COURS PI

L'école sur-mesure

de la Maternelle au Bac, Établissement d'enseignement privé à distance, déclaré auprès du Rectorat de Paris

Première - Module 5 - Probabilités

Mathématiques

v.5.1

- ***Guide de méthodologie*** *pour appréhender notre pédagogie*
- ***Leçons détaillées*** *pour apprendre les notions en jeu*
- ***Exemples et illustrations*** *pour comprendre par soi-même*
- ***Prolongement numérique*** *pour être acteur et aller + loin*
- ***Exercices d'application*** *pour s'entraîner encore et encore*
- ***Corrigés des exercices*** *pour vérifier ses acquis*

www.cours-pi.com

Paris & Montpellier

EN ROUTE VERS LE BACCALAURÉAT

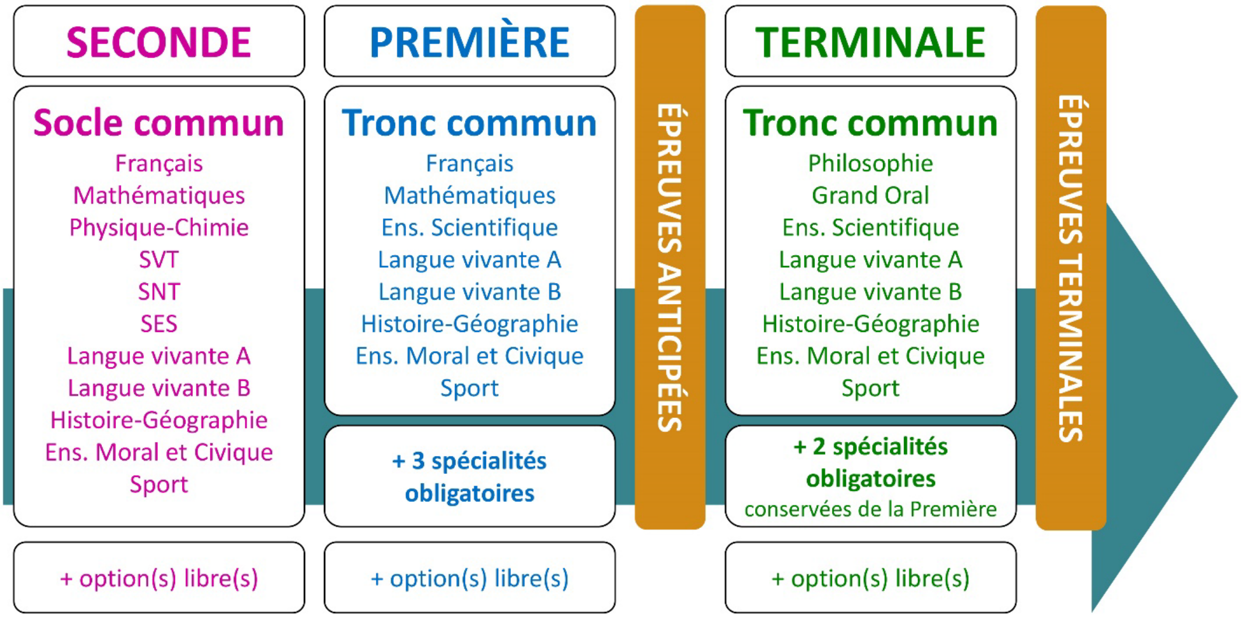
Comme vous le savez, **la réforme du Baccalauréat** est entrée en vigueur progressivement jusqu'à l'année 2021, date de délivrance des premiers diplômes de la nouvelle formule.

Dans le cadre de ce nouveau Baccalauréat, **notre Etablissement**, toujours attentif aux conséquences des réformes pour les élèves, s'est emparé de la question avec force **énergie** et **conviction** pendant plusieurs mois, animé par le souci constant de la réussite de nos lycéens dans leurs apprentissages d'une part, et par la **pérennité** de leur parcours d'autre part. Notre Etablissement a questionné la réforme, mobilisé l'ensemble de son atelier pédagogique, et déployé tout **son savoir-faire** afin de vous proposer un enseignement tourné continuellement vers l'**excellence**, ainsi qu'une scolarité tournée vers la **réussite**.

- Les **Cours Pi** s'engagent pour faire du parcours de chacun de ses élèves un **tremplin vers l'avenir**.
- Les **Cours Pi** s'engagent pour ne pas faire de ce nouveau Bac un diplôme au rabais.
- Les **Cours Pi** vous offrent **écoute** et **conseil** pour coconstruire une **scolarité sur-mesure**.

LE BAC DANS LES GRANDES LIGNES

Ce nouveau Lycée, c'est un enseignement à la carte organisé à partir d'un large tronc commun en classe de Seconde et évoluant vers un parcours des plus spécialisés année après année.



CE QUI A CHANGÉ

- Il n'y a plus de séries à proprement parler.
- Les élèves choisissent des spécialités : trois disciplines en classe de Première ; puis n'en conservent que deux en Terminale.
- Une nouvelle épreuve en fin de Terminale : le Grand Oral.
- Pour les lycéens en présentiel l'examen est un mix de contrôle continu et d'examen final laissant envisager un diplôme à plusieurs vitesses.
- Pour nos élèves, qui passeront les épreuves sur table, le Baccalauréat conserve sa valeur.

CE QUI N'A PAS CHANGÉ

- Le Bac reste un examen accessible aux candidats libres avec examen final.
- Le système actuel de mentions est maintenu.
- Les épreuves anticipées de français, écrit et oral, tout comme celle de spécialité abandonnée se dérouleront comme aujourd'hui en fin de Première.

A l'occasion de la réforme du Lycée, nos manuels ont été retravaillés dans notre atelier pédagogique pour un accompagnement optimal à la compréhension. Sur la base des programmes officiels, nous avons choisi de créer de nombreuses rubriques :

- **Suggestions de lecture** pour s'ouvrir à la découverte de livres de choix sur la matière ou le sujet
- **L'essentiel** et **le temps du bilan** pour souligner les points de cours à mémoriser au cours de l'année
- **À vous de jouer** pour mettre en pratique le raisonnement vu dans le cours et s'accaparer les ressorts de l'analyse, de la logique, de l'argumentation, et de la justification
- Et enfin ... la rubrique **Les Clés du Bac by Cours Pi** qui vise à vous donner, et ce dès la seconde, toutes les cartes pour réussir votre examen : notions essentielles, méthodologie pas à pas, exercices types et fiches étape de résolution !

MATHÉMATIQUES PREMIÈRE

Module 5 – Probabilités

L'AUTEURE

Sylvie LAMY

« Faire des maths c'est jouer aux legos. Il s'agit d'assembler des briques pour solutionner des problèmes ». Diplômée de l'Ecole Polytechnique et agrégée de Mathématiques, elle poursuit aujourd'hui son parcours professionnel à l'Institut Géographique National et au Ministère des Transports comme chargée de mission sur les projets spatiaux. Passionnée par les sciences physiques, son approche pédagogique réside dans la transmission du raisonnement scientifique. Elle attend de ses éléves de comprendre et d'expliciter leur démarche dans la résolution des problèmes.

PRÉSENTATION

Ce **cours** est divisé en chapitres, chacun comprenant :

- Le **cours**, conforme aux programmes de l'Education Nationale
- Des **exercices d'application et d'entraînement**
- Les **corrigés** de ces exercices
- Des **devoirs** soumis à correction (et ***se trouvant hors manuel***). Votre professeur vous renverra le corrigé-type de chaque devoir après correction de ce dernier.

Pour une manipulation plus facile, les corrigés-types des exercices d'application et d'entraînement sont regroupés en fin de manuel.

