COURS PI

☆ L'école sur-mesure ☆

de la Maternelle au Bac, Établissement d'enseignement privé à distance, déclaré auprès du Rectorat de Paris

Première STMG - Module 2 - Analyse

Mathématiques

v.5.1

- **Guide de méthodologie**
  pour appréhender notre pédagogie
- **Leçons détaillées**
  pour apprendre les notions en jeu
- **Exemples et illustrations**
  pour comprendre par soi-même
- **Prolongement numérique**
  pour être acteur et aller + loin
- **Exercices d'application**
  pour s'entraîner encore et encore
- **Corrigés des exercices**
  pour vérifier ses acquis

www.cours-pi.com

Paris & Montpellier

EN ROUTE VERS LE BACCALAURÉAT

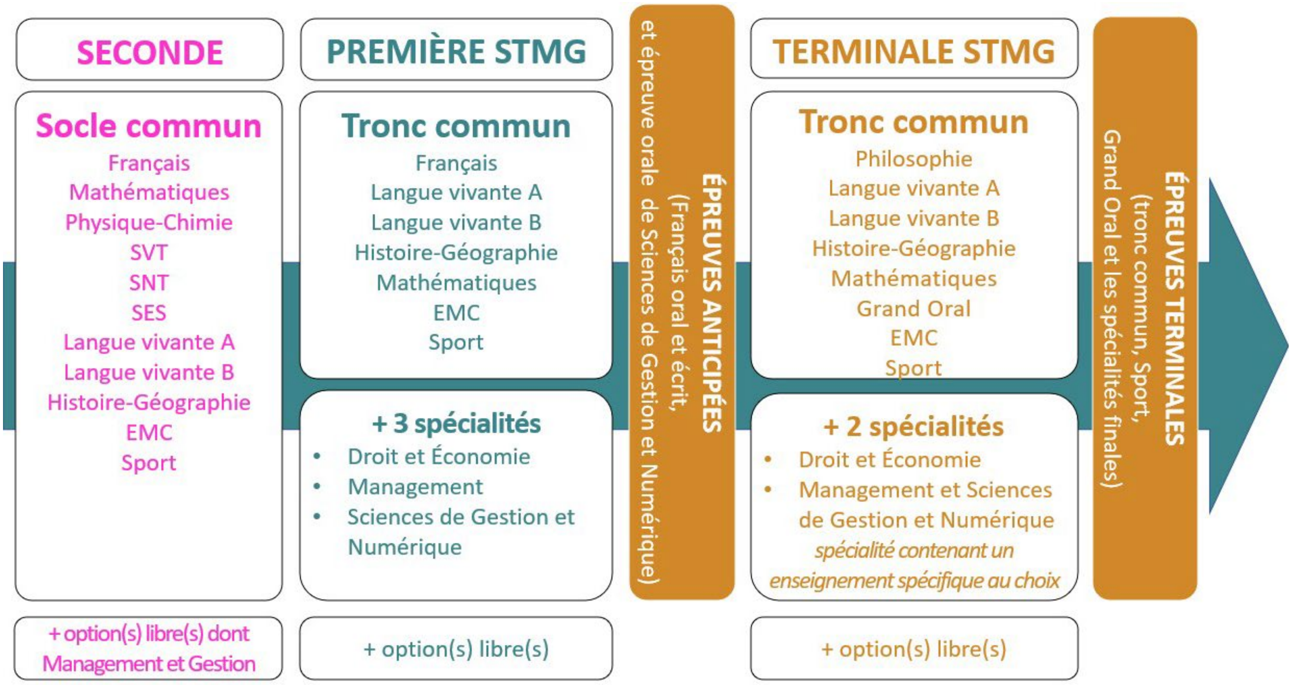
Comme vous le savez, **la réforme du Baccalauréat** est entrée en vigueur progressivement jusqu'à l'année 2021, date de délivrance des premiers diplômes de la nouvelle formule.

Dans le cadre de ce nouveau Baccalauréat, **notre Etablissement**, toujours attentif aux conséquences des réformes pour les élèves, s'est emparé de la question avec force **énergie** et **conviction** pendant plusieurs mois, animé par le souci constant de la réussite de nos lycéens dans leurs apprentissages d'une part, et par la **pérennité** de leur parcours d'autre part. Notre Etablissement a questionné la réforme, mobilisé l'ensemble de son atelier pédagogique, et déployé tout **son savoir-faire** afin de vous proposer un enseignement tourné continuellement vers l'**excellence**, ainsi qu'une scolarité tournée vers la **réussite**.

- Les **Cours Pi** s'engagent pour faire du parcours de chacun de ses élèves un **tremplin vers l'avenir**.
- Les **Cours Pi** s'engagent pour ne pas faire de ce nouveau Bac un diplôme au rabais.
- Les **Cours Pi** vous offrent **écoute** et **conseil** pour coconstruire une **scolarité sur-mesure**.

LE BAC STMG DANS LES GRANDES LIGNES

Le Baccalauréat de la série Sciences et Technologies du Management et de la Gestion (STMG) est organisé à partir d'un large tronc commun en classe de Seconde où l'option « Management et Gestion » permet une première approche du domaine. Par la suite, cette filière se caractérise par un parcours des plus spécialisés année après année.



