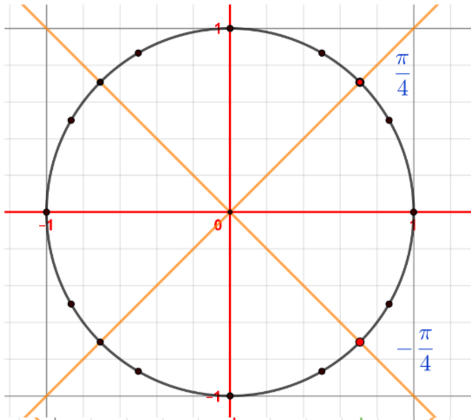
## L'ESSENTIEL

Résoudre $\cos x \leq a$ sur un intervalle *I* d'amplitude 2**π**
Si : $a < -1$: l'équation n'a pas évidemment de solution.
Si : $a > 1$: tout *x* de *I* est solution.
Si $a \in [-1; 1]$,

- **On cherche les angles $\vartheta$ dans *I* tel que : $a = \cos\theta$**
- **Ces angles vont être des bornes de l'ensemble solution. On doit les choisir dans *I*.**
- **On trace la droite x=a.**
- **On surligne l'arc correspondant à l'inéquation donc à gauche de la droite.**
- **On détermine l'ensemble solution en parcourant *I* dans le sens direct.**

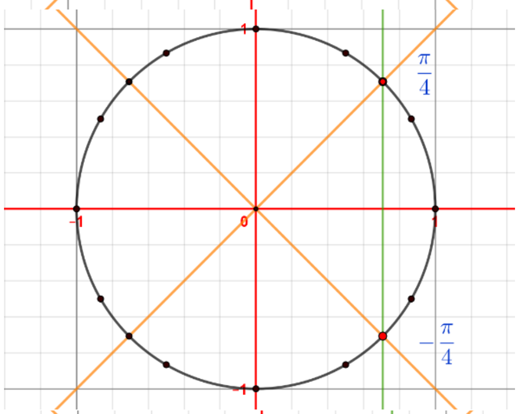
**Exemples :**

1. Résoudre dans $I = ]-\pi; \pi]$ : $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$



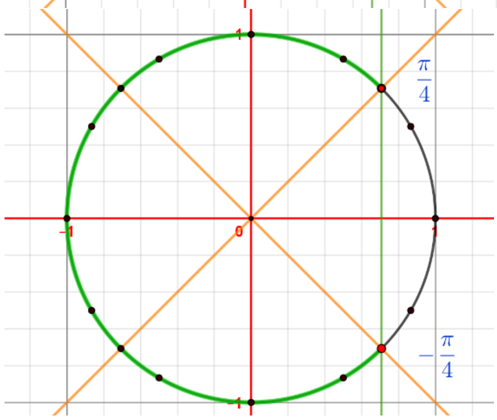

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{4}$

Les angles limites sont donc $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$.




On trace la droite $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Cela revient à tracer la droite passant par les 2 points trouvés précédemment.



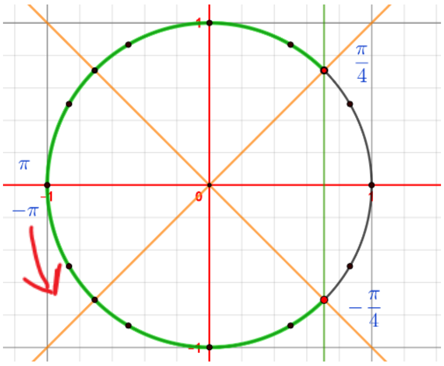

On surligne l'arc de cercle à gauche de la droite.

On parcourt l'intervalle $I = ]-\pi;\pi]$ en partant de $-\pi$ (exclus) dans le sens direct.

On doit accepter l'arc entre $-\pi$ et $-\frac{\pi}{4}$ puis entre $\frac{\pi}{4}$ et $\pi$ .

$S = ]-\pi; -\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{4}; \pi]$

Faire attention aux bornes ouvertes et fermées !



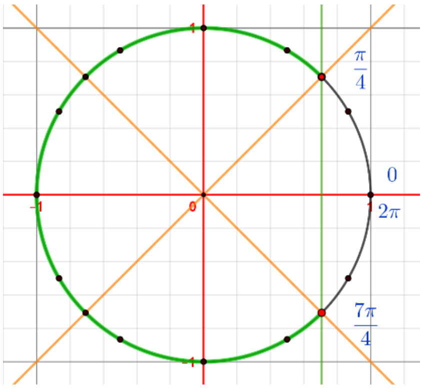

**2.** Résoudre dans $I = [0; 2\pi[$ : $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{4}$

Les angles limites sont donc $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$.

Comme précédemment, on trace la droite et on surligne l'arc de cercle.
Mais on va partir de 0.

On doit accepter l'arc entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$ $\rightarrow$ $S = [\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}]$




Pour résoudre : $\cos x \geq a$ , on procède de même, mais il faut surligner l'arc à droite de la droite tracée.

## À VOUS DE JOUER 12

**1.** Résoudre dans $I = ]-\pi; \pi]$ : $\cos x \geq \frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos$............. Les angles limites sont donc ............ et ..................

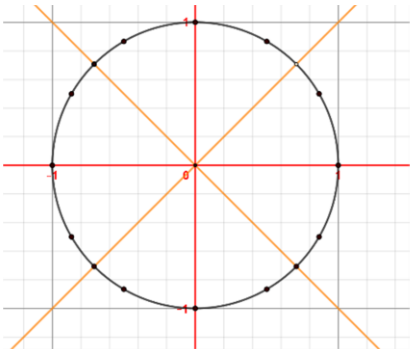
On trace la droite d'équation .................
On surligne l'arc de cercle à .................... de la droite.

On parcourt l'intervalle $I = ]-\pi;\pi]$ en partant de ..............

(exclus) dans le sens ................................

On doit accepter l'arc entre ................................ .

$S =$............................



