COURS PI

☆ L'école sur-mesure ☆

de la Maternelle au Bac, Établissement d'enseignement privé à distance, déclaré auprès du Rectorat de Paris

Première - Module 6 - Fonctions exponentielle et logarithme

Mathématiques

v.5.1

- ***Guide de méthodologie***
  pour appréhender notre pédagogie
- ***Leçons détaillées***
  pour apprendre les notions en jeu
- ***Exemples et illustrations***
  pour comprendre par soi-même
- ***Prolongement numérique***
  pour être acteur et aller + loin
- ***Exercices d'application***
  pour s'entraîner encore et encore
- ***Corrigés des exercices***
  pour vérifier ses acquis

www.cours-pi.com

Paris & Montpellier

EN ROUTE VERS LE BACCALAURÉAT

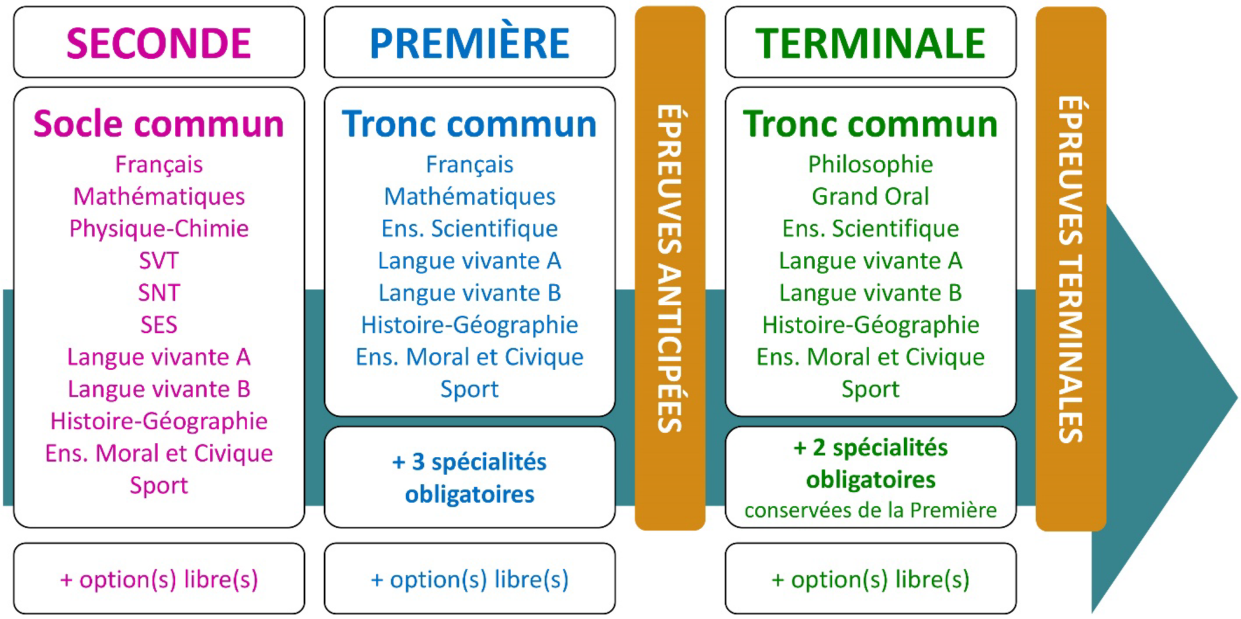
Comme vous le savez, **la réforme du Baccalauréat** est entrée en vigueur progressivement jusqu'à l'année 2021, date de délivrance des premiers diplômes de la nouvelle formule.

Dans le cadre de ce nouveau Baccalauréat, **notre Etablissement**, toujours attentif aux conséquences des réformes pour les élèves, s'est emparé de la question avec force **énergie** et **conviction** pendant plusieurs mois, animé par le souci constant de la réussite de nos lycéens dans leurs apprentissages d'une part, et par la **pérennité** de leur parcours d'autre part. Notre Etablissement a questionné la réforme, mobilisé l'ensemble de son atelier pédagogique, et déployé tout **son savoir-faire** afin de vous proposer un enseignement tourné continuellement vers l'**excellence**, ainsi qu'une scolarité tournée vers la **réussite**.

- Les **Cours Pi** s'engagent pour faire du parcours de chacun de ses élèves un **tremplin vers l'avenir**.
- Les **Cours Pi** s'engagent pour ne pas faire de ce nouveau Bac un diplôme au rabais.
- Les **Cours Pi** vous offrent **écoute** et **conseil** pour coconstruire une **scolarité sur-mesure**.

LE BAC DANS LES GRANDES LIGNES

Ce nouveau Lycée, c'est un enseignement à la carte organisé à partir d'un large tronc commun en classe de Seconde et évoluant vers un parcours des plus spécialisés année après année.



CE QUI A CHANGÉ

- Il n'y a plus de séries à proprement parler.
- Les élèves choisissent des spécialités : trois disciplines en classe de Première ; puis n'en conservent que deux en Terminale.
- Une nouvelle épreuve en fin de Terminale : le Grand Oral.
- Pour les lycéens en présentiel l'examen est un mix de contrôle continu et d'examen final laissant envisager un diplôme à plusieurs vitesses.
- Pour nos élèves, qui passeront les épreuves sur table, le Baccalauréat conserve sa valeur.

CE QUI N'A PAS CHANGÉ

- Le Bac reste un examen accessible aux candidats libres avec examen final.
- Le système actuel de mentions est maintenu.
- Les épreuves anticipées de français, écrit et oral, tout comme celle de spécialité abandonnée se dérouleront comme aujourd'hui en fin de Première.

A l'occasion de la réforme du Lycée, nos manuels ont été retravaillés dans notre atelier pédagogique pour un accompagnement optimal à la compréhension. Sur la base des programmes officiels, nous avons choisi de créer de nombreuses rubriques :

- **Suggestions de lecture** pour s'ouvrir à la découverte de livres de choix sur la matière ou le sujet
- **L'essentiel** et **le temps du bilan** pour souligner les points de cours à mémoriser au cours de l'année
- **À vous de jouer** pour mettre en pratique le raisonnement vu dans le cours et s'accaparer les ressorts de l'analyse, de la logique, de l'argumentation, et de la justification
- Et enfin ... la rubrique **Les Clés du Bac by Cours Pi** qui vise à vous donner, et ce dès la seconde, toutes les cartes pour réussir votre examen : notions essentielles, méthodologie pas à pas, exercices types et fiches étape de résolution !

MATHÉMATIQUES PREMIÈRE

Module 6 – Fonctions exponentielle et logarithme

L'AUTEURE

Sylvie LAMY

« Faire des maths c'est jouer aux legos. Il s'agit d'assembler des briques pour solutionner des problèmes ». Diplômée de l'Ecole Polytechnique et agrégée de Mathématiques, elle poursuit aujourd'hui son parcours professionnel à l'Institut Géographique National et au Ministère des Transports comme chargée de mission sur les projets spatiaux. Passionnée par les sciences physiques, son approche pédagogique réside dans la transmission du raisonnement scientifique. Elle attend de ses élèves de comprendre et d'expliciter leur démarche dans la résolution des problèmes.