CONSEILS A L'ÉLÈVE

Vous disposez d'un support de Cours complet : **prenez le temps** de bien le lire, de le comprendre mais surtout de l'**assimiler**. Vous disposez pour cela d'exemples donnés dans le cours et d'exercices types corrigés.
Vous pouvez rester un peu plus longtemps sur une unité mais travaillez régulièrement.

LES FOURNITURES

Vous devez posséder :

- une **calculatrice graphique pour l'enseignement scientifique au Lycée comportant un mode examen (requis pour l'épreuve du baccalauréat).**
- un **tableur** comme Excel de Microsoft (payant) ou Calc d'Open Office (gratuit et à télécharger sur http://fr.openoffice.org/). En effet, certains exercices seront faits de préférence en utilisant un de ces logiciels, mais vous pourrez également utiliser la calculatrice).

LES DEVOIRS

Les devoirs constituent le moyen d'évaluer l'acquisition de vos *savoirs* (« Ai-je assimilé les notions correspondantes ? ») et de vos *savoir-faire* (« Est-ce que je sais expliquer, justifier, conclure ? »).

Placés à des endroits clés des apprentissages, ils permettent la vérification de la bonne assimilation des enseignements.

Aux *Cours Pi*, vous serez accompagnés par un professeur selon chaque matière tout au long de votre année d'étude. Référez-vous à votre « Carnet de Route » pour l'identifier et découvrir son parcours.
Avant de vous lancer dans un devoir, assurez-vous d'avoir **bien compris les consignes**.
Si vous repérez des difficultés lors de sa réalisation, n'hésitez pas à le mettre de côté et à revenir sur les leçons posant problème. **Le devoir n'est pas un examen**, il a pour objectif de s'assurer que, même quelques jours ou semaines après son étude, une notion est toujours comprise.
Aux *Cours Pi*, chaque élève travaille à son rythme, parce que chaque élève est différent et que ce mode d'enseignement permet le « sur-mesure ».
Nous vous engageons à respecter le moment indiqué pour faire les devoirs. Vous les identifierez par le bandeau suivant :

Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le devoir n°1

Il est **important de tenir compte des remarques, appréciations et conseils du professeur-correcteur**. Pour cela, il est **très important d'envoyer les devoirs au fur et à mesure** et non groupés. **C'est ainsi que vous progresserez !**

Donc, dès qu'un devoir est rédigé, envoyez-le aux *Cours Pi* par le biais que vous avez choisi :

1) Par **soumission en ligne** via votre espace personnel sur **PoulPi**, pour un envoi **gratuit**, **sécurisé** et plus **rapide**.
2) Par **voie postale** à *Cours Pi*, 9 rue Rebuffy, 34 000 Montpellier
   *Vous prendrez alors soin de joindre une **grande enveloppe** **libellée à vos nom et adresse**, et **affranchie** **au tarif en vigueur** pour qu'il vous soit retourné par votre professeur*

N.B. : *quel que soit le mode d'envoi choisi, vous veillerez à **toujours joindre l'énoncé du devoir ;** plusieurs énoncés étant disponibles pour le même devoir.*
N.B. : *si vous avez opté pour un envoi par voie postale et que vous avez à disposition un scanner, nous vous engageons à conserver une copie numérique du devoir envoyé. Les pertes de courrier par la Poste française sont très rares, mais sont toujours source de grand mécontentement pour l'élève voulant constater les fruits de son travail.*

SOUTIEN ET DISPONIBILITÉ

VOTRE RESPONSABLE PÉDAGOGIQUE

Professeur des écoles, professeur de français, professeur de maths, professeur de langues : notre Direction Pédagogique est constituée de spécialistes capables de dissiper toute incompréhension.

Au-delà de cet accompagnement ponctuel, notre Etablissement a positionné ses Responsables pédagogiques comme des « super profs » capables de co-construire avec vous une scolarité sur-mesure.
En somme, le Responsable pédagogique est votre premier point de contact identifié, à même de vous guider et de répondre à vos différents questionnements.

Votre Responsable pédagogique est la personne en charge du suivi de la scolarité des élèves.
Il est tout naturellement votre premier référent : une question, un doute, une incompréhension ? Votre Responsable pédagogique est là pour vous écouter et vous orienter. Autant que nécessaire et sans aucun surcoût.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?

Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.

QUEL EST SON RÔLE ?

Orienter les parents et les élèves.
Proposer la mise en place d'un accompagnement individualisé de l'élève.
Faire évoluer les outils pédagogiques.
Encadrer et coordonner les différents professeurs.

VOS PROFESSEURS CORRECTEURS

Notre Etablissement a choisi de s'entourer de professeurs diplômés et expérimentés, parce qu'eux seuls ont une parfaite connaissance de ce qu'est un élève et parce qu'eux seuls maîtrisent les attendus de leur discipline. En lien direct avec votre Responsable pédagogique, ils prendront en compte les spécificités de l'élève dans leur correction. Volontairement bienveillants, leur correction sera néanmoins juste, pour mieux progresser.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?

Une question sur sa correction ?
- faites un mail ou téléphonez à votre correcteur et demandez-lui d'être recontacté en lui laissant un message avec votre nom, celui de votre enfant et votre numéro.
- autrement pour une réponse en temps réel, appelez votre Responsable pédagogique.

LE BUREAU DE LA SCOLARITÉ

Placé sous la direction d'Elena COZZANI, le Bureau de la Scolarité vous orientera et vous guidera dans vos démarches administratives. En connaissance parfaite du fonctionnement de l'Etablissement, ces référents administratifs sauront solutionner vos problématiques et, au besoin, vous rediriger vers le bon interlocuteur.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?

Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.
04.67.34.03.00
scolarite@cours-pi.com

LE SOMMAIRE

COMPÉTENCES VISÉES

- Construire un arbre pondéré ou un tableau en lien avec une situation donnée. Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
- Utiliser un arbre pondéré ou un tableau pour calculer une probabilité.
- Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les événements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs (tirage au sort avec équiprobabilité d'un individu dans une population).
- Dans des cas simples, calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales.
- Distinguer en situation PA(B) et PB(A), par exemple dans des situations de type « faux positifs ».
- Représenter une répétition de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau.

COMPÉTENCES VISÉES

- À partir de la définition, calculez la fonction dérivée de la fonction carrée, de la fonction inverse.
- Dans des cas simples, calculez une fonction dérivée en utilisant les propriétés de la fonction carrée, de la fonction inverse.
- Interpréter en situation et utiliser les notations $\{X = a\}$, $\{X \leqslant a\}$, $P(X = a)$, $P(X \leqslant a)$. Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
- Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire.
- Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- Calculer une espérance, une variance, un écart type.
- Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème (mise pour un jeu équitable…).