**2.** Résoudre dans $\boldsymbol{I = [0; 2\pi[}$ : $\cos x \geq \frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos$............

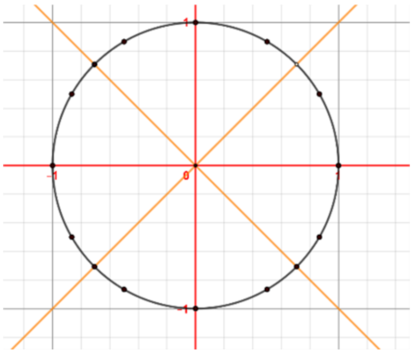
Les angles limites dans $I$ sont donc $\frac{\pi}{3}$ et ..............

On parcourt l'intervalle $I = [0;2\pi[$ en partant de ........ (................)

dans le sens ......................

On doit accepter les arcs entre ......................................... et
................................... .

$S =$..............................



## L'ESSENTIEL

Résoudre $\sin x \leq a$ sur un intervalle *I* d'amplitude $2\pi$

Si : $a < -1$: l'équation n'a pas évidemment de solution.

Si : $a > 1$: tout *x* de *I* est solution.

Si $a \in [-1; 1]$,

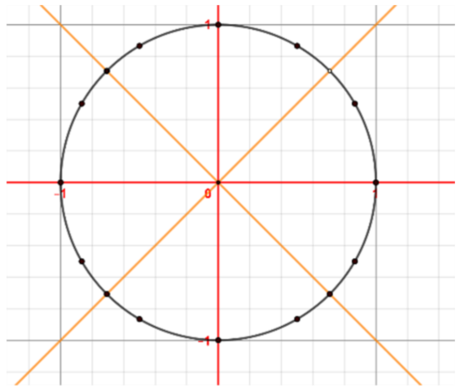
- **On cherche les angles $\vartheta$ dans *I* tel que : $a = \sin\theta$**
- **Ces angles vont être des bornes de l'ensemble solution. On doit les choisir dans *I*.**
- **On trace la droite y=a.**
- **On surligne l'arc correspondant à l'inéquation donc ici sous la droite.**
- **On détermine l'ensemble solution en parcourant *I*.**

On voit que les principes sont les mêmes, mais qu'on utilise une droite horizontale.

## À VOUS DE JOUER 13

Résoudre dans $\boldsymbol{I} = [\mathbf{0}; \mathbf{2\pi}[$ : $\sin x \leq \frac{1}{2}$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \ldots\ldots\ldots$$



On trace la droite $y =$...........

On surligne l'arc de cercle ................................. de la droite.

On parcourt l'intervalle $I = [0; 2\pi[$ en partant de ........ (....................) dans le sens ....................

On doit accepter les arcs entre .................................... et ............................. .

$S =$..............................

# LE TEMPS DU BILAN

- Dans ce chapitre, vous avez appris une nouvelle mesure d'angle : le radian à l'aide de l'enroulement de la droite des réels.

| Angle en degrés | 0 | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| Angle en radians | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |

- Cela permet d'élargir les notions de sinus et cosinus à l'ensemble des réels (voir le chapitre Fonctions trigonométriques dans le module FonctionsII).

| Angle en degrés | 0 | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| Angle en radians | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |

- Voici les formules à retenir :

Pour tout réel *x* :

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$$

- Vous avez également appris à résoudre les équations et inéquations trigonométriques en utilisant 2 formules importantes d'angles associés :

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Abordons maintenant une série d'exercices, afin de vérifier vos connaissances.
Les exercices ont été classés dans un ordre d'approfondissement croissant.
Les réponses aux exercices se trouvent en fin de manuel.

## EXERCICE 01

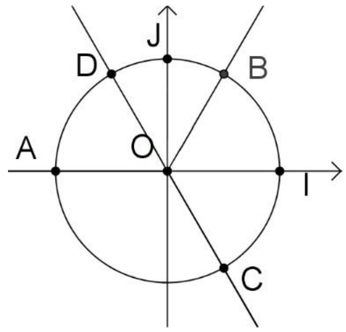
On considère un carré ABCD de coté 1. Calculez AC.

En déduire les valeurs exactes de : $\cos\frac{\pi}{4}$ ; $\sin\frac{\pi}{4}$.

## EXERCICE 02

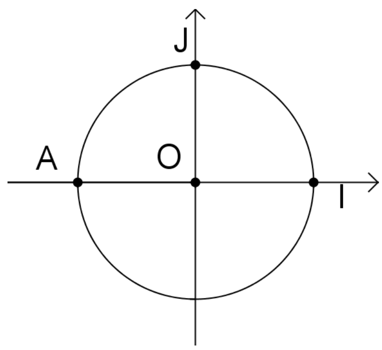
On considère un triangle équilatéral ABC de côté 1. On appelle H milieu de [AB]. Calculez CH.

En déduire les valeurs exactes de : $\sin\frac{\pi}{3}$ ; $\cos\frac{\pi}{6}$ ; $\sin\frac{\pi}{6}$.

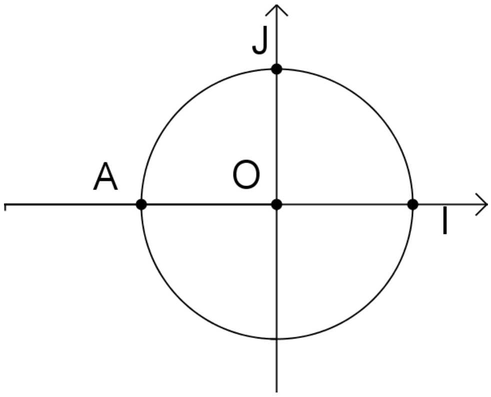



## EXERCICE 03

**1.** Déterminez les points images par enroulement de la droite des réels suivants : $\pi;\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}$. On utilisera les angles correspondants en degrés.