PRÉSENTATION

Ce **cours** est divisé en chapitres, chacun comprenant :

- Le **cours**, conforme aux programmes de l'Education Nationale
- Des **exercices d'application et d'entraînement**
- Les **corrigés** de ces exercices
- Des **devoirs** soumis à correction (et ***se trouvant hors manuel***). Votre professeur vous renverra le corrigé-type de chaque devoir après correction de ce dernier.

Pour une manipulation plus facile, les corrigés-types des exercices d'application et d'entraînement sont regroupés en fin de manuel.

CONSEILS A L'ÉLÈVE

Vous disposez d'un support de Cours complet : **prenez le temps** de bien le lire, de le comprendre mais surtout de l'**assimiler**. Vous disposez pour cela d'exemples donnés dans le cours et d'exercices types corrigés.
Vous pouvez rester un peu plus longtemps sur une unité mais travaillez régulièrement.

LES FOURNITURES

Vous devez posséder :

- une **calculatrice graphique pour l'enseignement scientifique au Lycée comportant un mode examen (requis pour l'épreuve du baccalauréat).**
- un **tableur** comme Excel de Microsoft (payant) ou Calc d'Open Office (gratuit et à télécharger sur http://fr.openoffice.org/). En effet, certains exercices seront faits de préférence en utilisant un de ces logiciels, mais vous pourrez également utiliser la calculatrice).

LES DEVOIRS

Les devoirs constituent le moyen d'évaluer l'acquisition de vos *savoirs* (« Ai-je assimilé les notions correspondantes ? ») et de vos *savoir-faire* (« Est-ce que je sais expliquer, justifier, conclure ? »).

Placés à des endroits clés des apprentissages, ils permettent la vérification de la bonne assimilation des enseignements.

Aux *Cours Pi*, vous serez accompagnés par un professeur selon chaque matière tout au long de votre année d'étude. Référez-vous à votre « Carnet de Route » pour l'identifier et découvrir son parcours.
Avant de vous lancer dans un devoir, assurez-vous d'avoir **bien compris les consignes**.
Si vous repérez des difficultés lors de sa réalisation, n'hésitez pas à le mettre de côté et à revenir sur les leçons posant problème. **Le devoir n'est pas un examen**, il a pour objectif de s'assurer que, même quelques jours ou semaines après son étude, une notion est toujours comprise.
Aux *Cours Pi*, chaque élève travaille à son rythme, parce que chaque élève est différent et que ce mode d'enseignement permet le « sur-mesure ».
Nous vous engageons à respecter le moment indiqué pour faire les devoirs. Vous les identifierez par le bandeau suivant :

Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le devoir n°1

Il est **important de tenir compte des remarques, appréciations et conseils du professeur-correcteur**. Pour cela, il est **très important d'envoyer les devoirs au fur et à mesure** et non groupés. **C'est ainsi que vous progresserez !**

Donc, dès qu'un devoir est rédigé, envoyez-le aux *Cours Pi* par le biais que vous avez choisi :

1) Par **soumission en ligne** via votre espace personnel sur **PoulPi**, pour un envoi **gratuit**, **sécurisé** et plus **rapide**.
2) Par **voie postale** à *Cours Pi*, 9 rue Rebuffy, 34 000 Montpellier
   *Vous prendrez alors soin de joindre une **grande enveloppe** **libellée à vos nom et adresse**, et **affranchie** **au tarif en vigueur** pour qu'il vous soit retourné par votre professeur*

N.B. : *quel que soit le mode d'envoi choisi, vous veillerez à **toujours joindre l'énoncé du devoir ;** plusieurs énoncés étant disponibles pour le même devoir.*
N.B. : *si vous avez opté pour un envoi par voie postale et que vous avez à disposition un scanner, nous vous engageons à conserver une copie numérique du devoir envoyé. Les pertes de courrier par la Poste française sont très rares, mais sont toujours source de grand mécontentement pour l'élève voulant constater les fruits de son travail.*

SOUTIEN ET DISPONIBILITÉ

VOTRE RESPONSABLE PÉDAGOGIQUE

Professeur des écoles, professeur de français, professeur de maths, professeur de langues : notre Direction Pédagogique est constituée de spécialistes capables de dissiper toute incompréhension.

Au-delà de cet accompagnement ponctuel, notre Etablissement a positionné ses Responsables pédagogiques comme des « super profs » capables de co-construire avec vous une scolarité sur-mesure.
En somme, le Responsable pédagogique est votre premier point de contact identifié, à même de vous guider et de répondre à vos différents questionnements.

Votre Responsable pédagogique est la personne en charge du suivi de la scolarité des élèves.
Il est tout naturellement votre premier référent : une question, un doute, une incompréhension ? Votre Responsable pédagogique est là pour vous écouter et vous orienter. Autant que nécessaire et sans aucun surcoût.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?	Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.
QUEL EST SON RÔLE ?	Orienter les parents et les élèves. Proposer la mise en place d'un accompagnement individualisé de l'élève. Faire évoluer les outils pédagogiques. Encadrer et coordonner les différents professeurs.

VOS PROFESSEURS CORRECTEURS

Notre Etablissement a choisi de s'entourer de professeurs diplômés et expérimentés, parce qu'eux seuls ont une parfaite connaissance de ce qu'est un élève et parce qu'eux seuls maîtrisent les attendus de leur discipline. En lien direct avec votre Responsable pédagogique, ils prendront en compte les spécificités de l'élève dans leur correction. Volontairement bienveillants, leur correction sera néanmoins juste, pour mieux progresser.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?	Une question sur sa correction ? • faites un mail ou téléphonez à votre correcteur et demandez-lui d'être recontacté en lui laissant un message avec votre nom, celui de votre enfant et votre numéro. • autrement pour une réponse en temps réel, appelez votre Responsable pédagogique.

LE BUREAU DE LA SCOLARITÉ

Placé sous la direction d'Elena COZZANI, le Bureau de la Scolarité vous orientera et vous guidera dans vos démarches administratives. En connaissance parfaite du fonctionnement de l'Etablissement, ces référents administratifs sauront solutionner vos problématiques et, au besoin, vous rediriger vers le bon interlocuteur.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?	Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi. 04.67.34.03.00 scolarite@cours-pi.com

LE SOMMAIRE

Mathématiques - Module 6 - Fonctions, exponentielle et logarithme

COMPÉTENCES VISÉES

- Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction.
- Pour une valeur numérique strictement positive de k, représenter graphiquement les fonctions $t \mapsto e^{-kt}$ et $t \mapsto e^{kt}$.
- Modéliser une situation par une croissance, une décroissance exponentielle (par exemple évolution d'un capital à taux fixe, décroissance radioactive).

COMPÉTENCES VISÉES

- Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation.
- Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions exponentielles et logarithme.