SUGGESTIONS CULTURELLES

ESSAIS

- **Les maths c'est magique !** *Johnny Ball*
- **La grande aventure des nombres et du calcul** *Jason Lapeyronnie*
- **17 Équations qui ont changé le monde** *Ian Stewart*
- **Alex au pays des chiffres** *Alex Bellos*
- **Le grand roman des maths : de la préhistoire à nos jours** *Mickael Launay*
- **Histoire universelle des chiffres : L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul** *Georges Ifrah*
- **Le démon des maths** *Hans Magnus Enzensberger*
- **A propos de rien : une histoire du zéro** *Robert Kaplan*

BANDES-DESSINÉES

- **Logicomix** *Doxiádis / Papadátos / Papadimitríou*
- **Les maths en BD 1 et 2** *Larry Gonick*

DOCUMENTAIRES AUDIOVISUELS

- **L'extraordinaire aventure du chiffre 1** *Terry Jones*
- **Voyage au pays des maths** *Arte*

PODCASTS

- **L'oreille mathématiques** *Podcast de la Maison Poincarré*
- **Maths en tête** *toutes plateformes*

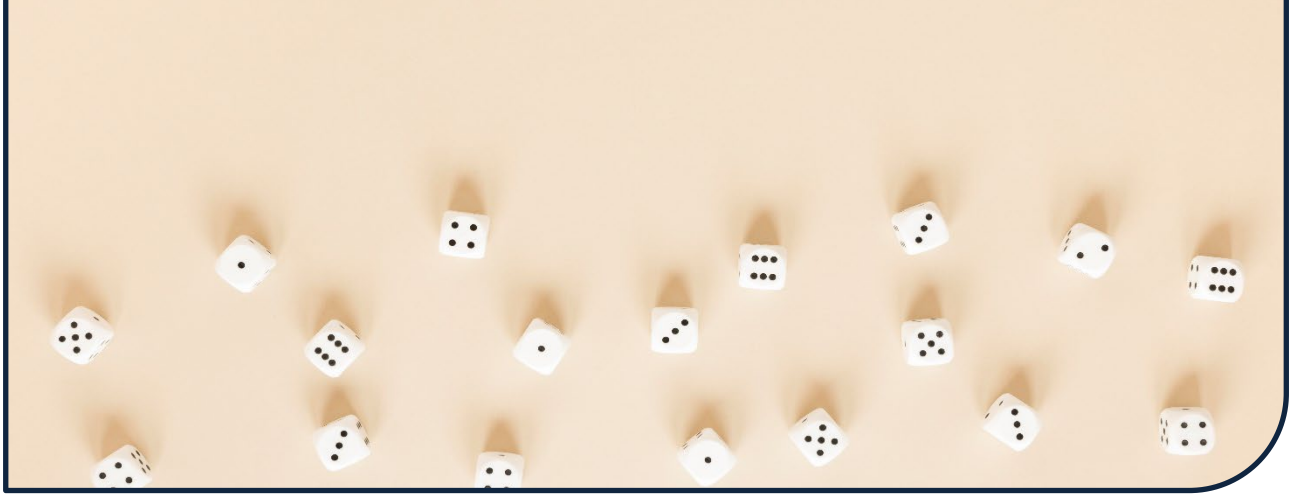
YOUTUBE

- **Chaîne YouTube Maths et Tiques** *Yvan Monka*
- **Chaîne YouTube Micmaths** *Mickaël Launay*
- **Chaîne YouTube de la Maison des mathématiques et de l'informatique**
- **Chaîne YouTube Automaths** *Jason Lapeyronnie*

Le Cours

INTRODUCTION

Les probabilités… ces mathématiques apprises au collège et développées depuis sous forme ludique avec ces tirages avec ou sans remise de boules de différentes couleurs. Mais quelles en sont les réelles applications ? Que vont-elles nous permettre ? Mais surtout comment s'en sortir même dans les cas les plus compliqués ?



Souvent les élèves apprécient ces chapitres et ce, dans chaque classe puisqu'il est facile de conceptualiser ces exercices, d'imaginer les situations (« tirer une boule rouge », « calculer la probabilité que le garçon soit demi-pensionnaire »). Cependant, ces probabilités sont des outils mathématiques puissants permettant à des entreprises de se développer… Au cours de l'année de Première (voire de Terminale selon vos choix), vous appréhendez ces calculs plus complexes.

Intéressons-nous aux jeux d'argents. Cela ne correspond pas uniquement au Casino mais peut être aussi appliqué aux tombolas des milieux associatifs. De jolis lots à de magnifiques voyages ou d'énormes sommes d'argent, ceux-ci miroitent à leurs clients des gains faisant rêver de nombreuses personnes. Mais ces jeux sont-ils si intéressants ? Comment savoirs ce que les clients vont perdre ? Comment savoir l'argent que vont gagner à chaque ticket acheté ou partie de roulette jouée les associations ou entreprises ? C'est ce que nous allons voir dans ce cours…

Et n'oubliez pas ! Quelle que soit la complexité de l'exercice, la maîtrise des arbres de probabilité vous permettra de conceptualiser n'importe quel exercice. Alors n'hésitez pas à vous entrainer à les faire !

CHAPITRE 1
CONDITIONNEMENT ET INDÉPENDANCE

Le programme de seconde aborde les probabilités avec les notions d'évènements et la modélisation (diagrammes de Venn, tableaux, arbres pondérés). Le chapitre va formaliser un certain nombre de calculs avec les probabilités conditionnelles et la formule des probabilités totales. En fin de chapitre, vous verrez la notion d'indépendance d'évènements.

COMPÉTENCES VISÉES

- Construire un arbre pondéré ou un tableau en lien avec une situation donnée. Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
- Utiliser un arbre pondéré ou un tableau pour calculer une probabilité.
- Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les événements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs (tirage au sort avec équiprobabilité d'un individu dans une population).
- Dans des cas simples, calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales.
- Distinguer en situation $P_A(B)$ et $P_B(A)$, par exemple dans des situations de type « faux positifs ».
- Représenter une répétition de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau.

PRÉREQUIS

- Terminologie liée aux probabilités.
- Utilisation pour étudier un problème d'un tableau, d'un arbre ou d'un diagramme de Venn.

ACTIVITÉ 1.1 : rappels

Rappelez la définition d'une probabilité *P* sur un univers fini : $\boldsymbol{\Omega} = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_2}\}$

Complétez.

A et B sont des évènements.

A et B sont incompatibles si $P(A \cap B) = \ldots\ldots$

$\overline{A}$ est le ……………………………… de A. $P(\overline{A}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$P(A \cup B) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

ACTIVITÉ 1.2 : rappels

Dans un lycée, il y a 3 classes de 1ère. L'effectif total de ces classes est 100.

- 15 élèves dont externes ; les autres sont demi-pensionnaires.
- On compte 56 filles, dont 11 sont externes.

On interroge un élève de 1ère.
On considèrera les évènements suivants :

- F : L'élève est une fille.
- G : L'élève est un garçon.
- D : L'élève est demi-pensionnaire.
- D : L'élève est externe.

1) Complétez le tableau suivant :

	F	G	*total*
D			
E	11		
total	56		100

2) Quel est l'évènement correspondant à : *On interroge une fille* ? ……….
Quelle est sa probabilité ? $P(F) =$ …………

3) Quel est l'évènement correspondant à : *On interroge une fille externe* ? ……….
Quelle est sa probabilité ? $P(\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\%$

4) Quelle est la proportion de filles externes parmi les filles ? ……….

5) On interroge une fille. La probabilité qu'elle soit externe (on laissera le résultat sous forme d'une fraction) est notée $P_F(E)$:

$P_F(E)$ est la probabilité de F sachant E.

Déduisez de la question précédente $P_F(E)$: $P_F(E) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

6) A l'aide des questions 1 et 2, complétez avec les évènements E et F :

$$P_F(E) = \frac{P(\ldots\ldots\ldots\ldots)}{P(\ldots\ldots)}$$

7) Déterminez la probabilité qu'un élève soit un garçon sachant qu'il est demi-pensionnaire.

$$P_D(G) = \frac{P(\ldots\ldots\ldots\ldots)}{P(\ldots\ldots)} = \frac{\ldots\ldots}{85}$$

8) Quelle est la relation entre les probabilités des évènements suivants :
On interroge une fille : évènement F
On interroge une fille externe : évènement $F \cap E$
On interroge une fille demi-pensionnaire : évènement $F \cap D$.