2. Donnez le signe du cosinus et du sinus d'un réel $x$ si son point image est situé sur l'arc $\overset{\frown}{JA}$.

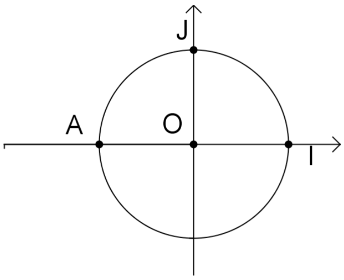



3. Calculez le sinus de : $\pi;\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{4};-\dfrac{\pi}{3};3\pi$

EXERCICE 04

1. Convertissez $\dfrac{2\pi}{5}$ en degrés.

2. Placez les images de $\dfrac{2\pi}{5},\dfrac{4\pi}{5},\dfrac{6\pi}{5},\dfrac{8\pi}{5}$ sur le cercle trigonométrique à l'aide d'un rapporteur.




3. Conjecturez à partir de la figure le résultat de : $\sin\dfrac{2\pi}{5}+\sin\dfrac{4\pi}{5}+\sin\dfrac{6\pi}{5}+\sin\dfrac{8\pi}{5}$

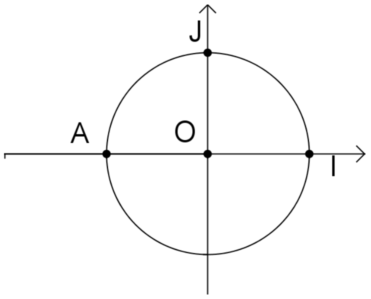
4. Prouvez la conjecture $\sin\dfrac{2\pi}{5}+\sin\dfrac{4\pi}{5}+\sin\dfrac{6\pi}{5}+\sin\dfrac{8\pi}{5}$.

EXERCICES

EXERCICE 05

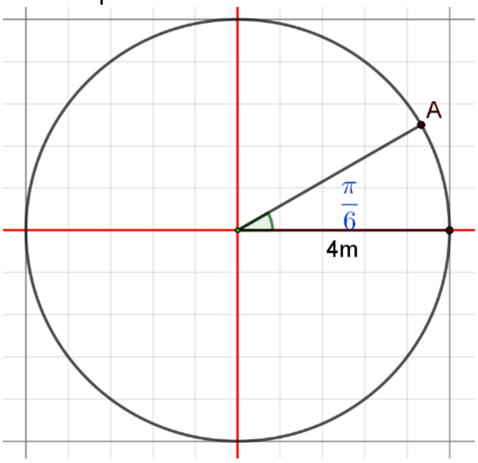
Résoudre en s'aidant du cercle trigonométrique sur $]-\pi;+\pi]$ puis sur R l'équation :

$$\sin x = -\frac{1}{2}.$$




EXERCICE 06

Un manège de rayon 4 m fait 2 tours par minute dans le sens des aiguilles d'une montre. On repère l'emplacement du cheval blanc à $t=0$ au point A.




1. Où est-il après 2min20s ?

2. Quelle distance a-t-il parcourue ?

EXERCICE 07

Résoudre sur $\mathbb{R}$

*a)* $\cos x = \cos(-\frac{\pi}{2})$ *b)* $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ *c)* $\sin x = \cos(\frac{\pi}{6})$ *d)* $\cos 2x = \frac{1}{2}$ *e)* $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

EXERCICE 08

Résoudre sur $]-\pi;\pi]$ :

1. $\cos(2x - \frac{\pi}{5}) = \cos x$

**2.** $sin^2 x - 4\,sin\,x + 3 = 0$

----

----

----

----

**EXERCICE 09**

Résoudre sur $]-\pi;\pi]$ : $(2\cos x - \sqrt{3})(\cos x - 1) \geq 0$

----

----

----

----

----

----

**Les principales compétences :**

- Savoir placer un point image par enroulement de la droite numérique autour du cercle trigonométrique.
- Calculer le sinus ou le cosinus d'angles remarquables.
- Simplifier des expressions trigonométriques avec les angles associés.

La trigonométrie fait souvent l'objet de questions de QCM, plus rarement d'un exercice complet (même si on ne peut rien exclure !).

Voici les exemples de questions d'un QCM

### Question 1

Pour tout réel x, $\cos(\pi + x)$ est égal à :

- ☐ $\cos x$
- ☐ $-\cos x$
- ☐ $\sin x$
- ☐ $-\sin x$

Il s'agit d'une question de cours : $-\cos x$

### Question 2

$-\dfrac{70\pi}{4}$ a le même point image que :

- ☐ $\dfrac{\pi}{4}$
- ☐ $-\dfrac{\pi}{4}$
- ☐ $-\dfrac{\pi}{2}$
- ☐ $\dfrac{\pi}{2}$

Cela revient à placer le point image par enroulement de la droite.

$$70 = 4 \times 17 + 2 \quad -\frac{70\pi}{4} = -18\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = -18\pi + \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

On aurait également pu vous demander de placer le point image sur le cercle trigonométrique.

### Question 3

Pour tout réel x, $\cos(\dfrac{93\pi}{6})$ est égal à :

- ☐ $\dfrac{1}{2}$
- ☐ $-1$
- ☐ $0$
- ☐ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Cette question ressemble à la question précédente : il faut trouver un angle plus simple ayant le même point image que $\frac{93\pi}{6}$.

$$96 = 6 \times 15 + 3 \quad \frac{93\pi}{6} = 15\pi + \frac{3\pi}{6} = 16\pi - \pi + \frac{\pi}{2} = 16\pi - \frac{\pi}{2} \quad cos(-\frac{\pi}{2}) = \mathbf{0}$$

**Question 4**

L'équation $\sin x(2\cos^2 x - 1) = 0$ admet sur $]-\pi;\pi]$ exactement :

- ☐ 1 solution
- ☐ 2 solutions
- ☐ 4 solutions
- ☐ 6 solutions

Une question plus complexe (niveau Terminale).