CE QUI A CHANGÉ

- Une nouvelle épreuve en fin de Terminale : le Grand Oral.
- Pour les lycéens en présentiel l'examen est un mix de contrôle continu et d'examen final laissant envisager un diplôme à plusieurs vitesses.
- Pour nos élèves, qui passeront les épreuves sur table, le Baccalauréat conserve sa valeur.

CE QUI N'A PAS CHANGÉ

- Le Bac reste un examen accessible aux candidats libres avec examen final.
- Le système actuel de mentions est maintenu.
- Les épreuves anticipées de français, écrit et oral, tout comme celle de l'oral de Sciences de Gestion et Numériques se dérouleront comme aujourd'hui en fin de Première.

A l'occasion de la réforme du Lycée, nos manuels ont été retravaillés dans notre atelier pédagogique pour un accompagnement optimal à la compréhension. Sur la base des programmes officiels, nous avons choisi de créer de nombreuses rubriques :

- **L'essentiel** pour souligner les points de cours à mémoriser au cours de l'année
- **Réfléchissons ensemble et A vous de jouer** pour mettre en pratique le raisonnement vu dans le cours et s'accaparer les ressorts de l'analyse, de la logique, de l'argumentation, et de la justification
- **Pour aller plus loin** pour visionner des sites ou des documentaires ludiques de qualité
- Et enfin... la rubrique **Les Clés du Bac by Cours Pi** qui vise à vous donner, et ce dès la seconde, toutes les cartes pour réussir votre examen : notions essentielles, méthodologie pas à pas, exercices types et fiches étape de résolution !

MATHÉMATIQUES PREMIÈRE STMG

Module 2 – Analyse

L'AUTEURE

Sylvie LAMY
« Faire des maths c'est jouer aux legos. Il s'agit d'assembler des briques pour solutionner des problèmes ». Diplômée de l'Ecole Polytechnique et agrégée de Mathématiques, elle poursuit aujourd'hui son parcours professionnel à l'Institut Géographique National et au Ministère des Transports comme chargée de mission sur les projets spatiaux. Passionnée par les sciences physiques, son approche pédagogique réside dans la transmission du raisonnement scientifique. Elle attend de ses éléves de comprendre et d'expliciter leur démarche dans la résolution des problèmes.

PRÉSENTATION

Ce **cours** est divisé en chapitres, chacun comprenant :

- Le **cours**, conforme aux programmes de l'Education Nationale
- Des **exercices d'application et d'entraînement**
- Les **corrigés** de ces exercices
- Des **devoirs** soumis à correction (et ***se trouvant hors manuel***). Votre professeur vous renverra le corrigé-type de chaque devoir après correction de ce dernier.

Pour une manipulation plus facile, les corrigés-types des exercices d'application et d'entraînement sont regroupés en fin de manuel.

CONSEILS À L'ÉLÈVE

Vous disposez d'un support de Cours complet : **prenez le temps** de bien le lire, de le comprendre mais surtout de l'**assimiler**. Vous disposez pour cela d'exemples donnés dans le cours et d'exercices types corrigés.
Vous pouvez rester un peu plus longtemps sur une unité mais <u>travaillez régulièrement</u>.

LES DEVOIRS

Les devoirs constituent le moyen d'évaluer l'acquisition de vos *savoirs* (« Ai-je assimilé les notions correspondantes ? ») et de vos *savoir-faire* (« Est-ce que je sais expliquer, justifier, conclure ? »).

Placés à des endroits clés des apprentissages, ils permettent la vérification de la bonne assimilation des enseignements.

Aux *Cours Pi*, vous serez accompagnés par un professeur selon chaque matière tout au long de votre année d'étude. Référez-vous à votre « Carnet de Route » pour l'identifier et découvrir son parcours.
Avant de vous lancer dans un devoir, assurez-vous d'avoir **bien compris les consignes**.
Si vous repérez des difficultés lors de sa réalisation, n'hésitez pas à le mettre de côté et à revenir sur les leçons posant problème. **Le devoir n'est pas un examen**, il a pour objectif de s'assurer que, même quelques jours ou semaines après son étude, une notion est toujours comprise.
Aux *Cours Pi*, chaque élève travaille à son rythme, parce que chaque élève est différent et que ce mode d'enseignement permet le « sur-mesure ».
Nous vous engageons à respecter le moment indiqué pour faire les devoirs. Vous les identifierez par le bandeau suivant :

Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le devoir n°1

Il est **important de tenir compte des remarques, appréciations et conseils du professeur-correcteur**. Pour cela, il est **très important d'envoyer les devoirs au fur et à mesure** et non groupés. **C'est ainsi que vous progresserez !**

Donc, dès qu'un devoir est rédigé, envoyez-le aux *Cours Pi* par le biais que vous avez choisi :

1) Par **soumission en ligne** via votre espace personnel sur **PoulPi**, pour un envoi **gratuit**, **sécurisé** et plus **rapide**.
2) Par **voie postale** à *Cours Pi*, 9 rue Rebuffy, 34 000 Montpellier
   *Vous prendrez alors soin de joindre une **grande enveloppe libellée à vos nom et adresse**, et **affranchie au tarif en vigueur** pour qu'il vous soit retourné par votre professeur*