Relation : $P(F) = P(\ldots\ldots\ldots\ldots) + P(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

Cette expression correspond à l'application de la formule des probabilités totales.

9) Quelle est la probabilité d'interroger un externe ? $P(E) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Quelle est la probabilité d'interroger un externe sachant qu'il s'agit d'une fille ?

$P_F(E) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Les deux probabilités $P_F(E)$ et $P(E)$ ne sont pas égales : le fait de savoir qu'il s'agit d'une fille influe sur la probabilité que l'élève soit externe. On dira que ces évènements ne sont pas indépendants.

SOLUTIONS DE L'ACTIVITÉ 1.1

Une probabilité est une fonction *P* qui à chaque **évènement élémentaire** $E_i = \{e_i\}$, attribue un nombre **positif** $P(E_i)$ appelé **probabilité** de l'événement $\{e_i\}$ tel que :

$$P(E_0) + P(E_1) + \ldots + P(E_n) = 1$$

A et B sont incompatibles si $P(A \cap B) = 0$
$\overline{A}$ est le complémentaire de A. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

SOLUTIONS DE L'ACTIVITÉ 1.2

1)

	F	G	*total*
D	45	40	85
E	11	4	15
total	56	44	100

2) Quel est l'évènement correspondant à : *On interroge une fille* ? F
Quelle est sa probabilité ? $P(F) = 56\%$

3) Quel est l'évènement correspondant à : *On interroge une fille externe* ? F∩G
Quelle est sa probabilité ? $P(F \cap E) = 11\%$

4) Quelle est la proportion de filles externes parmi les filles ? $\frac{11}{56}$

5) On a donc : $P_F(E) = \frac{11}{56}$

6) $P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$

7) $P_D(G) = \frac{P(D \cap G)}{P(D)} = \frac{40}{85}$

8) $P(F) = P(F \cap E) + P(F \cap D)$:

9) Quelle est la probabilité d'interroger un externe ? $P(E) = 15\%$

Quelle est la probabilité d'interroger un externe sachant qu'il s'agit d'une fille ?
$P_F(E) = \frac{11}{56}$

Nous avons donc vu 3 points :

- -les probabilités conditionnelles ;
- -les probabilités totales ;
- -l'indépendance ou non d'évènements.

Ces 3 points font l'objet de ce chapitre.

01 CONDITIONNEMENT ET INDÉPENDANCE

Probabilités conditionnelles

Dans ce qui suit, *P* est une probabilité associée à un univers Ω.

L'ESSENTIEL

Soit A et B deux évènements avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité conditionnelle de B sachant A est la probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé. Elle se note : $P_A(B)$.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- On **note parfois :** $P_A(B) = P(\mathrm{A/B})$.
- P_A est une loi de probabilité.
  Cela implique la propriété suivante.

L'ESSENTIEL

Si $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_2\}$:
$0 \leq P_A(\{e_i\}) \leq 1$
$P_A(\{e_1\}) + P_A(\{e_2\}) + \cdots + P_A(\{e_n\}) = 1$

Conséquence : pour tout évènement B, $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET TABLEAUX

Exemple :

	A	$\bar{A}$	*total*
B	0,2	0,1	0,3
$\bar{B}$	0,4	0,3	0,7
total	0,6	0,4	1

probabilité de A sachant B : $P(A \cap B) = 0{,}2$

probabilité de B sachant A : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}6} = \dfrac{1}{3}$

probabilité de A sachant B : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}3} = \dfrac{2}{3}$

probabilité de $\bar{A}$ sachant $\bar{B}$: $P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0{,}3}{0{,}7} = \frac{3}{7}$

À VOUS DE JOUER 1

On complètera le tableau au fur et à mesure :

	A	$\bar{A}$	*total*
B			
$\bar{B}$			
total			1

Données :

$P(A) = 0{,}7 \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}2$

$P_A(B) = \dfrac{3}{7}$ donc $P(A \cap B) = P(A) \times \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Finissez le tableau.

probabilité de A sachant B : $P_{\ldots}(\ldots) = \dfrac{P(\ldots\ldots\ldots)}{P(\ldots)} = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$

probabilité de $\bar{A}$ sachant $\bar{B}$: $P_{\ldots}(\ldots) = \dfrac{P(\ldots\ldots\ldots)}{P(\ldots)} = \dfrac{\ldots}{\ldots} = \ldots$

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET ARBRES PONDÉRÉS

Exemple :

Un ostréiculteur élève deux espèces d’huîtres : « la plate » et « la japonaise ». Chaque année, les huîtres plates représentent 15% de sa production. Les huîtres sont dites de calibre n°3 lorsque leur masse est comprise entre 66 g et 85 g. Seulement 10% des huîtres plates sont de calibre n°3, alors que 80% des huîtres japonaises le sont.

Le service sanitaire prélève une huître au hasard dans la production de l’ostréiculteur.
On suppose que toutes les huitres ont la même chance d’être choisies.
On considère les évènements suivants :

- J : « l’huître prélevée est une huître japonaise »,
- C : « l’huître prélevée est de calibre n°3 ».

Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.

Analyse

On connait $P(\mathrm{J})=0{,}15$. Donc $P(\overline{\mathrm{J}})=0{,}85$

Seulement 10% des huîtres plates sont de calibre n°3 :

On donne ici la probabilité que l'huitre est de calibre n°3 **sachant** qu'elle est plate. Il s'agit donc de la probabilité conditionnelle $P_{\bar{J}}(\mathrm{C})$.

$P_{\bar{J}}(\mathrm{C})=0{,}1$

On en déduit : $P_{\bar{J}}(\overline{\mathrm{C}})=0{,}9$

80% des huîtres japonaises le sont.

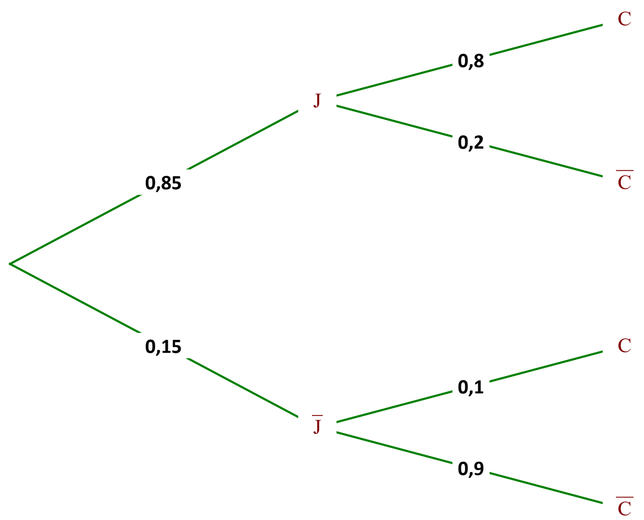
On donne ici la probabilité que l'huitre est de calibre n°3 **sachant** qu'elle est japonaise. Il s'agit donc de la probabilité conditionnelle $P_J(\mathrm{C})$.

$P_J(\mathrm{C})=0{,}8$

On en déduit : $P_J(\overline{\mathrm{C}})=0{,}2$

Construction de l'arbre

Le premier niveau correspondra à J et $\overline{\mathrm{J}}$. Le second niveau correspondra à C et $\overline{\mathrm{C}}$.
Les probabilités du second niveau sont des probabilités conditionnelles "sachant la feuille par laquelle on est passé".