$$sin\,x\,(2\,cos^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow sin\,x = 0 \text{ ou } 2\,cos^2 x - 1 = 0$$

$$sin\,x = 0 \quad \boldsymbol{x = 0 \text{ ou } x = \pi}$$

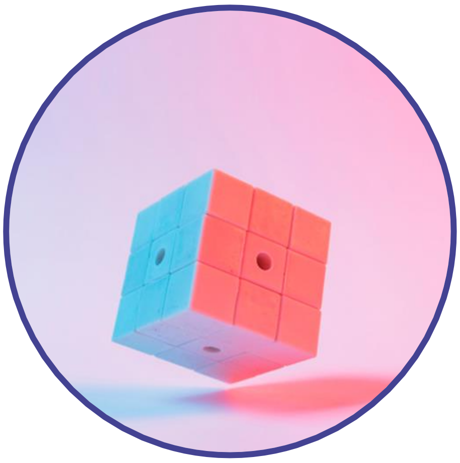
$$2\,cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$cos\,x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4}}$$

$$cos\,x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \boldsymbol{x = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{4}}$$

**6 solutions.**

# PRODUIT SCALAIRE



Le produit scalaire est un concept particulièrement important en physique des forces. Cependant, sa maîtrise est avant tout mathématique.

Au cours de ce chapitre, nous allons tout d'abord voir la définition et les propriétés du produit scalaire. Ses identités remarquables seront alors vues. Le cas particulier de l'orthogonalité sera alors appréhendé.

Vous allez l'étudier dans le plan, mais il peut se généraliser dans un espace de toutes dimensions, en particulier en 3 dimensions comme vous le verrez dans le programme de Terminale.

## *COMPÉTENCES VISÉES*

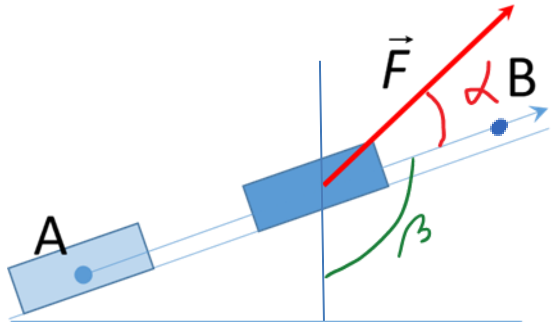
- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans le plan ou dans l'espace.
- En vue de la résolution d'un problème, calculer le produit scalaire de deux vecteurs en choisissant une méthode adaptée (en utilisant la projection orthogonale, à l'aide des coordonnées, à l'aide des normes et d'un angle, à l'aide de normes).
- Utiliser le produit scalaire pour résoudre un problème géométrique.

## *PRREQUIS*

- Vecteurs.

## ACTIVITÉ

On veut déplacer un chariot qui suit un rail du point A au point B. Il n'y a pas de frottement.




**1.** Quelle est la condition nécessaire sur l'angle α pour que la force permette le déplacement ?
En physique, le travail d'une force constante exercée sur un objet qui se déplace de A à B, s'exprime par :

$$W(\vec{F}) = F \times \mathrm{AB} \times \cos\alpha$$

..............................................................................................................................................

**2.** Quelle condition sur le travail permet le déplacement de A vers B ?
L'expression $W(\vec{F}) = F \times \mathrm{AB} \times \cos\alpha$ est celle du produit scalaire de $\vec{F}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Elle se note : $W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ .

..............................................................................................................................................

**3.** Que se passe-t-il si on arrête d'exercer $\vec{F}$ ? Expliquer en faisant intervenir un produit scalaire et l'angle β.

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

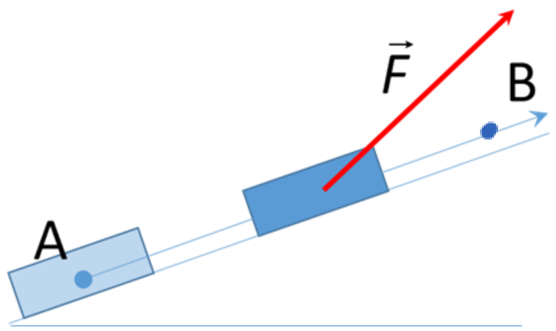
..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................

..............................................................................................................................................



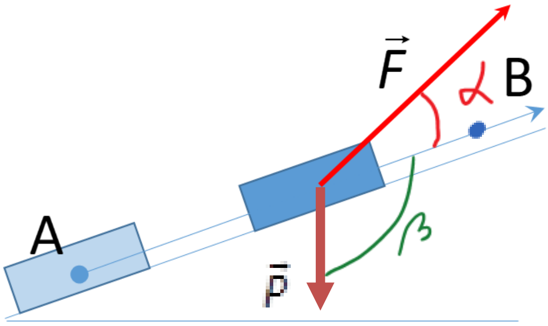
## CORRECTION

1. L'angle α doit être un angle aigu. Dans le cas contraire, la force entraîne le chariot vers le bas.
2. α doit être un angle aigu, donc $\cos\alpha > 0$, donc $W(\vec{F}) > 0$. Le travail de la force doit être positif.
3. Le chariot va finir par redescendre à cause de son poids $\vec{P}$.

$$W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} = P \times AB \times \cos\beta$$

$\beta$ est un angle obtus. Donc $\cos\beta < 0$ et $W(\vec{P}) < 0$.

Le travail du poids est négatif. On dit que le travail est résistant.




# PRODUIT SCALAIRE

01

## Définition et propriétés du produit scalaire

### L'ESSENTIEL

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

Soient A, B et C tels que $\overrightarrow{AB}$ soit un représentant de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ un représentant de $\vec{v}$.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se note : $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|\ cos(\widehat{BAC})$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|\ cos(\widehat{BAC}) = AB \times AC \times cos(\widehat{BAC})$$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

### L'ESSENTIEL

$\vec{u} \cdot \vec{u}$ se note $\vec{u}^2$

(1) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

(2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$

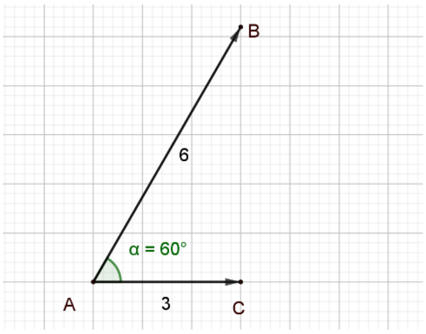
**Justification :**

Soient A et B tels que $\overrightarrow{AB}$ soit un représentant de $\vec{u}$ .