N.B. : *quel que soit le mode d'envoi choisi, vous veillerez à **toujours joindre l'énoncé du devoir ;** plusieurs énoncés étant disponibles pour le même devoir.*
N.B. : *si vous avez opté pour un envoi par voie postale et que vous avez à disposition un scanner, nous vous engageons à conserver une copie numérique du devoir envoyé. Les pertes de courrier par la Poste française sont très rares, mais sont toujours source de grand mécontentement pour l'élève voulant constater les fruits de son travail.*

SOUTIEN ET DISPONIBILITÉ

VOTRE RESPONSABLE PÉDAGOGIQUE

Professeur des écoles, professeur de français, professeur de maths, professeur de langues : notre Direction Pédagogique est constituée de spécialistes capables de dissiper toute incompréhension.

Au-delà de cet accompagnement ponctuel, notre Etablissement a positionné ses Responsables pédagogiques comme des « super profs » capables de co-construire avec vous une scolarité sur-mesure.
En somme, le Responsable pédagogique est votre premier point de contact identifié, à même de vous guider et de répondre à vos différents questionnements.

Votre Responsable pédagogique est la personne en charge du suivi de la scolarité des élèves.
Il est tout naturellement votre premier référent : une question, un doute, une incompréhension ? Votre Responsable pédagogique est là pour vous écouter et vous orienter. Autant que nécessaire et sans aucun surcoût.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?	Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.
QUEL EST SON RÔLE ?	Orienter les parents et les élèves. Proposer la mise en place d'un accompagnement individualisé de l'élève. Faire évoluer les outils pédagogiques. Encadrer et coordonner les différents professeurs.

VOS PROFESSEURS CORRECTEURS

Notre Etablissement a choisi de s'entourer de professeurs diplômés et expérimentés, parce qu'eux seuls ont une parfaite connaissance de ce qu'est un élève et parce qu'eux seuls maîtrisent les attendus de leur discipline. En lien direct avec votre Responsable pédagogique, ils prendront en compte les spécificités de l'élève dans leur correction. Volontairement bienveillants, leur correction sera néanmoins juste, pour mieux progresser.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?	Une question sur sa correction ? • faites un mail ou téléphonez à votre correcteur et demandez-lui d'être recontacté en lui laissant un message avec votre nom, celui de votre enfant et votre numéro. • autrement pour une réponse en temps réel, appelez votre Responsable pédagogique.

LE BUREAU DE LA SCOLARITÉ

Placé sous la direction d'Elena COZZANI, le Bureau de la Scolarité vous orientera et vous guidera dans vos démarches administratives. En connaissance parfaite du fonctionnement de l'Etablissement, ces référents administratifs sauront solutionner vos problématiques et, au besoin, vous rediriger vers le bon interlocuteur.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?	Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi. 04.67.34.03.00 scolarite@cours-pi.com

LE SOMMAIRE

- Déterminer des éléments caractéristiques de la fonction $x \mapsto a(x - x1)(x - x2)$ (signe, extremum, allure de la courbe, axe de symétrie…).
- Vérifier qu'une valeur conjecturée est racine d'un polynôme de degré 2 ou 3.
- Savoir factoriser, dans des cas simples, une expression du second degré connaissant au moins une de ses racines.
- Utiliser la forme factorisée (en produit de facteurs du premier degré) d'un polynôme de degré 2 ou 3 pour trouver ses racines et étudier son signe.
- Résoudre des équations de la forme $x2 = c$ et $x3 = c$, avec c positif.

COMPÉTENCES VISÉES

- Interpréter géométriquement le nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.
- Construire la tangente à une courbe en un point.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à une courbe en un point.
- Calculer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à trois.

COMPÉTENCES VISÉES

Déterminer le sens de variation et les extremums d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

SUGGESTIONS CULTURELLES

ESSAIS

- **Les maths c'est magique !** *Johnny Ball*
- **La grande aventure des nombres et du calcul** *Jason Lapeyronnie*
- **17 Équations qui ont changé le monde** *Ian Stewart*
- **Alex au pays des chiffres** *Alex Bellos*
- **Le grand roman des maths : de la préhistoire à nos jours** *Mickael Launay*
- **Histoire universelle des chiffres : L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul** *Georges Ifrah*
- **Le démon des maths** *Hans Magnus Enzensberger*
- **A propos de rien : une histoire du zéro** *Robert Kaplan*

BANDES-DESSINÉES

- **Logicomix** *Doxiádis / Papadátos / Papadimitríou*
- **Les maths en BD 1 et 2** *Larry Gonick*

DOCUMENTAIRES AUDIOVISUELS

- **L'extraordinaire aventure du chiffre 1** *Terry Jones*

PODCASTS

- **L'oreille mathématiques** *Podcast de la Maison Poincarré*
- **Maths en tête** *toutes plateformes*

YOUTUBE

- **Chaîne YouTube Maths et Tiques** *Yvan Monka*
- **Chaîne YouTube Micmaths** *Mickaël Launay*
- **Chaîne YouTube de la Maison des mathématiques et de l'informatique**
- **Chaîne YouTube Automaths** *Jason Lapeyronnie*

Le Cours

CHAPITRE 1
GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

Au cours de cette partie, nous allons découvrir le monde des suites. Nous allons tout d'abord découvrir le vocabulaire lié aux suites puis leurs généralités.