COMPÉTENCES VISÉES

- Placer un point sur le cercle trigonométrique.
- Lier la représentation graphique des fonctions cosinus et sinus et le cercle trigonométrique.
- Traduire graphiquement la parité et la périodicité des fonctions trigonométriques.
- Par lecture du cercle trigonométrique, déterminer, pour des valeurs remarquables de x, les cosinus et sinus d'angles associés à x.

SUGGESTIONS CULTURELLES

ESSAIS

- **Les maths c'est magique !** *Johnny Ball*
- **La grande aventure des nombres et du calcul** *Jason Lapeyronnie*
- **17 Équations qui ont changé le monde** *Ian Stewart*
- **Alex au pays des chiffres** *Alex Bellos*
- **Le grand roman des maths : de la préhistoire à nos jours** *Mickael Launay*
- **Histoire universelle des chiffres : L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul** *Georges Ifrah*
- **Le démon des maths** *Hans Magnus Enzensberger*
- **A propos de rien : une histoire du zéro** *Robert Kaplan*

BANDES-DESSINÉES

- **Logicomix** *Doxiádis / Papadátos / Papadimitríou*
- **Les maths en BD 1 et 2** *Larry Gonick*

DOCUMENTAIRES AUDIOVISUELS

- **L'extraordinaire aventure du chiffre 1** *Terry Jones*
- **Voyage au pays des maths** *Arte*

PODCASTS

- **L'oreille mathématiques** *Podcast de la Maison Poincarré*
- **Maths en tête** *toutes plateformes*

YOUTUBE

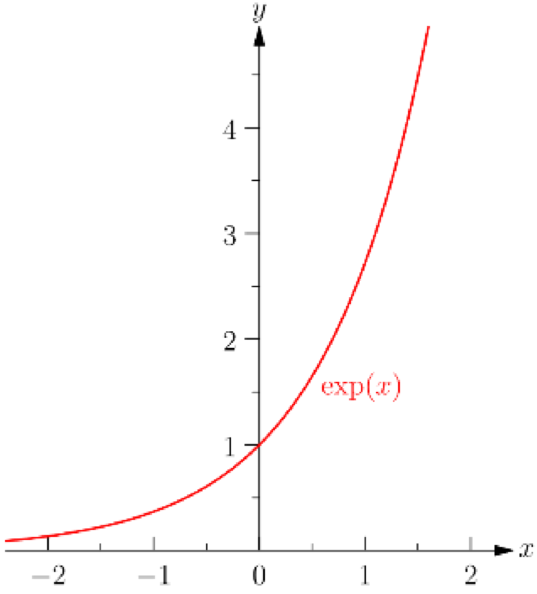
- **Chaîne YouTube Maths et Tiques** *Yvan Monka*
- **Chaîne YouTube Micmaths** *Mickaël Launay*
- **Chaîne YouTube de la Maison des mathématiques et de l'informatique**
- **Chaîne YouTube Automaths** *Jason Lapeyronnie*

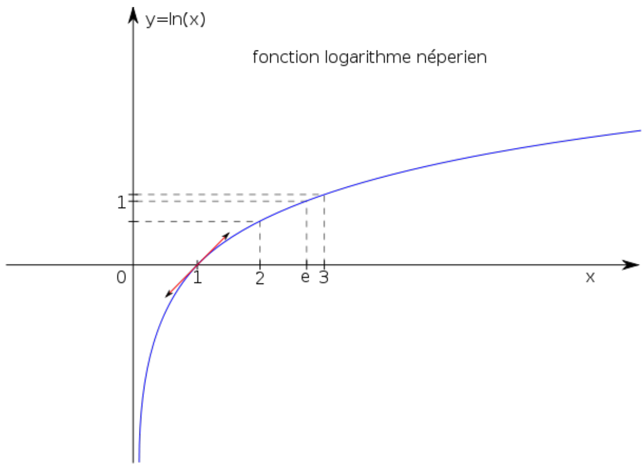
Le Cours

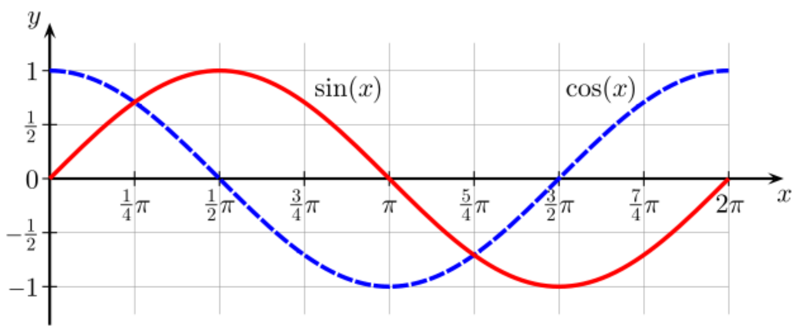
INTRODUCTION

Les fonctions sont connues depuis le Collège comme les fonctions linéaires et affines. En Seconde, les fonctions polynômes, inverses et racines carrées ont été appréhendés.

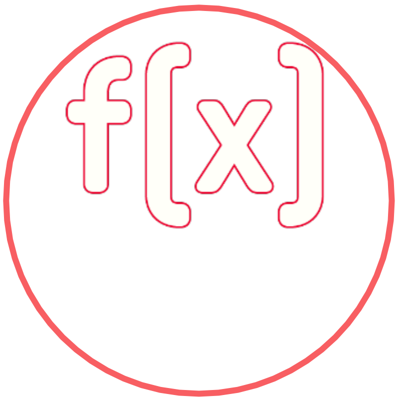
Cependant, des domaines de la Physique comme les ondes ou de la Science et Vie de la Terre avec la radioactivité ont mis en avant de nouvelles fonctions aux allures remarquables. Ces études ont été prolongées par des initiations aux dérivations et tableaux de fonctions.







Ces fonctions que sont les fonctions exponentielles, logarithmes et trigonométriques sont absolument nécessaires à maîtriser pour tout profil scientifique et seront très utiles lors d'études en Physique et en Sciences de la Vie et de la Terre. C'est dans l'optique de ces acquisitions que nous allons travailler ensemble.



Vous avez certainement déjà entendu l'expression « ça croit de manière exponentielle ». Vous allez comprendre ce qui se cache réellement derrière cette expression avec la découverte d'une nouvelle fonction appelée fonction exponentielle et de ses propriétés remarquables.

Dans ce chapitre, après avoir défini les propriétés et les définitions analytiques de l'exponentielle, nous nous intéresserons à ses propriétés algébriques. Nous verrons ensuite les applications algébriques de ce type de fonction. Nous finirons par l'étude de fonctions de l'exponentielle.

COMPÉTENCES VISÉES

- Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction.
- Pour une valeur numérique strictement positive de k, représenter graphiquement les fonctions $t \mapsto e^{-kt}$ et $t \mapsto e^{kt}$.
- Modéliser une situation par une croissance, une décroissance exponentielle (par exemple évolution d'un capital à taux fixe, décroissance radioactive).