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{u}\|\cos(\widehat{BAB}) = \|\vec{u}\|^2 \quad \text{car } \widehat{BAB} = 0$$

On en déduit immédiatement (2).

**Exemple :**




$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cos(BAC)=6\times3\times\frac{1}{2}=9$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2=36$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=AC^2=9$

## Cas des vecteurs colinéaires :

### L'ESSENTIEL

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires de même sens** : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC$

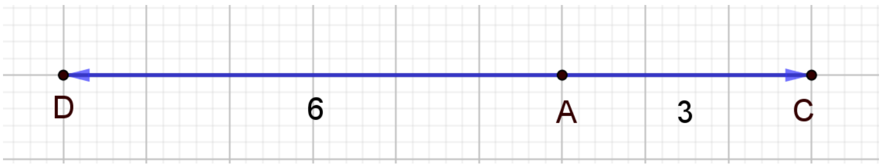
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires de sens contraires** : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AC$

**Justification :**

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de même sens : $BAC=0$ donc $\cos(BAC)=1$ d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC$

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de sens contraires : $BAC=\pi$ donc $\cos(BAC)=-1$ d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AC$

**Exemple :**




$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=-3\times6=-18$

### À VOUS DE JOUER 14

$\widehat{BAC}=\frac{\pi}{3}$ $\quad cos(\widehat{BAC})$

$=$……………..

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times$………………..

$=4\times$………..

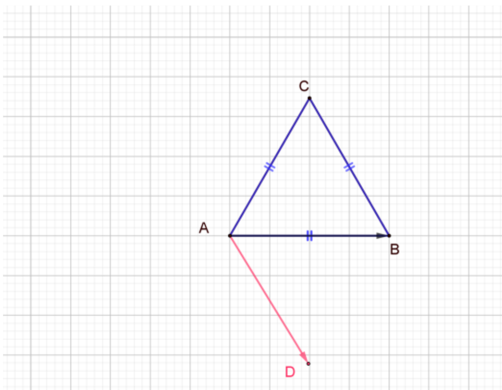
$=$……………..

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}$ et $\widehat{BAD}=$……… donc

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\ldots\ldots}$

$=$…………………………………………..

$=$………………..




ABC et ABD sont des triangles équilatéraux de côté 4.

## L'ESSENTIEL

Symétrie du produit scalaire : soient 2 vecteurs $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$$

**Justification :**

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, soient A, B et C tels que $\overrightarrow{AB}$ soit un représentant de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ un représentant de $\vec{v}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(BAC)=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(CAB)=\vec{v}\cdot\vec{u}$$

Si l'un des 2 vecteurs est nul, le résultat est évident.

## Propriétés de bilinéarité

## L'ESSENTIEL

Propriétés de bilinéarité : soient 3 vecteurs $\vec{u},\ \vec{v}\ et\ \vec{w}$

**(1)** $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

**(2)** $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k\vec{u}\cdot\vec{v}$

**Exemples :**

$\vec{u}\cdot(3\,\vec{v})=3\,\vec{u}\cdot\,\vec{v}$ $\quad$ $(4\vec{u})\cdot(3\,\vec{v})=12\,\vec{u}\cdot\,\vec{v}$ $\quad$ $\vec{u}\cdot(-\,\vec{v})=-\,\vec{u}\cdot\,\vec{v}$

$\vec{u}\cdot(3\,\vec{v}-\vec{w})=3\,\vec{u}\cdot\,\vec{v}-\,\vec{u}\cdot\vec{w}$

$\vec{u}\cdot\,\vec{v}-2\vec{u}\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot(\,\vec{v}-2\,\vec{w})$

$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}^2\ =\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+AB^2$

## À VOUS DE JOUER 15

Ecrire en fonction de $\vec{u}\cdot\,\vec{v}$ , $\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $\vec{v}\cdot\vec{w}$

$\vec{u}\cdot(-2\vec{v})=$................ $\quad$ $\dfrac{1}{2}(4\vec{u})\cdot(5\,\vec{w})=$................ $\quad$ $\vec{u}\cdot(\vec{w}-\,\vec{v})=$....................

$(\vec{u}-2\,\vec{v})\cdot(-\vec{w})=$...................................

02

# PRODUIT SCALAIRE

## Identités remarquables du produit scalaire, formule d'Al-Kashi

## Les identités remarquables

### L'ESSENTIEL

**(1)** $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

**(2)** $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$

**(3)** $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

**Attention à ne pas oublier le point du produit scalaire !**

**Justification de (1) :**

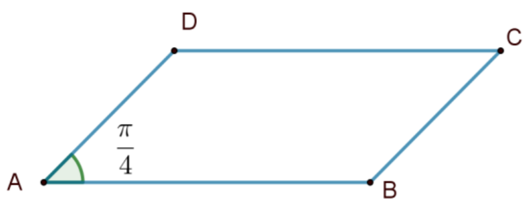
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$$
$$= \vec{u}^2 + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

### À VOUS DE JOUER 16

Justifiez-le **(3)** de l'essentiel

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) =$ ..........................................................................................................

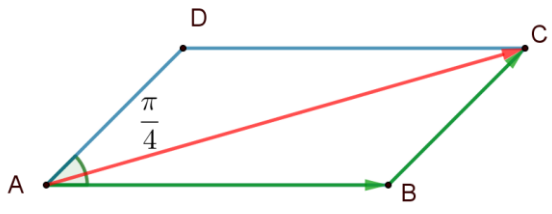
**Exemple d'application :**




ABCD est un parallélogramme.