Cette partie est importante en vue du second chapitre.

COMPÉTENCES VISÉES

- Modéliser une situation à l'aide d'une suite.
- Reconnaître si une situation relève d'un modèle discret de croissance linéaire ou exponentielle.
- Calculer un terme de rang donné d'une suite définie par une relation fonctionnelle ou une relation de récurrence.
- Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite.

PRÉ-REQUIS

- Fonctions affines.
- Pourcentages.
- Informatique : programmation Python.

Première approche

ACTIVITÉ

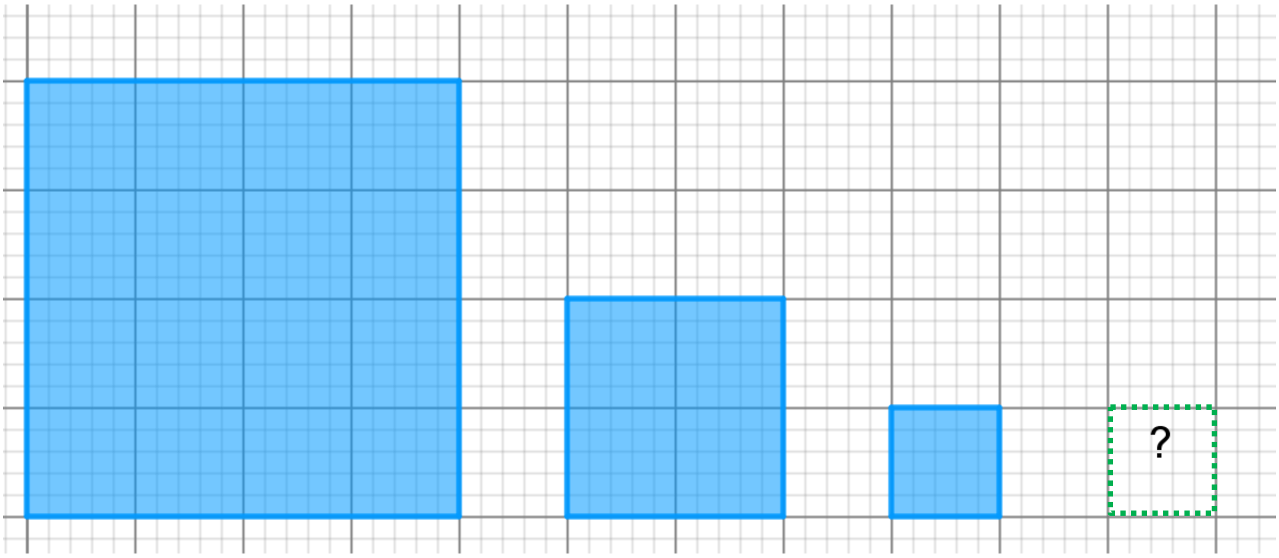
1. Donnez le terme suivant :

3 5 7 9 $\boxed{?}$ … …

4 9 16 25 $\boxed{?}$ … …

5 10 17 26 $\boxed{?}$ … …

2. Donnez la figure suivante :



On considère la suite déterminée par l'aire du carré. Quel est le terme suivant ?

16 4 1 $\boxed{?}$ … …

3. On lance un dé et on note le résultat.

3 5 2 5 $\boxed{?}$

Peut-on donner le terme suivant ?

Une suite numérique est simplement une suite de nombres. Les suites qui sont intéressantes sont les suites "logiques", celles que l'on peut construire, c'est-à-dire anticiper la valeur d'un terme. Nous allons voir des types de construction et étudier certains de leurs comportements.

CORRECTION DE L'ACTIVITÉ

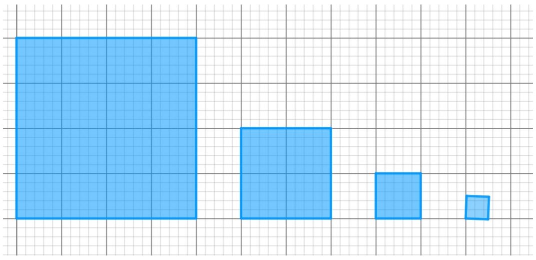
1.

3 5 7 9 $\boxed{11}$

4 9 16 25 $\boxed{36}$

5 10 17 26 $\boxed{37}$

2.



16 4 1 $\boxed{0{,}25}$

3. Il s'agit d'un tirage aléatoire. On ne peut pas connaître le terme suivant.

---

01 GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

Définitions et vocabulaire

L'ESSENTIEL

Une **suite numérique** ***u*** est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) sur $\mathbb{R}$.

L'image de l'entier naturel *n* par *u* peut être notée de deux manières différentes :

- Notation **fonctionnelle** : $u(n)$
- Notation **indicielle** utilisée pour les suites : u_n

⇨ Une **suite est finie** si elle est définie sur une partie finie de $\mathbb{N}$

(tous les nombres entiers comme 0 ; 1 ; 2 …).