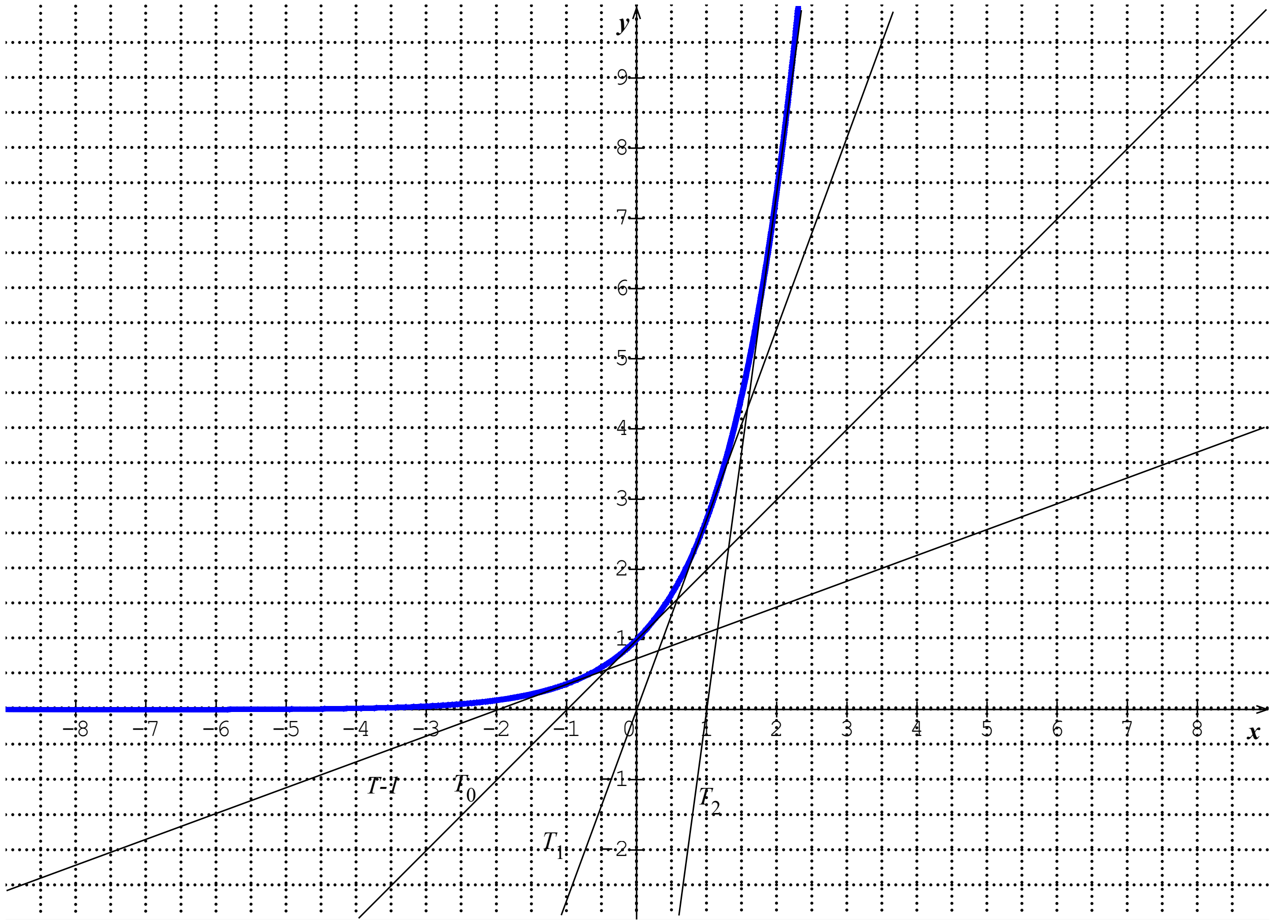
PRÉREQUIS

- Étude des fonctions : dérivation, tangentes.
- Suites géométriques.
- Calcul avec puissances.

Première approche

ACTIVITÉ 1.1

On a tracé la courbe C_f d'une fonction dérivable *f*, et 4 de ses tangentes T_{-1}, T_0, T_1 et T_2, respectivement aux points -1, 0, 1 et 2.



1) Quelle est l'abscisse du point d'intersection de T_{-1} avec l'axe des abscisses ? Même questions avec T_0, T_1 et T_2.

---

2) Conjecturez l'abscisse du point d'intersection de T_a, tangente au point *a*, avec l'axe des abscisses.

---

3) Rappelez l'expression de l'équation de la tangente à C_f T_a en un point *a*.
On suppose que pour tout point a, l'abscisse du point d'intersection de T_a, tangente au point a, avec l'axe des abscisses vaut $a-1$.

---

4) En déduire que : $f'(a)=f(a)$.

SOLUTIONS DE L'ACTIVITÉ 1.1

1) Pour T_{-1}, on trouve -2 ; pour T_0, on trouve -1 ; pour T_1, on trouve 0 ; pour T_2, on trouve 1.

2) On peut conjecturer que l'abscisse vaudra $a-1$.

3) $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

4) $(a-1;0) \in T_a \Leftrightarrow 0 = f'(a)(a-1-a) + f(a)$ soit $f'(a) = f(a)$

01 FONCTION EXPONENTIELLE

Définitions et propriétés analytiques

L'ESSENTIEL

Il existe une unique fonction f appelée **fonction exponentielle** définie et dérivable sur ℝ, telle que :

$$f'(x) = f(x) \text{ et } f(0) = 1$$

Cette fonction est notée **exp**.

- On a donc : $exp'(x) = exp(x)$ et $\exp(0)=1$
  L'existence est admise; l'unicité fait l'objet de l'exercice ci-dessous.

À VOUS DE JOUER 1

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant à : $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$

1) Complétez.

On va montrer dans un premier temps que f ne s'annule pas.

On pose pour tout x de $\mathbb{R}$: $\varphi(x) = f(x)f(-x)$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\varphi'(x) = \text{......................} - \text{..........................} = 0$

φ est donc .... sur $\mathbb{R}$.

Comme $\varphi(0) = \text{..........................} = 1$ on a pour tout x de $\mathbb{R}$: $\varphi(x) = 1$.

Si f s'annulait en un point a, on aurait $\varphi(a) = \text{......}$, ce qui contredit le résultat précédent.

Donc f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

2) On suppose maintenant qu'il existe une autre fonction g, dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant à :

$g'(x) = g(x)$ et $g(0) = 1$ et f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

On pose pour tout x de $\mathbb{R}$: $\phi(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$

ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\phi'(x) = \text{...............................} = \text{..............................} = 0$

Donc ϕ est .... sur $\mathbb{R}$; $\phi(0) = \dfrac{\text{...............}}{\text{...............}} = 1$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\dfrac{g(x)}{f(x)} = \text{.........}$ soit $g(x) = \text{...............}$

On a donc démontré l'unicité de la fonction.