$AB = 5 \quad AD = 2\sqrt{2}$

On veut calculer AC :




$AC^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\|^2$ or $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ car ABCD est un parallélogramme.

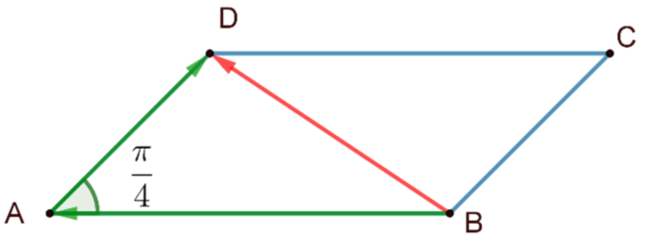
$AC^2 = AB^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$= AB^2 + AD^2 + 2\,AB\times AD\times\cos\frac{\pi}{4} = 5^2 + (2\sqrt{2})^2 + 2\times5\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 25+8+20 = 53$

$AC = \sqrt{53}$

## À VOUS DE JOUER 17

En reprenant les données de l'exemple, calculer BD.




$BD^2 = \left\|\overrightarrow{.......}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{........}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{.......}\right\|^2$ or $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{.......}$ car ABCD est un parallélogramme.

$= AD^2 + .........................$

$= AD^2 + ....................................... = ....................................... = 13$

$BD =$

## Application : formule d'Al-Kashi

Une application intéressante de l'identité remarquable (1) est le calcul des angles et des longueurs dans un triangle quelconque.

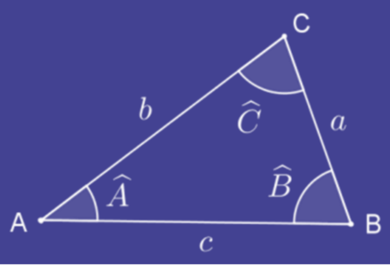
### L'ESSENTIEL

On considère un triangle ABC avec :

$$AB = c \quad AC = b \quad BC = a$$

Formule d'Al Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$




**Démonstration des formules d'Al Kashi :**

$$a^2 = BC^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\,\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = BA^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$= c^2 + b^2 - 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cos(BAC) = c^2 + b^2 - 2bc\cos A$$

- On obtient de même les deux autres formules d'Al Kashi :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \qquad\qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

## À VOUS DE JOUER 18

Justifiez l'équation suivante : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$

$b^2 = AC^2 = (\overrightarrow{......} + \overrightarrow{.......})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + .................. = AB^2 + BC^2 - 2\ ..............$

$= c^2 + .............................. = ..............................$

Le théorème de Pythagore et sa réciproque peuvent être déduits de la formule d'Al Kashi.

Si ABC est rectangle en A, cosA =0 donc $a^2=c^2+b^2$ (Théorème de Pythagore)

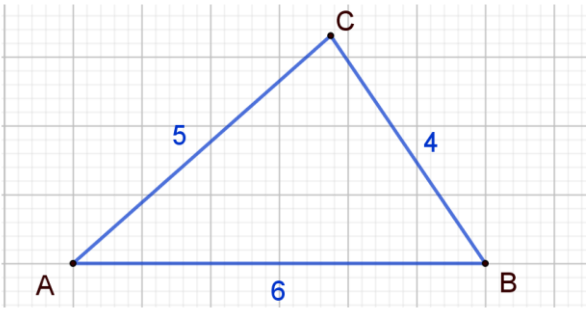
Si $a^2=c^2+b^2$, alors $-2\cos A=0$ donc $a^2=c^2+b^2\cos A=0$

Comme $bc\neq 0$, on cosA =0

Le triangle est rectangle en A, (Réciproque du Théorème de Pythagore)

**Exemple :**

Déterminer les angles du triangle en degrés arrondis au dixième de degré.




$a=4\quad b=5\quad c=6$

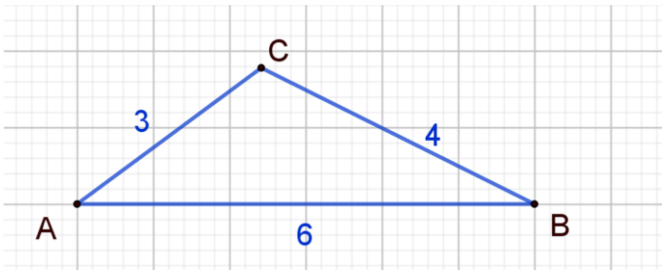
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \Leftrightarrow \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{25+36-16}{60}=\dfrac{45}{60}=\dfrac{3}{4}\qquad A\approx 41,4°$

$b^2=c^2+a^2-2ac\cos\hat{B} \Leftrightarrow \cos\hat{B}=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\dfrac{36+16-25}{48}=\dfrac{27}{48}=\dfrac{9}{16}\qquad \hat{B}\approx 55,8°$

$C=180-A-\hat{B}\qquad C\approx 82,8°$

## À VOUS DE JOUER 19

1. Déterminer les angles du triangle en degrés arrondis au dixième de degré.



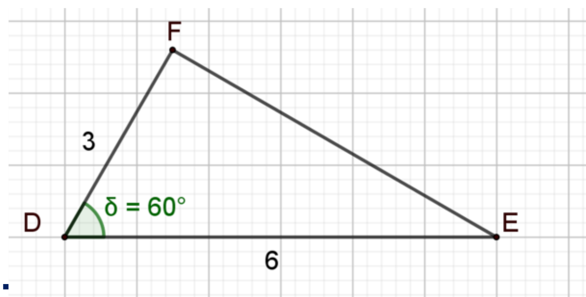

$a=4\quad b=$.................... $c=$....................

$a^2=b^2+$..................$\Leftrightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\dots\dots\dots\dots}{2bc}=\dfrac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}=\dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}\quad \hat{A}\approx$.........

$b^2=$..................................$\Leftrightarrow \cos\hat{B}=$.................................. $\hat{B}\approx\cdots$ ... ...