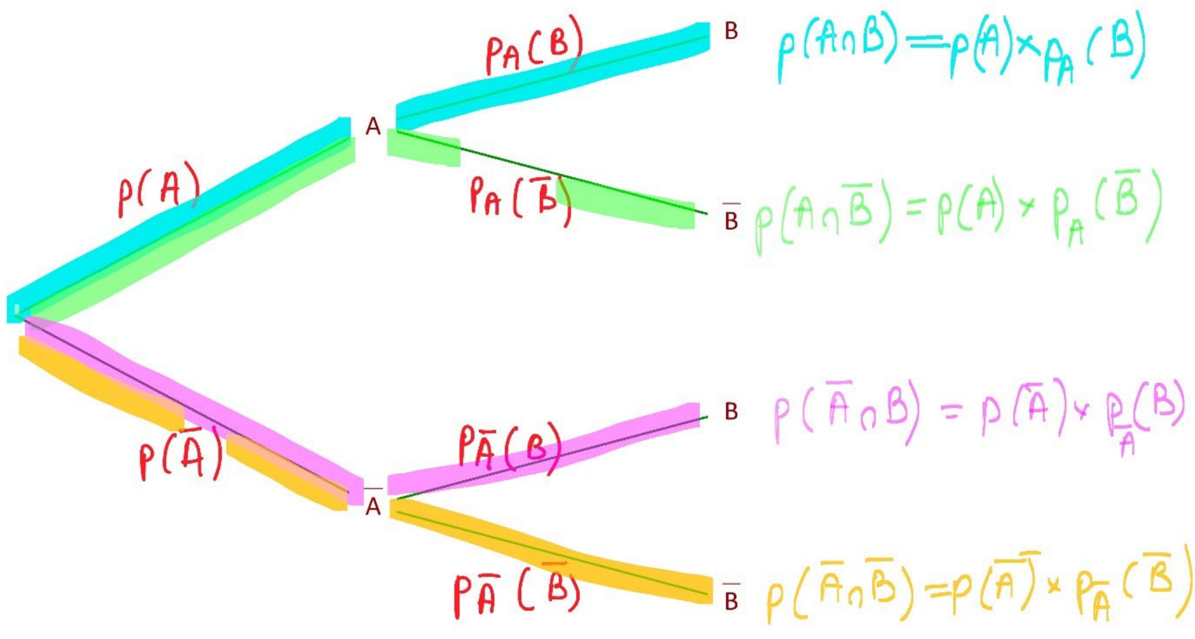


Quelle est la probabilité qu'une huitre soit Japonaise calibrée n°3 ?

$P(\mathrm{J}\cap\mathrm{C})=P(\mathrm{J})\times P_J(\mathrm{C})=0{,}85\times0{,}8=0{,}68$

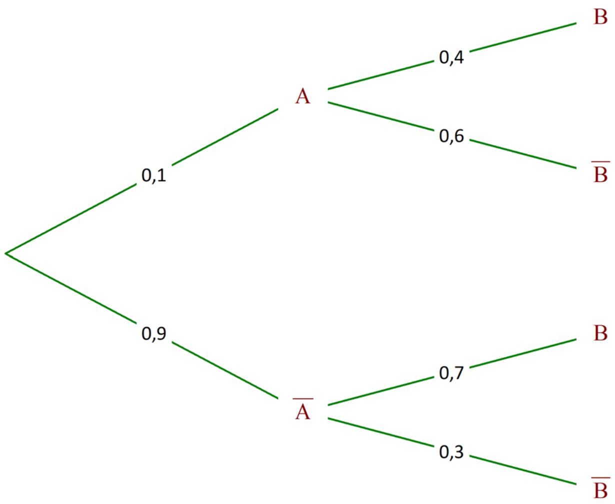
On retrouve ici ce que vous faisiez en seconde : pour avoir la probabilité de l'évènement $\mathrm{J}\cap\mathrm{C}$, on multiplie les probabilités des branches par lesquelles on est passé.

Pour 2 niveaux, A et son complémentaire, B et son complémentaire, on obtient l'arbre suivant :



À VOUS DE JOUER 2

Complétez.



$P(A) = \ldots\ldots\ldots$ $\quad P(\overline{A}) = \ldots\ldots\ldots$ $\quad P_A(B) = \ldots\ldots\ldots$

$P_{\overline{A}}(B) = \ldots\ldots\ldots$ $\quad P_{\overline{A}}(B) + P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \ldots\ldots\ldots$ $\quad P(\overline{A} \cap B) = P(\ldots\ldots\ldots) \times P_{\ldots\ldots}(\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

02 CONDITIONNEMENT ET INDÉPENDANCE

Formule des probabilités totales

L'ESSENTIEL

Une partition d'un ensemble X est un ensemble de parties non vides de X deux à deux disjointes et dont l'union est X.

- Une partition $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est également appelée système complet d'évènements.

- On peut assimiler une partition aux pièces constituant un puzzle, ou par exemple à un découpage administratif (les régions forment une partition de la France).

Exemple :

$\Omega = \{a, b, c, e, f, g\}$

A=$\{a, b, c\}$ B=$\{e\}$ C=$\{f, g\}$

A,B et C forment une partition de l'univers (système complet d'évènements).

À VOUS DE JOUER 3

Dites si oui ou non les ensembles A,B ou A,B,C forment une partition de l'univers :

$$\Omega = \{a, b, c, d, f, g, i, j\}$$

1) A=$\{a, b, c, i, j\}$ B=$\{d\}$ C=$\{f, g\}$ ……….
2) A=$\{a, b, c, i, j\}$ B=$\{d, i\}$ C=$\{f, g\}$ ……….
3) A=$\{a, b, c, j\}$ B=$\{d\}$ C=$\{f, g\}$ ……….
4) A=$\{a, b, c, j\}$ B=$\{d, i, f, g\}$ ……….

L'ESSENTIEL

Formule des probabilités totales :

Soit B un évènement et   des évènements formant une partition de l'univers.

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

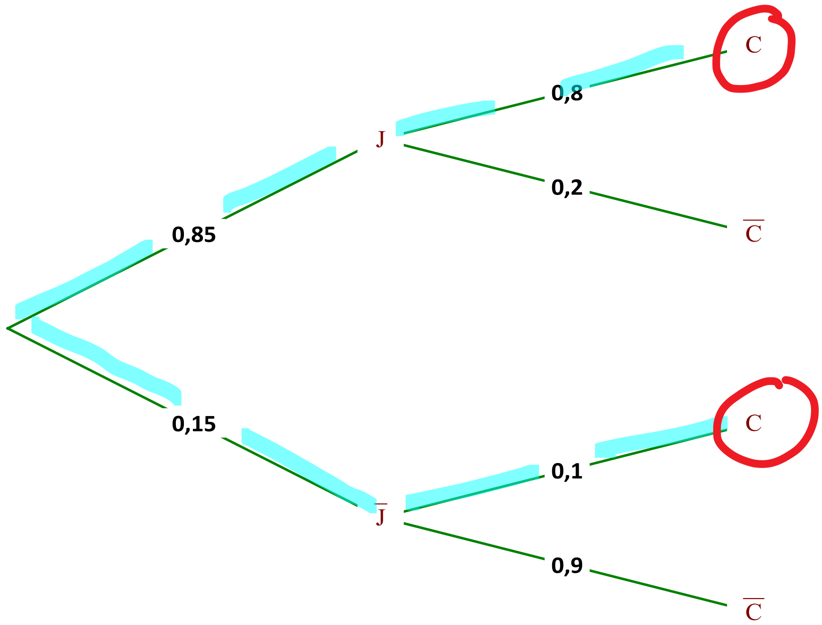
$$P(B) = P(A_1)\, P_{A_1}(B) + P(A_2)\, P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n)\, P_{A_n}(B)$$

- Pratiquement, pour calculer la probabilité d'un évènement du 2ème niveau d'un arbre, on fait la somme des chemins qui mènent à cet évènement.