L'ESSENTIEL

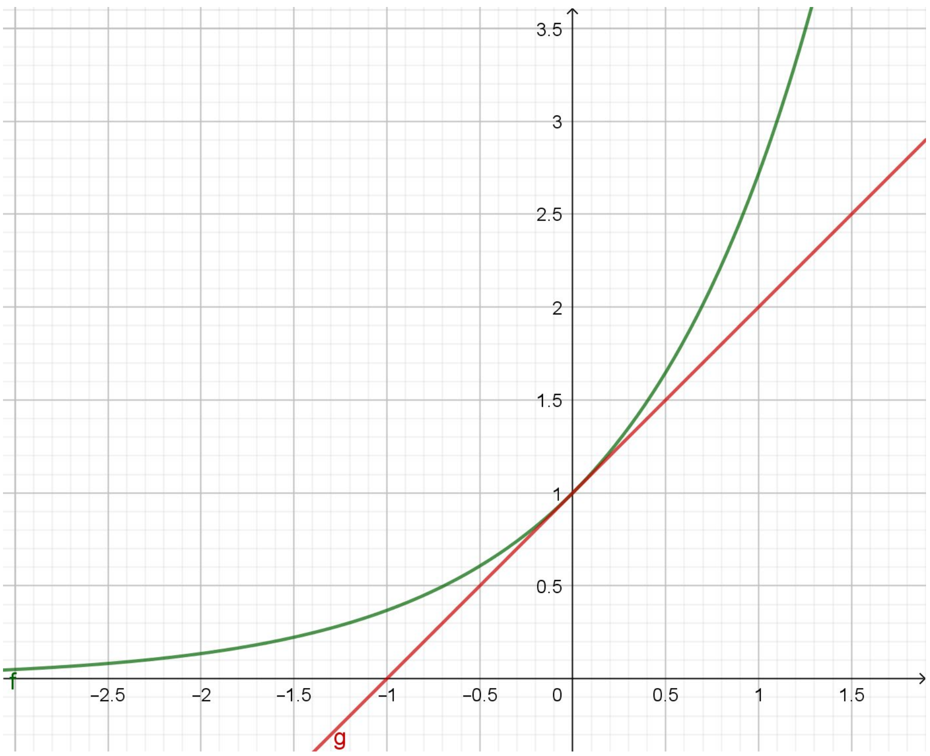
La fonction exponentielle est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La justification de la positivité sera faite ultérieurement.

Justification de la stricte croissance sur $\mathbb{R}$

Comme $\exp' = \exp$, la dérivée est strictement positive. Donc exp strictement croissante.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\exp'(x)$	$+$
$\exp(x)$	$\nearrow$



Remarques :

- La fonction croit très rapidement (croissance exponentielle).
- L'équation de la tangente en 0 vaut $y = x + 1$.

À VOUS DE JOUER 2

Soit *f* la fonction $f(x) = \exp(x)$

Complétez par vrai ou faux.

1) *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ....

2) *f* est définie uniquement sur $[0,+\infty[$ ....

3) $f(0) = 0$ ....

4) $f(x)$ est positif pour tout réel *x*. ....

02 FONCTION EXPONENTIELLE
Propriétés algébriques

L'ESSENTIEL

Pour tous réels a et b :

$$exp(a+b) = exp(a) \times exp(b)$$

Justification

On pose $g(x) = \exp(a+b-x) \times \exp(x)$

Rappel sur la dérivation des fonctions composées :

$f \circ u(x) = f(u(x)) \quad u(x)(f \circ u)'(x) = u'(x)f'(u(x))$

ici : $g = exp \circ u$ avec $u(x) = a+b-x$

$g'(x) = -exp(a+b-x) \times exp(x) + exp(a+b-x) \times exp(x) = 0$

donc g est constante.

$g(0) = exp(a+b) \times exp(0) = exp(a+b)$ et $g(b) = exp(a) \times exp(b)$

$g(0) = g(b) \Rightarrow exp(a+b) = exp(a) \times exp(b)$

Exemples :

$\exp(7) = \exp(3+4) = \exp(3)\exp(4)$

$\exp(4+\mathrm{x}) = \exp(4)\exp(\mathrm{x})$

$\exp(3)\exp(10 = \exp(13)$

À VOUS DE JOUER 3

Complétez.

1) $\exp(5) = \exp(\ldots.)\exp(3)$
2) $\exp(1-\mathrm{x}) = \exp(1)\exp(\ldots\ldots\ldots.)$
3) $\exp(2)\exp(\mathrm{x}) = \exp(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

On en déduit les propriétés suivantes :

L'ESSENTIEL

Pour tous réels a et b :

$$exp(-a) = \frac{1}{exp(a)} \qquad exp(a-b) = \frac{exp(a)}{exp(b)} \qquad exp(na) = [exp(a)]^n$$

Exemples :

$\exp(7) = \exp(10-3) = \dfrac{\exp(10)}{\exp(3)}$

$\exp(4-\mathrm{x}) == \dfrac{\exp(4)}{\exp(\mathrm{x})}$

$\exp(3\mathrm{x}) = [\exp(\mathrm{x})]^3$

À VOUS DE JOUER 4

Complétez.

1) $\exp(5) = \dfrac{\exp(\ldots\ldots)}{\exp(2)}$

2) $\exp(x-3) = \dfrac{\exp(\ldots\ldots)}{\exp(\ldots\ldots)}$

3) $\exp(4x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

➢ **Ces expressions font penser aux formules avec les puissances. On introduit une nouvelle notation :**

$\exp(x) = e^x$ **avec** $e = \exp(1)$

$e \approx 2{,}71$ Il s'agit d'un nombre irrationnel appelé nombre d'Euler ou constante de Néper.

On peut réécrire toutes les propriétés avec cette notation :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^{-a}} \qquad e^{b-a} = \frac{e^b}{e^a} \qquad (e^a)^n = e^{na}$$

Exemples :

$$e^8 = e^5 \times e^3 \qquad e^{-2} = \frac{1}{e^2} \qquad e^5 = \frac{e^8}{e^3} \qquad e^{12} = (e^4)^3$$

À VOUS DE JOUER 5

Complétez.

$e^5 \times e^2 = e^{\ldots\ldots}$ $\qquad e^{10} = (e^2)^{\ldots\ldots}$ $\qquad \dfrac{e^6}{e^2} = e^{\ldots\ldots}$ $\qquad \dfrac{e^3}{e^7} = e^{\ldots\ldots}$

$e^{x-5} \times e^{x+2} = e^{\ldots\ldots}$ $\qquad e^{x-1} \times e^{-1-x} = e^{\ldots\ldots}$

➢ **On avait déjà vu les formules suivantes pour les entiers :**

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^{n-p} = \frac{a^n}{a^p} \qquad (a^n)^p = a^{np}$$

Le nombre e se manipule donc comme un entier, et les exposants entiers se généralisent aux nombres réels.

« e » se manipule donc soit comme une fonction (propriétés analytiques) soit comme un nombre (propriétés algébriques).