⇨ **La suite se note également (u_n) avec n $\in \mathbb{N}$.**

- u_n est le **terme général** de la suite7.
- u_p est le **terme de rang p** (*p* est alors une valeur particulière).
- u_{n+1} est le **terme suivant** un ; $un-1$ est le **terme précédent** u_n
- Le premier terme de la suite est le terme initial. Si la suite est définie sur $\mathbb{N}$ il s'agit de u_0

➢ **Ne pas confondre le rang d'un terme et sa position dans la suite** (voir exemple).

Exemple :

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$, de terme général $U_n = n^2 + n$.

Les premiers termes de la suite sont donc :

$u_0 = 0^2 + 0 = 0, u_1 = 1^2 + 1 = 3,\ u_2 = 2^2 + 2 = 6,$

$u_3 = 3^2 + 3 = 12, u_4 = 4^2 + 4 = 20$

Le terme initial est $U_o = 0$.
Le terme de rang 3 vaut $U_3 = 12$
Le terme de rang 3 est le 4ème terme de la suite !

➢ **Toutes les suites ne sont pas forcément définies par un terme général (suite finie aléatoire).**

À VOUS DE JOUER 1

Suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$: 3 5 7 9 ....

Le terme initial vaut ....

Le terme de rang 3 vaut ....

02 GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

Génération d'une suite

L'ESSENTIEL

Une suite numérique (u_n) peut être définie à l'aide :

- **D'une formule explicite :** $u_n = f(n)$
- **D'une formule par récurrence :** $u_{n+1} = f(u_n)$ **:** les termes sont définis en fonction d'un ou plusieurs termes précédents.

Exemple :

Suite définie de manière explicite :

(u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \sqrt{n+3}$. En effet, elle dépend de n et non de u_n.

Suite définie par récurrence :

(u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = n + \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

GÉNÉRATION PAR UNE FORMULE EXPLICITE $u_n = f(n)$

L'ESSENTIEL

Une suite générée de manière explicite est définie par :

- L'expression de la fonction permettant de calculer le rang n,
- L'ensemble des entiers sur lesquels la suite est définie.

➢ **La relation $u_n = f(n)$ permet de calculer chaque terme de la suite en connaissant uniquement le rang. En revanche, elle ne permet pas généralement de calculer un terme en fonction du précédent.**

➢ **Une suite définie de manière explicite est donc une fonction définie sur $\mathbb{N}$. On dit qu'il s'agit d'une fonction discrète.**

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 2n^2 + 1$:

La fonction sous-jacente est f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 2x^2 + 1$

$$u_0 = 2 \times 0^2 + 1 = 1 \qquad u_1 = 2 \times 1^2 + 1 = 3 \qquad u_{10} = 2 \times 10^2 + 1 = 201$$

À VOUS DE JOUER 2

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{n}{2n+1}$.

Cette suite est définie de manière ....

La fonction sous-jacente est f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) =$ ....

$u_0 =$ ....

$u_1 =$ ....

$u_{20} =$ ....

GÉNÉRATION PAR UNE FORMULE DE RÉCURRENCE $u_{n+1} = f(u_n)$

La récurrence est un outil mathématique qui permet de vérifier qu'un raisonnement mathématique est valable sur l'ensemble du domaine de définition étudié.

L'ESSENTIEL

Une suite générée par récurrence est définie à l'aide :

- De la connaissance d'au moins un terme de la suite (le plus souvent u_0).
- D'une fonction établissant une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ permettant de définir chaque terme à partir du précédent (dans la plupart des cas).

➤ **La relation de récurrence permet de connaître la relation entre des termes consécutifs mais ne permet pas généralement de calculer directement en fonction du rang un terme de la suite.**

Exemple :

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

- la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.
- $u_0 = 1$.

Remarque : la relation de récurrence est donnée par la fonction : $f(x) = x^2 + x$

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Calcul des premiers termes :

$$u_1 = u_0{}^2 + u_0 = 2 \quad u_2 = u_1{}^2 + u_1 = 6 \quad u_3 = u_2{}^2 + u_2 = 42$$

À VOUS DE JOUER 3

On considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = -3u_n + 2 \end{cases}$

Il s'agit d'une suite définie par ....

$u_1 =$ ....

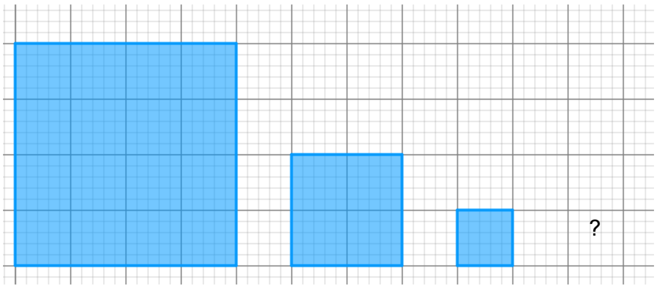
$u_2 =$ ....

$u_3 =$ ....

➢ **Dans certains cas, c'est vous qui devrez trouver la relation de récurrence. L'exemple classique est une suite définie à l'aide de figures géométriques.**

Exemple :

On reprend l'exemple de l'activité.



On passe d'un carré au suivant en divisant le côté par 2.