Exemple :

On reprend l'exemple sur les huitres.

Déterminer la probabilité qu'une huitre soit de calibre n°3.



Pour calculer P(C), on fait la somme des probabilités des chemins qui mènent à C.

$P(C) = 0{,}85 \times 0{,}8 + 0{,}15 \times 0{,}1$

Voici maintenant la rédaction attendue :

J et $\overline{J}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(J \cap C) + P(\overline{J} \cap C) \\ &= P(J)P_J(C) + P(\overline{J})P_{\overline{J}}(C) \\ &= 0{,}85 \times 0{,}8 + 0{,}15 \times 0{,}1 = 0{,}695 \end{aligned}$$

Une question classique après avoir calculé $P(C)$.

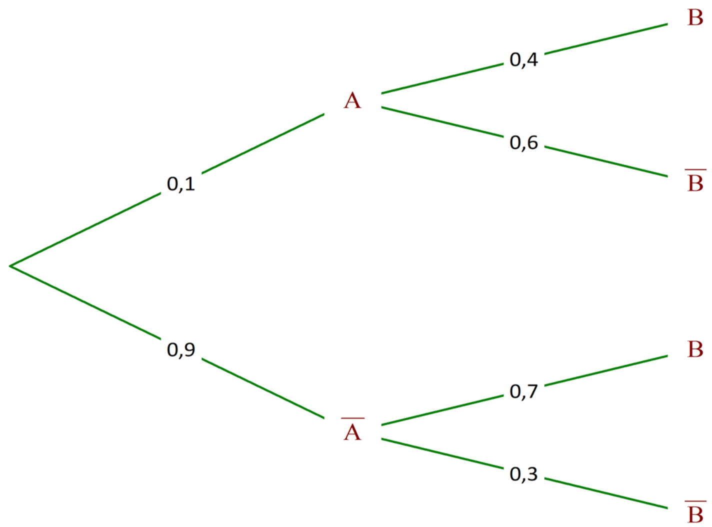
On a une huitre de calibre n°3. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit japonaise ?

Il faut donc calculer $P_C(J)$ Il s'agit d'un calcul d'une probabilité conditionnelle, mais le *sachant* porte sur un évènement du 2ème niveau.

On revient à la définition des probabilités totales : $P_C(J) = \dfrac{P(C \cap J)}{P(C)} = \dfrac{0{,}68}{0{,}695} = 0{,}98$.

La probabilité est de 98%.

À VOUS DE JOUER 4



1) Surligner les chemins qui mènent à B. En déduire $P(B) =$ ....

2) Déterminer $P(B)$ en rédigeant la solution :

A et $\overline{A}$ forment une .... de l'univers. D'après la formule des ....

.... :

$P(B) = P(................) + P(...............)$

$= P(A)P_A(B) +$ ....

$=$ .... $=$ ....

03 CONDITIONNEMENT ET INDÉPENDANCE

Indépendance de deux événements

Exemple préliminaire :

On tire dans un jeu de 32 cartes une carte.
On appelle A l'évènement : "*La carte est un roi*".
On appelle B l'évènement : "*La carte est un pique*".

On a 8 cartes "Pique" dans un jeu de 32 cartes. On a une chance sur 4 d'avoir un *pique*.
Comme il y a 4 rois, si on sait qu'on a tiré un roi, on a également une chance sur 4 d'avoir un *pique*.
Donc le fait de savoir qu'on a tiré un roi ne change pas la probabilité d'avoir un *pique*.
De la même manière, on a 1 chance sur 8 de tirer un roi.
Comme il y a 8 *pique*, si on sait qu'on a tiré un *pique*, on a également une chance sur 8 d'avoir un roi.
Donc le fait de savoir qu'on a tiré un *pique* ne change pas la probabilité d'avoir un roi.

On dira les A et B sont des évènements indépendants.

$A \cap B$ est l'évènement : "*La carte est le roi de pique.*"

$P(A \cap B) = \dfrac{1}{32}$.

$P(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ $\quad P(B) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$ $\quad P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{32}$

On remarque que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

L'ESSENTIEL

Si A et B ont des probabilités non nulles, les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

(2) $P_B(A) = P(A)$

(3) $P_A(B) = P(B)$

A et B sont indépendants si et seulement si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

- Si les évènements A et B sont indépendants et de probabilités non nulles, le fait de savoir que B est réalisé ne modifie pas la probabilité de A. De même, le fait de savoir que A est réalisé ne modifie pas la probabilité de B.

Justification

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.

$$P_B(A) = P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

De même :

$$P_A(B) = P(B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

L'ESSENTIEL

Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B le sont aussi.

À VOUS DE JOUER 5

Justification de : Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B le sont aussi.

A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales :

$P(B) = P(.........) + P(.........)$ donc $P(\overline{A} \cap B) = P(.........) - P(A \cap B)$

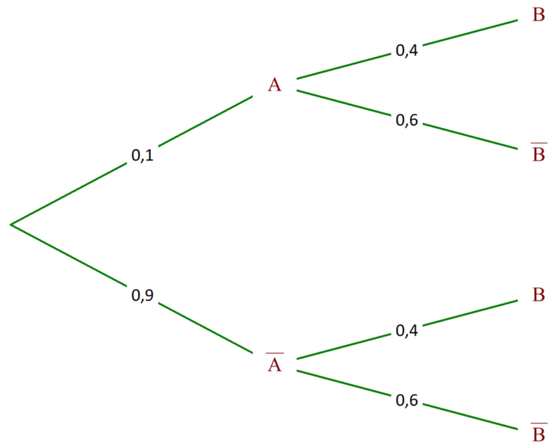
Comme A et B sont indépendants : $P(A \cap B) =$ ....

On en déduit que : $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - .... = P(B) \times (1 - ....) = P(B) \times P(.........)$

$\overline{A}$ et B sont indépendants.

À VOUS DE JOUER 6

A et B sont-ils indépendants ? Déterminez $P(B)$ (en rédigeant en page suivante).



....

....

....

....

$P_A(\text{B}) = \ldots\ldots\ldots\ldots = P(\text{B})$ donc A et B ....

➢ On peut constater que les probabilités des branches issues de A et de $\overline{\text{A}}$ sont identiques.

04 CONDITIONNEMENT ET INDÉPENDANCE

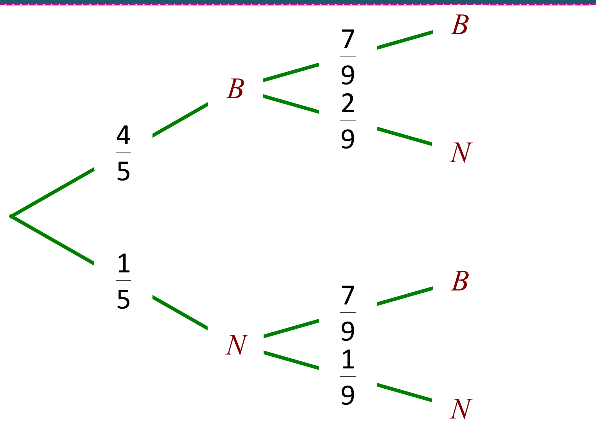
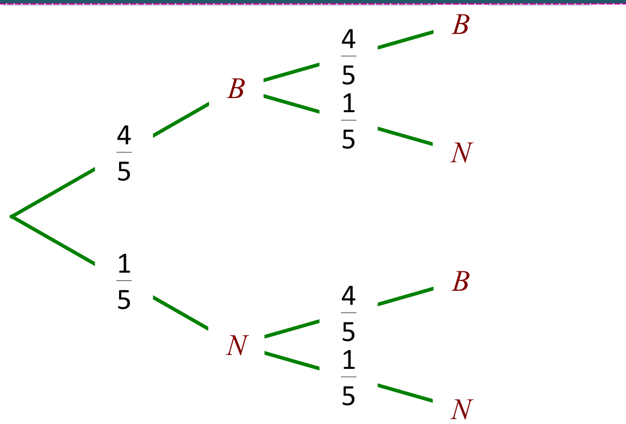
Succession d'expériences aléatoires indépendantes

L'ESSENTIEL

Deux expériences aléatoires sont indépendantes si le résultat de la première n'a aucune influence sur la deuxième.