03 FONCTION EXPONENTIELLE

Applications algébriques

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUAQUATIONS

L'ESSENTIEL

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$
$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

Exemples :

Résoudre : $e^{2x+3} = e$

$e^{2x+3} = e \Leftrightarrow 2x+3 = 1$

$\Leftrightarrow 2x = -2$

$\Leftrightarrow x = -1 \qquad S = \{-1\}$

Résoudre : $e^{2x-2} - e^{x+3} < 0$

$e^{2x-2} - e^{x+3} < 0 \Leftrightarrow e^{2x-2} < e^{x+3}$

$\Leftrightarrow 2x-2 < x+3$

$\Leftrightarrow x < 5 \qquad S =]-\infty ; 5[$

À VOUS DE JOUER 6

Complétez.

Résoudre : $e^{3x-4} = e^{x+4}$

$e^{3x-4} = e^{x+4} \Leftrightarrow 3x-4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

$\Leftrightarrow x = \ldots\ldots\ldots \qquad S = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Résoudre : $e^{2x-2} < 1$

$e^{2x-2} < 1 \Leftrightarrow e^{2x-2} < e^{\ldots}$

$\Leftrightarrow 2x-2 < \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\Leftrightarrow 2x < \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad S = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

SUITES DU TERME GÉNÉRAL e^{na}

On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = e^{na}$.

$u_n = (e^a)^n$

Donc est une suite géométrique de raison : $q = e^a$

Si $a < 0$, alors $e^a < 1$ donc la suite (e^{an}) est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{an} = 0$.

Si $a > 0$, alors $e^a > 1$ donc la suite (e^{an}) est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{an} = +\infty$.

Exemple :

La suite $(e^{-0,2n})_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = e^{-0,2}$.

Elle est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-0,2n} = 0$.

La suite $(e^{0,2n})_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = e^{0,2}$.

Elle est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{0,2n} = +\infty$

À VOUS DE JOUER 7

Complétez.

La suite $(e^{0,1n})_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Elle est …………………… et $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{0,2n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

FONCTION EXPONENTIELLE

04 Fonctions définies avec une exponentielle

Exemple :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{2x+5}$

Il s'agit de la fonction composée de la fonction $u : x \mapsto 2x+5$ avec la fonction exponentielle **exp**.

$\exp(u(x)) = u'(x)\exp'(u(x)) = 2\exp(u(x))$ car exp'=exp

donc $f'(x) = 2e^{2x+5}$

Plus généralement :

L'ESSENTIEL

$$f(x) = e^{u(x)} \qquad f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$$

Exemple :

$f(x) = e^{x^2-1}$ $\qquad u(x) = x^2 - 1$ $\qquad u'(x) = x^2 - 1$

$f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)} = 2x\, e^{x^2-1}$

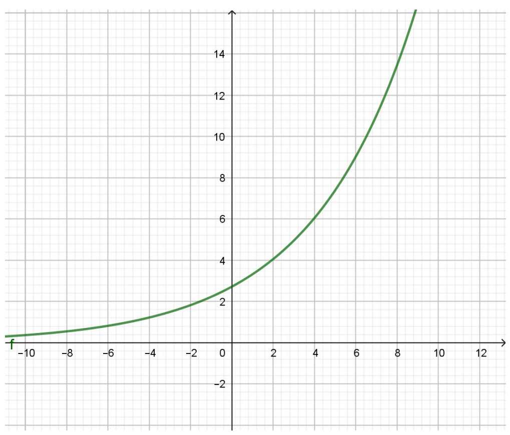
Cas particulier : fonctions de type $f(t)=e^{kt}$ et $f(t)=e^{-kt}$ avec k réel strictement positif

$f(t)=e^{kt}$ $f'(t)=k\,e^{kt}$ $f'(t)>0$ donc f est strictement croissante. **On parle de croissance exponentielle.**	$f(t)=e^{-kt}$ $f'(t)=-k\,e^{-kt}$ $f'(t)<0$ donc f est strictement décroissante. **On parle de décroissance exponentielle.**

Exemples :

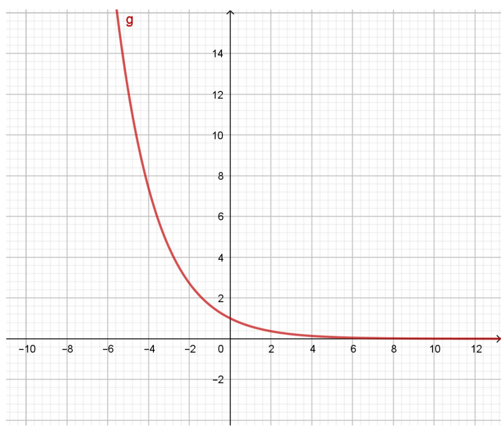
$f(x)=e^{0,2x}$ $\qquad f'(x)=0,2e^{0,2x}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		



$g(x)=e^{-0,5x}$ $\qquad g'(x)=-0,5e^{-0,5x}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	−	
$g(x)$		



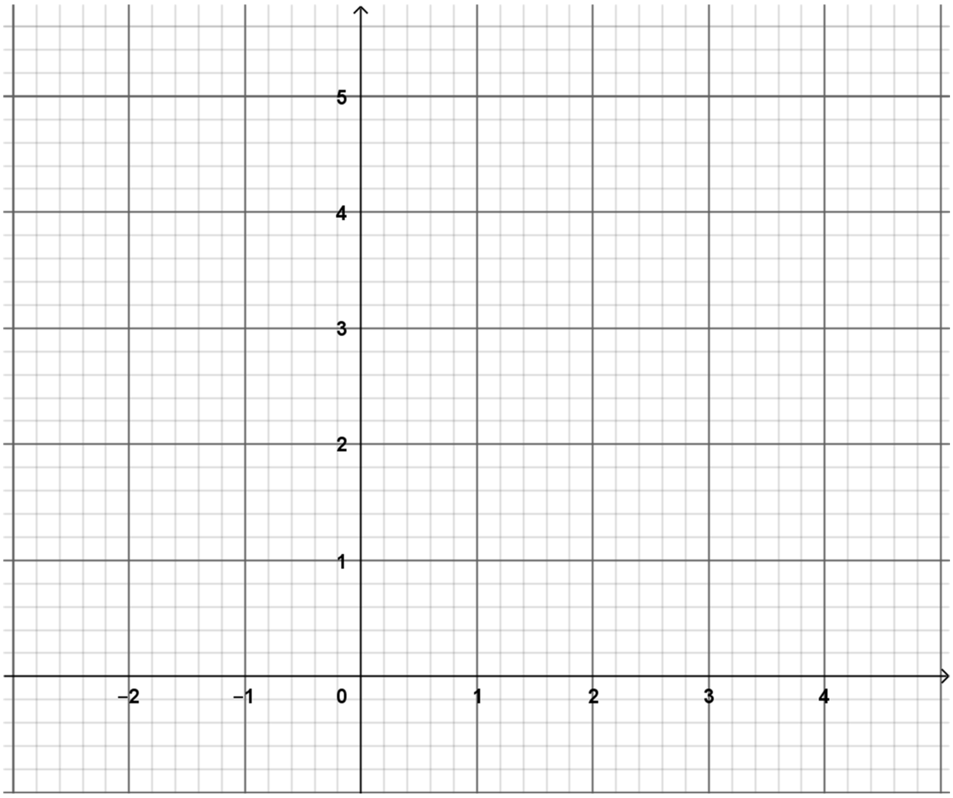
À VOUS DE JOUER 8

Complétez.