On appelle (A_n) A la suite des aires.

L'aire à chaque étape est donc divisée par 4.

La suite (A_n) est donc définie par : $\begin{cases} A_0 = 16 \\ A_{n+1} = \frac{A_n}{4} \end{cases}$

03 GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

Variations d'une suite

Comme pour les fonctions, on peut étudier les variations d'une suite. Attention ! Dans le cas des suites définies par récurrence, la variation d'une suite n'est pas toujours identique à la variation de la fonction sous-jacente.

L'ESSENTIEL

- Une suite (u_n) est strictement **croissante** si pour tout entier *n* : $u_{n+1} \geq u_n$
- Une suite (u_n) est strictement **décroissante** si pour tout entier *n* : $u_{n+1} \leq u_n$
- Une suite (u_n) est **constante** si pour tout entier *n* : $u_{n+1} = u_n$

Remarque : une suite est dite **monotone** lorsqu'elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante, soit constante sur l'ensemble du domaine de définition.

➢ **Une suite est croissante (décroissante, …) à partir du premier rang où elle est définie.**

Exemple **1** *:*

on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n$:

Cette suite est strictement croissante (donc monotone).

Exemple **2** *:*

on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$:

Les termes de cette suite valent alternativement +1 et −1.

Cette suite n'est ni croissante, ni décroissante, constante. Elle n'est donc pas monotone.

Méthode 1 pour étudier les variations d'une suite : étude du signe de $u_{n+1} - u_n$

Si pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, (u_n) est croissante.

Si pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, (u_n) est décroissante.

Exemple **1** *:*

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n$:

Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 3n = 3$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

La suite est croissante.

Exemple **2** *:*

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n + 4$ et $u_0 = 5$

$u_{n+1} - u_n = (u_n + 4) - u_n = 4$ *donc* $u_{n+1} - u_n \geq 0$

La suite est croissante.

À VOUS DE JOUER 4

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5 - 2n$.

$u_{n+1} - u_n =$ ....

....

La suite est ....

2. On considère la suite (u_n) définie sur N par $\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = u_n - n \end{cases}$.

$u_{n+1} - u_n =$ ....

La suite est ....

Méthode 2 : étudier les variations de la fonction de définition de la suite

➢ **Attention ! Cette méthode n'est valable que pour les suites explicites, c'est-à-dire les suites de nature $U_n = f(n)$.**

➢ **Remarque : il suffit d'étudier les variations de la fonction sur $\mathbb{R}^+$.**

Exemple ❶ *:*

On considère la suite (u_n) définie sur, $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

Exemple ❷ *:*

L'exemple suivant montre pourquoi pour cette méthode, on a supposé que la suite devait être explicite.

On considère la suite (u_n) définie sur N par $\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$

Par le calcul, $U_1 = \sqrt{100} = 10$ et $U_2 = \sqrt{10}$.

La suite est décroissante (n'est pas croissante) alors que la fonction racine carrée est croissante.

À VOUS DE JOUER 5

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5 - 2n$.

La fonction sous-jacente est : $f(x) =$. .... qui est une fonction

....

La suite(u_n) est donc ....

Remarques :

➢ **La méthode à utiliser dépend de la facilité des calculs, donc de la forme de génération de la suite. La première méthode est généralement utilisée.**

➢ **Pour montrer qu'une suite est croissante ou décroissante, il ne suffit pas de montrer qu'il y a croissance sur les premiers termes. Il faut faire les calculs pour tout n.**

04

GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

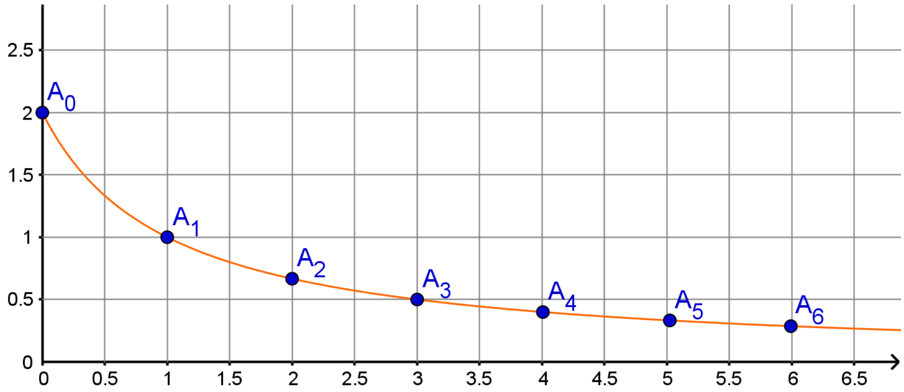
Représentation graphique d'une suite définie de manière explicite

La représentation graphique d'une suite s'obtient en plaçant les points $A_n(n; u_n)$ dans un repère.

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie sur, $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2}{n+1}$.

On a représenté la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x+1}$ et les 7 premiers points représentant la suite.



➢ **La représentation graphique permet de conjecturer le sens de variations de la suite : dans le cas de l'exemple, on peut conjecturer que la suite est décroissante.**

On trouvera en exercice un exemple d'utilisation d'un tableur pour représenter des suites.