Exemple : une urne contient 8 boules rouges et 2 boules noires.
Énoncé 1 → On tire au hasard successivement 2 boules sans remise.
Énoncé 2 → On tire au hasard 1 boule puis on la remet et on en tire une seconde.

Voici les arbres de probabilités correspondant aux deux énoncés :

Énoncé 1	Énoncé 2
	
Le résultat de la première expérience influe sur les probabilités de la deuxième.	Le résultat de la première expérience n'influe pas sur les probabilités de la deuxième : on retrouve 4/5 et 1/5 dans le 2ème tirage, qu'on ait tiré une boule blanche ou noire lors du premier.

➢ Des expériences de tirage « sans remise » sont généralement non indépendantes. Des expériences de tirages « avec remise » appelés également tirages exhaustifs) sont indépendantes.

L'ESSENTIEL

On considère deux épreuves **identiques et indépendantes**. Les issues de chaque épreuve sont $R_1, R_2, \dots, R_n$. On s'intéresse au couple formé par les résultats des deux épreuves (dans l'ordre).

$$p((R_i, R_j)) = p(R_i) \times p(R_j)$$

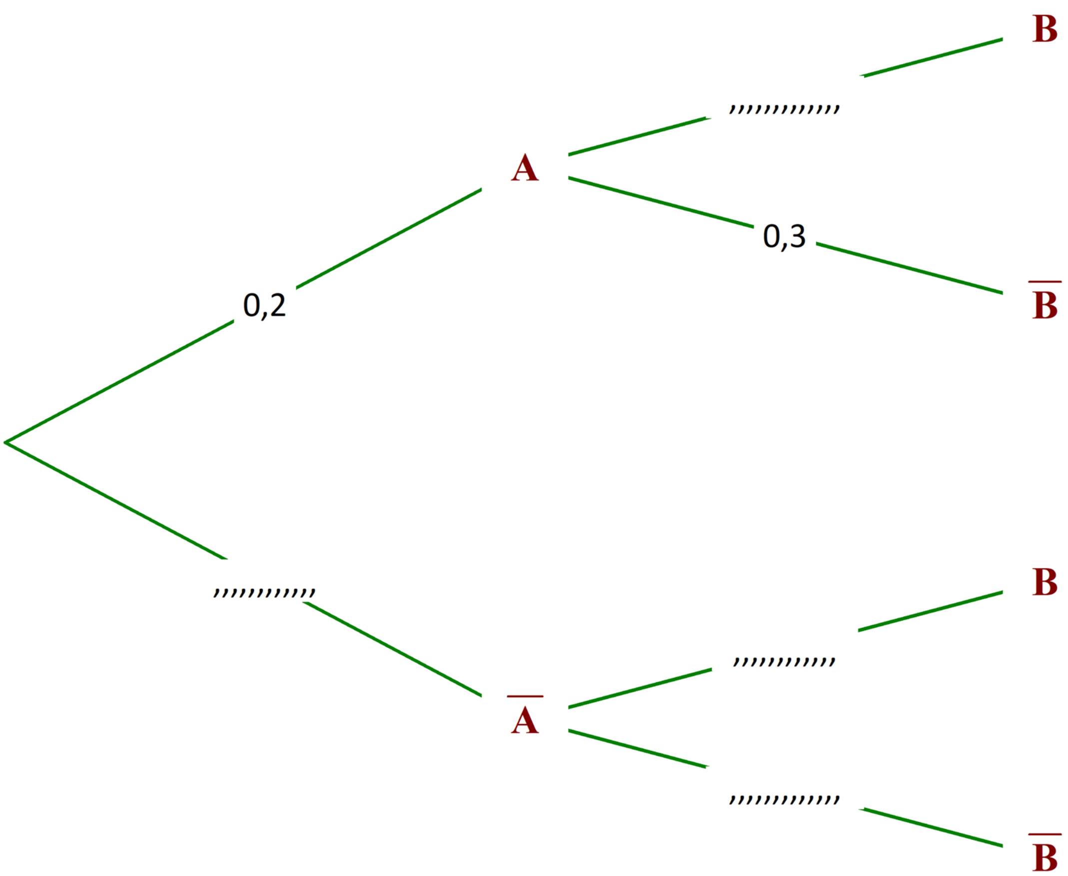
Exemple : énoncé 2 de l'exemple précédent. Il s'agit de deux épreuves identiques indépendantes.

$$p((B,B)) = p(B) \times p(B) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$p((B,N)) = p(B) \times p(N) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$$

À VOUS DE JOUER 7

L'arbre ci-dessous modélise 2 épreuves successives indépendantes. Complétez-le.



LE TEMPS DU BILAN

- Soit A et B deux évènements avec P(A)≠0 .
  La probabilité conditionnelle de B sachant A est la probabilité que B se réalise sachant que A est réalisée. Elle se note : $P_A(B)$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- Une partition d'un ensemble X est un ensemble de parties non vides de X deux à deux disjointes et dont l'union est X.
  Une partition A_1,A_2,…,A_n_n est une partition de l'univers, est également appelée système complet d'évènements.

- Formule des probabilités totales :
  Soit B un évènement et des évènements formant une partition de l'univers.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n)P_{A_n}(B) \end{aligned}$$

- Si A et B ont des probabilités non nulles, les propositions suivantes sont équivalentes :

  (1) $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$
  (2) $\boldsymbol{P_B(A) = P(A)}$
  (3) $\boldsymbol{P_A(B) = P(B)}$

- A et B sont indépendants si et seulement si : $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$

EXERCICES

Abordons maintenant une série d'exercices, afin de vérifier vos connaissances.
Les exercices ont été classés dans un ordre d'approfondissement croissant.
Les réponses aux exercices se trouvent en fin de manuel.

EXERCICE 01

Vrai ou faux ? Justifiez les réponses.

1) A et B sont des évènements indépendants avec : $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 1$.

Affirmation 1 : $p(A \cap B) = p_B(A)$

---

2) Une maladie touche 1% d'une population. Un test de dépistage est positif à 99% chez les individus malades et négatif à 98% chez les individus non malades.
On choisit un individu au hasard dans la population :
M est l'évènement : "L'individu est malade".
T est l'évènement : "Le test est positif".

Affirmation 2 : $p_M(T) + p_{\overline{M}}(T) = p(T)$

Affirmation 3 : Si le test est positif, l'individu a 2 chances sur 3 de ne pas être malade.

---

3) A et B sont 2 évènements tels que : $p(A) = 0{,}4$ $p_A(B) = 0{,}7$ $p_{\overline{A}}(B) = 0{,}1$

Affirmation 4 : La probabilité de A sachant B vaut $\dfrac{14}{41}$

EXERCICE 02

Il existe 4 groupes sanguins A, B, AB et O. Le sang est également caractérisé par le facteur Rhésus, qui peut être positif ou négatif.