$f(x) = \mathrm{e}^{-2x+1}$ $\qquad f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	
$f(x)$	

Tracez la courbe :



Exemple d'une modélisation d'une situation avec une croissance exponentielle :

Un capital de 1000 € est placé le 1er janvier de l'année 2020 au taux de 1% par an.

On note (u_n) la suite donnant le capital au 1er janvier de l'année 2020+*n*.

On a donc : $u_0 = 1000$ et $u_{n+1} = 1{,}01u_n$

(u_n) est une suite géométrique à croissance exponentielle. $u_n = 1000 \times 1{,}01^n$

On peut également écrire : $u_{n+1} - u_n = 0{,}01u_n$

On a donc l'idée de modéliser le capital par une fonction dérivable *f* telle que :

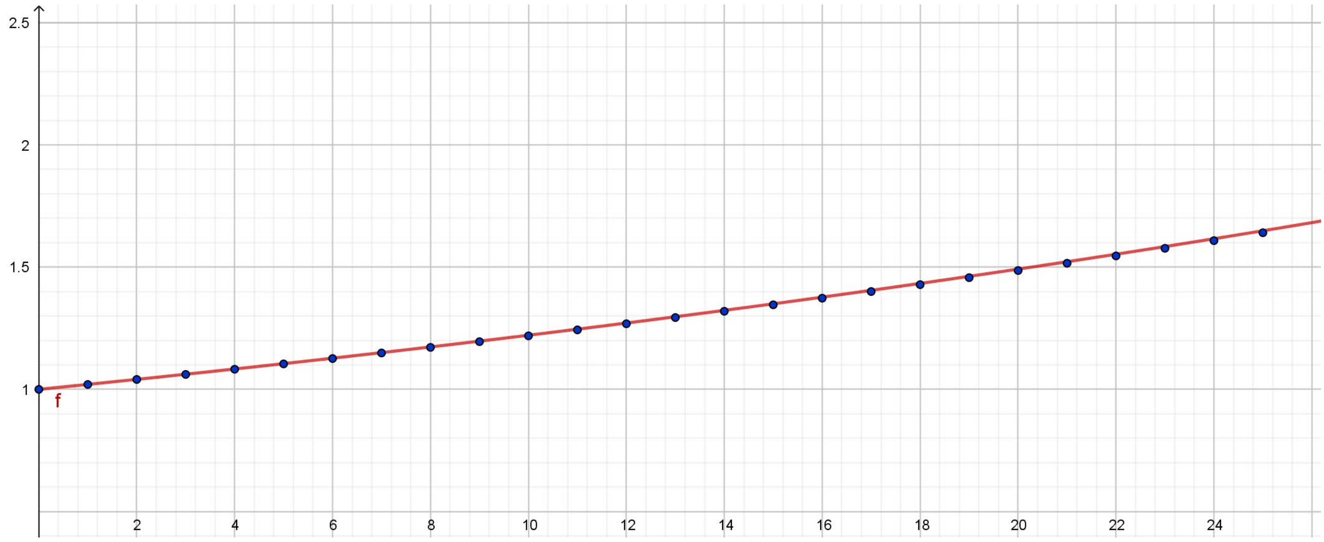
$f'(t) = 0{,}01f(t)$ et $f(0) = 1000$.

On peut vérifier que $f'(t) = 1000\,\mathrm{e}^{0{,}01t}$

Si on compare les 2 valeurs au bout de 20 ans :

$u_n = 1000 \times 1{,}01^{20} \approx 1105$

$f(20) = 1000 \times e^{0{,}01 \times 10} \approx 1105$



La modélisation d'une décroissance exponentielle est proposée en exercice.

LE TEMPS DU BILAN

- La fonction exponentielle notée exp est l'unique fonction f dérivable sur R telle que :

$$\boldsymbol{f'(x) = f(x)} \ \text{ et } \ \boldsymbol{f(0) = 1}$$

Notation : $\exp(x) = \mathrm{e}^x$

Propriétés algébriques

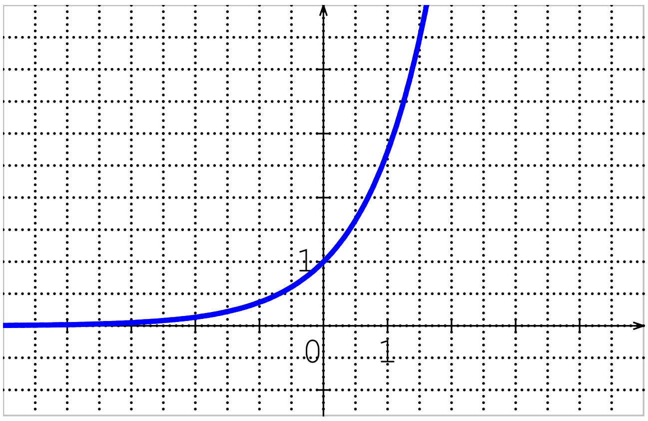
$$e^{a+b} = e^a e^b \qquad e^{na} = (e^a)^n \qquad (e^a)^b = e^{ab}$$

$$\mathbf{e^a = e^b \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \qquad et \qquad e^{\boldsymbol{a}} < e^{\boldsymbol{b}} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}}$$

Étude de la fonction exponentielle, propriétés analytiques :

- La fonction exp est définie, continue et dérivable sur P.
- La fonction exp est strictement croissante sur P.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\exp'(x)$	+
$\exp(x)$	0 ↗ $+\infty$



- Si u dérivable sur I, $\boxed{(e^u)' = u'e^u}$

EXERCICES

Abordons maintenant une série d'exercices, afin de vérifier vos connaissances.
Les exercices ont été classés dans un ordre d'approfondissement croissant.
Les réponses aux exercices se trouvent en fin de manuel.

EXERCICE 01

Déterminez la bonne réponse parmi ces questions à choix multiple.

1) L'expression $-e^{1-x}$:
   - A. Est négative si et seulement si $x \leq 1$
   - B. Est négative si et seulement si $x \geq 1$
   - C. Est toujours négative
2) Pour tout réel a et tout entier n, $(e^{a})^{n}$ est égal à :
   - A. e^{a+n}
   - B. e^{an}
   - C. e^{a^n}
3) $\dfrac{2e^{-x}}{3e^{x}+e^{-x}}$ peut s'écrire :
   - A. $\dfrac{2}{3e^{2x}+1}$
   - B. $\dfrac{2}{3e^{-x}+e^{x}}$
   - C. $\dfrac{2e^{x}}{3e^{-x}+e^{x}}$

EXERCICE 02

Simplifiez les fonctions suivantes.

1) $f(x) = exp(x)\,exp(x)$
2) $g(x) = \dfrac{exp(3x)}{exp(x)}$
3) $h(x) = [3\,exp(-x)]^2$
4) $k(t) = \dfrac{exp(t)\,exp(-t)}{exp(3)}$

EXERCICE 03

Résolvez.