05

GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

Les suites et python

Les suites, en particulier celles définies par récurrence, sont un domaine d'application pour la programmation. On trouve principalement 3 types de scripts (ou de fonctions) :

- ✓ **Ceux permettant de calculer les termes d'une suite (un terme particulier ou les *n* premiers termes) ;**
- ✓ **Ceux permettant de déterminer un seuil à partir duquel les termes d'une suite croissante (resp. décroissante) dépassent (ou sont inférieurs à) une certaine valeur.**
- ✓ **Ceux permettant de calculer la somme des premiers termes de la suite.**

Exemple de calcul de termes :

On considère la suite : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$

1. On souhaite écrire un script Python permettant de **calculer le 5ème terme** de la suite (donc le terme de rang 4).

```
U=2  #u0=2
for i in range(4) :
    U=U+i
print(U)
```

Résultat affiché : 8

2. On souhaite écrire une fonction Python permettant de calculer les *n* premiers termes de la suite. On va utiliser une liste.

```
def exemple2(n) :
   U=2  #u0=2
   L=[U]
   for i in range(0,n-2) :
      U=U+i
      L.append(U)
   return L

print(exemple2(10))
```

Résultat affiché pour n=10 : **[2, 2, 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38]**

➢ **Il faut faire très attention aux <u>indices</u> des boucles. Ne pas hésiter à tester sur les premiers termes.**

À VOUS DE JOUER 6

1. On considère la suite : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - n \end{cases}$

a. Complétez la fonction **avdj6_1(n)** permettant de calculer le terme de la suite de rang n .

```
def avdj6_1(n) :
    U=1
    for i in ..........................................
        U= ..........................................
    return U
print(avdj6_1(10))
```

b. Programmez sur EduPython ou la calculatrice.

Quel est le résultat à l'exécution : ....

c. Testez la fonction sur quelques valeurs de n. Qu'observe-t-on ? ....

....

2. Complétez la fonction **avdj6_2(n)** permettant de calculer les *n* premiers termes de la suite :
$\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} \end{cases}$

```
from math import *
def avdj6_2(n) :
    U=..........................................
    L=..........................................
    for i in ..........................................
        U=..........................................
    return L
print(avdj6_2(20))
```

Résultat affiché pour n=20 :
[100, 30.0, 16.43168, 12.1608, 10.4617, 9.70337, 9.34507, 9.17091, 9.08505, 9.04243, 9.02119, 9.01059, 9.00529, 9.00264, 9.00132, 9.00066, 9.00033, 9.00016, 9.00008, 9.00004]

Qu'observe-t-on ? ....

....

Exemple de détermination d'un seuil :

Reprenons l'exemple précédent : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$

Quand *n* augmente, les termes de la suite semblent devenir de plus en plus grands. On dit que cette suite a pour limite $+\infty$. Si on donne une valeur A, au bout d'un certain temps, la suite va dépasser A. Le rang du premier terme supérieur à est le seuil correspondant à A.

On veut que l'algorithme affiche le seuil pour une valeur A entrée par l'utilisateur.

```
def exemple3(A) :
  U=2  #u0=2
  i=0
  while (U<=100) :
    U=U+i
    i=i+1
  return i

print(exemple3(100))
```

Résultat affiché pour A=100 : 15

Voici les premiers termes de la suite :

[2, 2, 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47, 57, 68, 80, 93, 107, 122, 138, 155, 173]

À VOUS DE JOUER 7

On considère la suite : $\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} \end{cases}$.

Cette suite semble décroissante et converger vers 9.

Complétez la fonction avdj7() permettant de savoir à partir de quel rang on a : $u_n < 9{,}0001$.

```
def avdj7() :
  U=100
  i= ..........................................

  ..........................................

    U= ......................................

    i= ......................................

  return ....................................


print(avdj7())
```

EXERCICE 01

Exprimez le terme général des suites définies sur $\mathbb{N}$ suivantes :

1. Suite des multiples positifs de 3

2. Suite des puissances de 10 supérieures ou égales à 10^3.

EXERCICE 02

Soit $(u)_n$ une suite définie sur $\mathbb{N}$ Combien y-a-il de termes :

a) de u_0 à u_8

b) de u_1 *à* u_{15}

c) de u_0 *à* u_n

d) de u_p à u_n

EXERCICE 03

Exprimez la suite suivante par une relation de récurrence :

1. Le terme initial vaut 1. Un terme est égal à 1 auquel on ajoute l'inverse du terme précédent.

2. Le terme initial vaut 100. Un terme est égal au terme précédent augmenté de 6%.

EXERCICE 04

Calculez les termes u_1, u_2, u_3 dans les suites suivantes :

a) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - 3{u_n}^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2-u_n}{3+u_n} \end{cases}$

EXERCICE 05 **Étudiez les variations des suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$ en utilisant les variations des fonctions de référence :**

$a_n = 4 - 5n$

$b_n = 2n^2 + 1$

EXERCICE 06 **Étudiez les variations des suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$:**

$u_n = n - 3n^2$

$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = v_n + 2n + 1 \end{cases}$

$w_n = \frac{3n}{n+1}$

EXERCICE 07 **Soit une suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 5n + 8$.**

1. Déterminez son sens de variation.

2. Déterminez le seuil pour lequel : $u_n \geq 1000$

EXERCICE 08 **Sujet adapté du Liban TES 2016.**

La suite de l'exercice est proposée dans le chapitre suivant.