$\hat{C}=180-$.................... $\hat{C}\approx$...........

2. Déterminer la valeur exacte de FE.



On connaît la valeur de l'angle en ……….

$d = ?$ $e = \ldots\ldots\ldots$ $f = 6$
$d^2 = e^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow d^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 27$ $d = \ldots\ldots\ldots$

Le triangle est-il rectangle ?

$d^2 = \ldots\ldots\ldots e^2 = \ldots\ldots\ldots$ $f^2 = \ldots\ldots\ldots$ donc $f^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

D'après ……………………………………………………………………………, le triangle est rectangle en F.

# 03 PRODUIT SCALAIRE

## Orthogonalité de vecteurs

### Produit scalaire et orthogonalité

**L'ESSENTIEL**

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

Soient A, B et C tels que $\overrightarrow{AB}$ soit un représentant de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ un représentant de $\vec{v}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si (AB) et (AD) sont des droites perpendiculaires.

Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

**L'ESSENTIEL**

Condition d'orthogonalité :
Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

**Justification :**

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, soient A, B et C tels que $\overrightarrow{AB}$ soit un représentant de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ un représentant de $\vec{v}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(BAC) = 0 \Leftrightarrow \cos(BAC) = 0 \quad \text{car } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow (AB) \perp (AC)$$

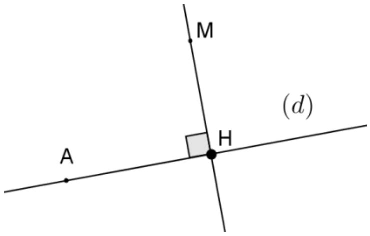
Si l'un des vecteurs est nul, ils sont orthogonaux par définition et leur produit scalaire est nul.

# Produit scalaire et projection orthogonale

## L'ESSENTIEL

On considère une droite ($d$) et un point M.

- Si M n'appartient pas à ($d$), le **projeté orthogonal** de M sur ($d$) est l'intersection entre ($d$) et la droite passant par M et orthogonale à ($d$).
- Si M appartient à ($d$), le projeté orthogonal de M sur ($d$) est M.



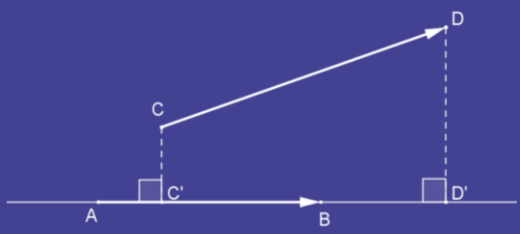

H est le projeté orthogonal de M sur ($d$).
A est son propre projeté orthogonal sur ($d$).

**Remarque :** $\overrightarrow{MH}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de ($d$), en particulier à $\overrightarrow{AH}$

## L'ESSENTIEL

**Propriété :**
Soient 4 points A, B, C et D avec A et B distincts.
On appelle C' (respectivement D') le projeté orthogonal de C (respectivement de D) sur (AB).

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$




**Démonstration :**

On prend les notations de la propriété.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$

C' (respectivement D') est le projeté orthogonal de C (respectivement de D) sur (AB).

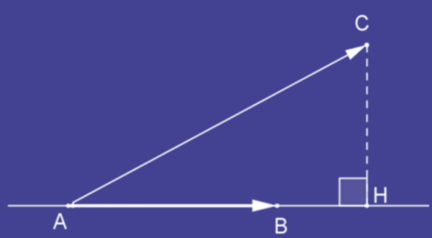
On a donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} = 0$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'D} = 0$

Il en résulte : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$

## L'ESSENTIEL

Soient 3 points A, B et C avec A et B distincts.
On appelle H le projeté orthogonal de C sur (AB).

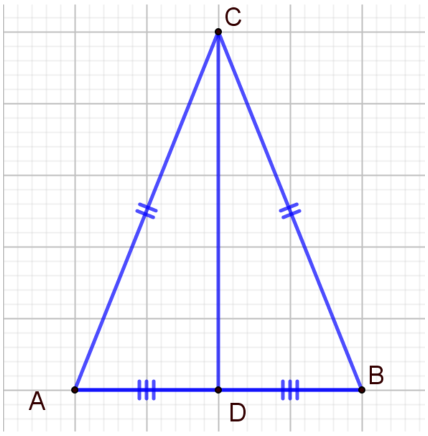
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$



**Démonstration :**

Il s'agit d'un cas particulier de la propriété précédente avec : C =A.

**Exemple :**




$AB=4$ Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

ABC est isocèle en C, donc (CD) médiane de ABC est également la hauteur issue de C. D est donc le projeté orthogonal de C sur (AB).

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=AB\times AD=4\times2=8$$

Remarque : le produit scalaire ne dépend que de la base AB.

L'utilisation du projeté permet d'aller parfois plus vite ; mais on peut généralement s'en passer. Méthode sans utiliser le projeté :

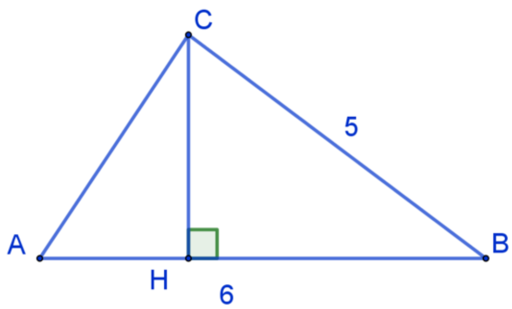
ABC est isocèle en C, donc (CD) médiane de ABC est également la hauteur issue de C.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=0$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AD=4\times2=8$$

## À VOUS DE JOUER 20

En reprenant les données de l'exemple, calculer BD.




**1.** Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

H est le ................................... de C sur (AB).

On a donc :

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{........}=BA\times........=........$

**2.** Calculer $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CH}$

H est le ..........................................................................................................