1) $2(e^x - e^3) = 0$

2) $e^4 - e^x \geq 0$

3) $\dfrac{2e^x + 3}{1 - 5e} = 0$

4) $e^{x^2+2x-2} - e^{2x+3} = 0$

5) $\dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = e^{2x}$

6) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

EXERCICE 04

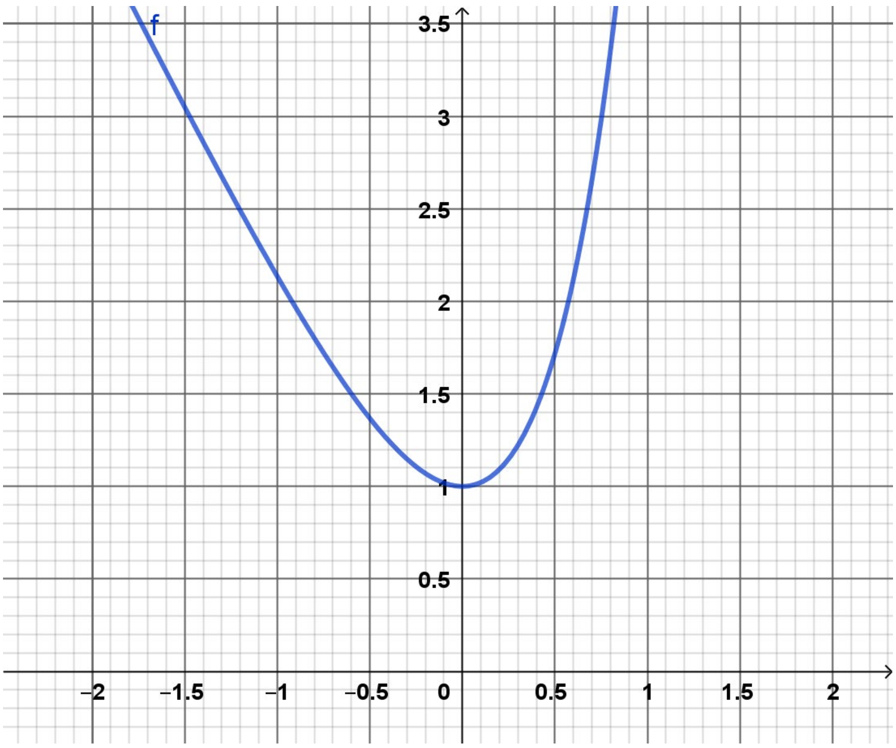
Résolvez.

$$2e^{x} - 2 > 0 \quad \text{et} \quad e^{x} - e > 0 \text{ puis } (2e^{x} - 2)(e^{x} - e) > 0$$

EXERCICE 05

1) Étudiez les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - 2x$

2) Déterminez l'équation de la tangente à la courbe en $x = \frac{1}{2}$ et tracez-la.



EXERCICE 06

Étudiez la dérivabilité sur I, et calculez la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 4\,e^{x} - e\,x + \sqrt{3} \quad I = \mathbb{R}$
2) $g(x) = (3x - 1)\,e^{x} \quad I = \mathbb{R}$
3) $h(x) = \frac{3-2\,e^{x}}{1-e^{x}} \quad I =]0; +\infty[$

EXERCICE 07

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^{x} - x}$ et on appelle sa courbe représentative.

On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{x} - x - 1$

1) Étudiez les variations de g. En déduire son signe.

2) Montrez que pour tout réel x, $e^{x} - x > 0$

3) Étudiez les variations de f et établir son tableau de variation.

4) Déterminez l'équation de la tangente T à C_f en 0.

5) Déterminez la position relative de C_f par rapport à T.

EXERCICE 08

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{1-x}$

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par :
$g_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n$ et $h_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$
On pose : $S_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$

1) Montrez que Pour $x \neq 1, g_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

2) En déduire que: Pour $x \neq 1, h_n(x) = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$

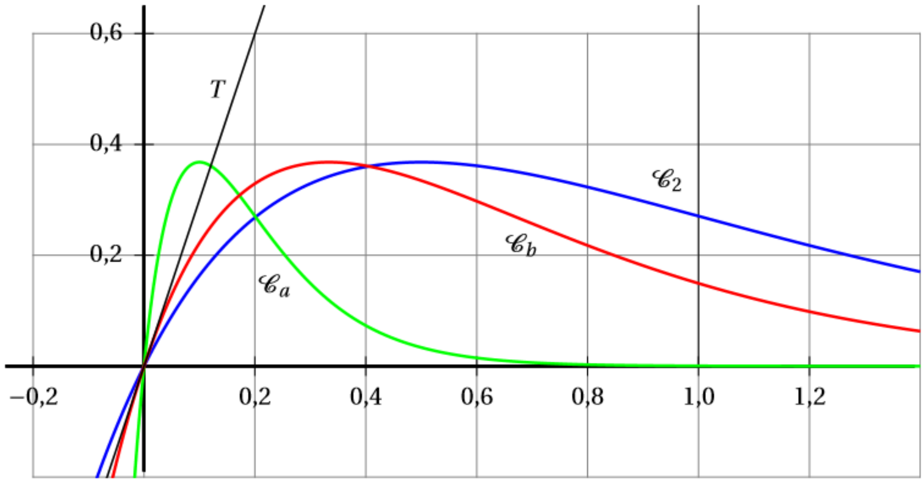
3) Montrez que pour k dans $\mathbb{N}^*$, $f(k) = k(e^{-1})^{k-1}$

4) En déduire l'expression de S_n

EXERCICE 09

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que : $f_k(x) = kx\,e^{-kx}$

On note C_k sa courbe représentative. On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes C_a, C_b, C_2 où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à C_b au point O origine du repère.



1) Montrez que pour tout réel k strictement positif, les courbes C_k passent par un même point.

2) Pour tout réel k strictement positif, montrez que : $f_k'(x) = k(1-kx)\,e^{-kx}$

3) Justifiez que, pour tout réel *k* strictement positif, $f_k$admet un maximum et calculez ce maximum.

4) En observant le graphique ci-dessus, comparez à et 2. Expliquez la démarche.

5) Écrivez une équation de la tangente à C_k au point O origine du repère.

6) En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b.

EXERCICE 10

Une espèce animale perd 3% de sa population tous les ans. Il y avait 150000 représentants au 1er janvier 2020.
On note (u_n) la suite donnant la population au 1er janvier de l'année 2020+*n*.

1) Que vaut u_0? u_1 ?

2) Exprimez u_{n+1}en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Ecrivez son terme général.

3) Déterminez $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n $u_{n+1} - u_n = 0{,}01u_n$

4) En vous inspirant de l'exemple du cours, par quelle fonction *f* peut-on modéliser la population à l'instant *t* où *t* est le temps en années depuis le 1er janvier 2020.

5) Comparez les 2 approches pour estimer la population de l'espèce au 1er janvier 2050.
On calculera l'erreur relative : $\frac{|u_n - f(n)|}{u_n}$.

Vous pouvez maintenant faire et envoyer le devoir n°1