Dans une population donnée, on considère qu'il y a 40% d'individus de groupe A, 10% de groupe B, 5% de groupe AB.
Les pourcentages de Rhésus positifs sont : 82% pour le groupe A, 81% le groupe B, 83% le groupe AB, 80% le groupe O.

1) Faites un arbre modélisant la situation.

2) Quelle est la probabilité qu'un individu soit O Rhésus négatif ?

3) Quelle est la probabilité qu'un individu ait un Rhésus positif ?

4) Un individu est Rhésus positif. Quelle est la probabilité qu'il soit de groupe AB ?

EXERCICE 03

Dans une réunion, il y a 18 femmes et 24 hommes. 12 personnes portent des lunettes dont le quart sont des femmes.
On choisit une personne au hasard.
A est l'évènement : "La personne est un homme".
B est l'évènement : "La personne porte des lunettes".

1) En utilisant un tableau, répondez aux questions suivantes :

a. Quelle est la probabilité que la personne soit un homme portant des lunettes ?

b. La personne porte des lunettes. Quelle est la probabilité que ce soit un homme ?

c. Quelle est la probabilité qu'un homme porte des lunettes ?

2) On va retrouver les résultats précédents par le calcul.

a. Traduisez les données de l'énoncé avec les évènements.

b. Déduisez $p_B(A)$

c. Déterminez $p_A(B)$

3) Autant d'hommes que de femmes portent des lunettes. Peut-on en déduire que le fait d'être homme ou femme est indépendant du fait de porter ou non des lunettes ?

EXERCICE 04

Un composant est constitué de 2 éléments *a* et *b*. Si l'un des éléments est en panne, le composant est en panne. Une panne survient sur l'un des éléments indépendamment de l'autre élément.
A est l'évènement : "L'élément *a* est en panne."
B est l'évènement : "L'élément *b* est en panne."
$p(A) = 0,12 \quad p(B) = 0,06$

Quelle est la probabilité pour le composant soit en panne ?

EXERCICE 05

On s'intéresse à la clientèle d'un musée. Chaque visiteur peut acheter son billet sur internet avant sa visite ou l'acheter aux caisses du musée à son arrivée. Pour l'instant, la location d'un audioguide pour la visite n'est possible qu'aux caisses du musée. Le directeur s'interroge sur la pertinence de proposer la réservation des audioguides sur internet. Une étude est réalisée. Elle révèle que :

- 70% des clients achètent leur billet sur internet ;
- parmi les clients achetant leur billet sur internet, 35% choisissent à leur arrivée au musée une visite avec un audioguide ;
- parmi les clients achetant leur billet aux caisses du musée, 55% choisissent une visite avec un audioguide.

On choisit au hasard un client du musée. On considère les évènements suivants :

- A : « Le client choisit une visite avec un audioguide »;
- B : « Le client achète son billet sur internet avant sa visite ».

1) Représentez la situation à l'aide d'un arbre pondéré

2) Démontrez que la probabilité que le client choisisse une visite avec un audioguide est égale à 0,41.

3) On s'intéresse aux clients qui visitent le musée avec un audioguide. Si plus de la moitié d'entre eux ont acheté leur billet sur internet alors le directeur proposera à l'avenir la location de l'audioguide sur le site internet du musée. D'après les résultats de cette étude, que va décider le directeur ? Justifiez la réponse.

EXERCICES

EXERCICE 06

On lance 3 fois une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir « Face » est p=0,6. Les lancers sont supposés indépendants.
On appelle S l'évènement : "obtenir Face" (S est l'évènement succès).
On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de « Face » obtenu.

1) Faites un arbre de probabilités.

2) Ajoutez une colonne à droite de l'arbre donnant le nombre de succès pour chaque colonne.

3) Quelles sont les valeurs prises par X ?

----

4)

a. Combien de chemins conduisent à 3 succès ? Quelle est la probabilité pour ce chemin ?

----

b. Combien de chemins conduisent à 2 succès ? Quelle est la probabilité pour chacun de ces chemins ?

----

5) Complétez le tableau :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
Nombre de chemins	1	3		
	$0,4^3$	$0,6\times0,4^2$		
$P(X=k)$	$1\times0,4^3=0,064$	$3\times0,6\times0,4^2=0,288$		

6) Déterminez son espérance mathématique de X et sa variance.

EXERCICE 07

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est «de type S»;
- soit malade (atteint par le virus);
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.
Pour tout entier naturel *n*, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine *n*, on observe qu'en semaine *n*+1 : 85% restent de type S, 5% deviennent malades et 10% deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine *n*, on observe qu'en semaine *n*+1 : 65% restent malades, et 35% sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine *n*+1.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les évènements suivants :

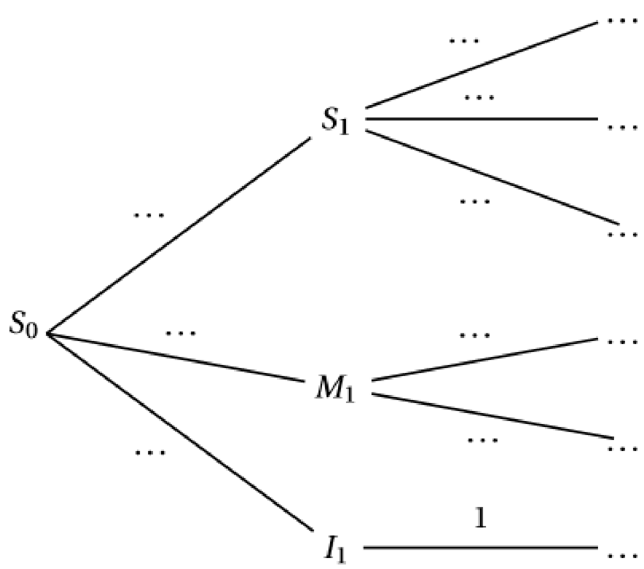
- S_n :« l'individu est de type S en semaine *n* » ;
- M_n :« l'individu est malade en semaine *n* » ;
- I_n : « l'individu est immunisé en semaine *n* ».

En semaine0, tous les individus sont considérés «de type S », on a donc les probabilités suivantes :
$P(S_0)=1$; $P(M_0)=0$ et $P(I_0)=0$.

PARTIE A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1) Complétez l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2) Montrez que $P(I_2)=0{,}2025$.

3) Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

PARTIE B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $u_n=P(S_n)$, $v_n=p(M_n)$ et $w_n=P(I_n)$ les probabilités respectives des évènements S_n, M_n, I_n.

4) Justifiez que, pour tout entier naturel *n*, on a: $u_n+v_n+w_n=1$.

On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0{,}65v_n + 0{,}05u_n$.

5) À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites $(u_n),(v_n),(w_n)$

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,8500	0,0500	0,1000
4	2	0,7225	0,0750	0,2025
5	3	0,6141	0,0849	0,3010
6	4	0,5220	0,0859	0,3921
7	5	0,4437	0,0819	0,4744
8	6	0,3771	0,0754	0,5474
...	...	...	...	...
20	18	0,0536	0,0133	0,9330
21	19	0,0456	0,0113	0,9431
22	20	0,0388	0,0096	0,9516

Pour répondre aux questions a. et b. suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.

a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n)?

----

b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'un certain rang N, appelé le «pic épidémique» : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande. Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

----

6)

a. Justifiez que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}85u_n$

----

b. Déduisez l'expression de u_n en fonction de n.

----

c. Montrez, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel *n*,

$$v_n = \frac{1}{4}(0{,}85^n - 0{,}65^n)$$ vn =

7) Calculez les limites de chacune des suites $(u_n), (v_n), (w_n)$. Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le devoir n°1