On a donc : $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{..........}=............$

D'après le .................................................... dans BHC,

$BH^2+.............=...............$ donc $CH^2=..............................=9$

On en déduit que : $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CH}=..........$

# LE TEMPS DU BILAN

- Ce chapitre a permis de définir le produit scalaire de 2 vecteurs et d'en voir des premières applications comme les formules d'Al Kashi. Il faut retenir ses principales propriétés :

  Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.
  Soient A, B et C tels que $\overrightarrow{AB}$ soit un représentant de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ un représentant de $\vec{v}$. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se note : $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v}}$ avec

  $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|\, cos(\widehat{\mathrm{BAC}})$$

  $$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| \times \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|\, cos(\widehat{\mathrm{BAC}}) = \mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times cos(\widehat{\mathrm{BAC}})$$

  **Si** $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

- $\vec{u}\cdot\vec{u}$ se note $\vec{u}^2$

  (1) $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

  (2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 = \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|^2 = \mathrm{AB}^2$

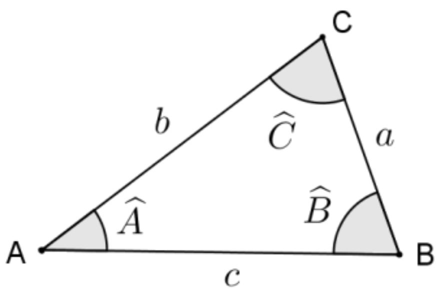
- **Propriétés de bilinéarité :** soient 3 vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$
  - $\boldsymbol{\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}}$
  - $\boldsymbol{\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k\vec{u}\cdot\vec{v}}$
  - $\boldsymbol{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2}$
  - $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$
  - $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

- On considère un triangle ABC avec :

  $$AB = c \quad AC = b \quad BC = a$$

  Formule d'Al Kashi :

  $$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}}$$




- **Condition d'orthogonalité :**
  Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul

Abordons maintenant une série d'exercices, afin de vérifier vos connaissances.
Les réponses aux exercices se trouvent en fin de manuel.

## EXERCICE 10

Soient A, B et C tels que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$ . On appelle I le milieu de [AC].
Calculez : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CI}$.

## EXERCICE 11

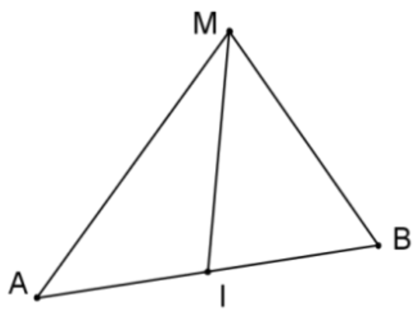
ABCD est un parallélogramme. On donne : AB=4 cm ; AD=8 cm ; $\widehat{BAD}=60°$

**1.** Déterminez $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

**2.** En déduire AC et BD.

## EXERCICE 12

**1.** Soient deux points A et B et I le milieu de [AB]. Montrer que $MA^2+MB^2=2MI^2+\dfrac{AB^2}{2}$



**2.** Soit ABC un triangle. I est le milieu de [BC]. AB=3 cm ; BC=4 cm ; AC=6 cm.
Calculez AI au mm près.

## EXERCICE 13

On considère un triangle ABC de centre de gravité G avec BC=*a* AC=*b* et AB=*c*. Calculer $GA^2+GB^2+GC^2$ en fonction de *a*, *b* et *c*.
***Indications :*** on pourra utiliser A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB] et appliquez le théorème de la médiane.
**Rappel :** le centre de gravité est au 2/3 de chacune des médianes.

## EXERCICE 14

Soit ABC un triangle. Montrez que : $AB^2+BC^2 \geq \frac{1}{2}AC^2$

## EXERCICE 15

ABC est un triangle : $AB = \sqrt{2}$ $AC = \sqrt{5}$ $BC = 3$. Déterminez la valeur exacte de $B$.

## EXERCICE 16

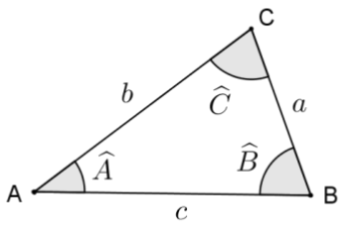
ABC est un triangle : $AB = 4$ $AC = 6$ $A = \frac{\pi}{3}$. Calculez BC.

## EXERCICE 17

On considère un triangle ABC avec : $AB = c$ $AC = b$ $BC = a$

Montrer que :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin C}$$



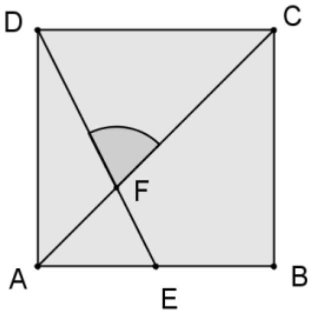

**Indication :** on pourra utiliser C' , projeté orthogonal de C sur (AB) et calculer de 2 manières :
$\overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{CC'}$.

EXERCICE 18

Soit ABC un triangle. AB=4 ; AC=6 ; $\hat{A} = 60°$. Déterminer BC et $\hat{C}$en appliquant successivement la formule d'Al Kashi et la formule des sinus.

EXERCICE 19

On considère un carré ABCD de côté $a$. On appelle E le milieu de [AB] et F l'intersection entre (AC) et (ED). L'objectif est le calcul de $\widehat{CFD}$ avec deux méthodes.




1. Méthode avec les produits scalaires

a) Montrez que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{ED} = \frac{a^2}{2}$

b) En déduire la valeur approchée au dixième de degré près de $\widehat{CFD}$.

2. Méthode géométrique

   a) Déterminez les expressions de FC et FD en fonction de *a*.

   b) En utilisant la formule d'Al Kashi, déterminez $\cos \text{CFD}$.

   c) En déduire la valeur approchée au dixième de degré près de $\text{CFD}$.

**Avant de commencer le devoir, jetez un coup d'œil aux Clés du Bac...**

Vous pouvez maintenant faire et envoyer le devoir n°1