L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées

Le patron de cette entreprise remarque que, chaque année, 12% de contrats supplémentaires sont souscrits et 6 contrats résiliés. Il se fonde sur ce constat pour estimer le nombre de contrats annuels à venir. En 2020, l'entreprise PiscinePlus dénombrait 75 contrats souscrits. On modélise la situation par une suite (u_n) définie sur N où u_n représente le nombre de contrats souscrits auprès de l'entreprise PiscinePlus l'année 2020+*n*. Ainsi, on a $u_0 = 75$.

1.

a. Estimez le nombre de contrats d'entretien en 2021.

b. Déterminez u_{n+1} en fonction de u_n.

2. L'entreprise PiscinePlus peut prendre en charge un maximum de 100 contrats avec son nombre actuel de salariés. Au-delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel. On cherche à connaître en quelle année l'entreprise devra embaucher. Pour cela, on utilise l'algorithme suivant :

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		U est un nombre réel
L3		Traitement : Affecter à n la valeur 0
L4		Affecter à U la valeur 75
L5		Tant que $U \leqslant 100$ faire
L6		n prend la valeur $n+1$
L7		U prend la valeur $1,12U-6$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher ...

a. Traduisez ce programme en Python. On complétera au préalable la ligne L9.

b. Quelle valeur affiche le programme ?

....

....

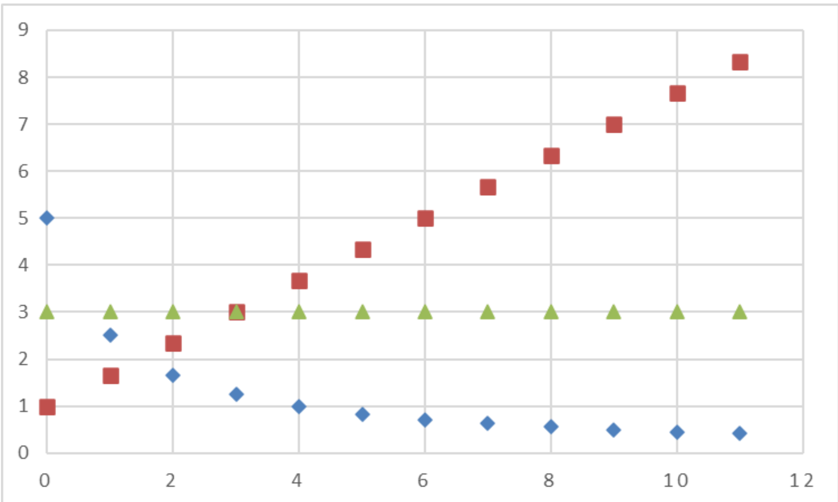
c. Interprétez cette valeur dans le contexte de cet exercice ....

EXERCICE 09 **Conjecturez le sens de variation des 3 suites dont on a représenté les premiers termes :**

Losanges bleus : suite (u_n) ....

Carrés rouges : suite (v_n) ....

Triangles verts : suite (w_n) ....



EXERCICE 10 **On considère la suite définie par :** $\begin{cases} u_0 = 50 \\ u_{n+1} = 0{,}6u_n + 2 \end{cases}$

On veut représenter sur un graphique les 15 premiers termes à l'aide d'un tableur.
On met dans la colonne A les valeurs de n, et dans la colonne B celles de la suite.

1. Si on met la valeur de u_0 dans la cellule B2, quelle formule que l'on recopiera ensuite vers le vas doit-on-mettre dans B3 ? ....

....

2. Finissez.

Indications :
Sélectionnez la plage A1 :B15.
Dans Excel, il faut utiliser : Insertion>Graphique>Nuage de points.
Dans Openoffice, il faut utiliser : Diagramme>XY>Points seuls.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. Conjecturez à partir du graphique le sens de variation de la suite. ....

....

EXERCICE 11 **Suites de Syracuse ***(difficile)**

Une **suite de Syracuse** une suite d'entiers naturels définie de la manière suivante : on part d'un nombre entier plus grand que zéro ; s'il est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. En répétant l'opération, on obtient une suite d'entiers positifs
Par exemple, à partir de 14, on construit la suite des nombres : 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2… C'est ce qu'on appelle la suite de Syracuse du nombre 14.
Une fois que le nombre 1 a été atteint, la suite des valeurs (1,4,2) se répète indéfiniment.
La **conjecture de Syracuse** est l'hypothèse selon laquelle toute suite de Syracuse atteint 1. Mais elle n'a jamais été démontrée.

1. Ecrivez une fonction Python syracuse(A) qui revoie les 100 premiers termes de la suite de Syracuse du nombre A.

2. Testez la fonction pour des nombres pas trop grands.

LE TEMPS DU BILAN

Dans ce chapitre, nous avons :

- Appris le vocabulaire lié aux suites.
- Généré des suites de **manière explicite et par récurrence.**
- Déterminé les variations d'une suite.
- Représenté graphiquement des suites et en déduire une conjecture sur leur sens de variation.
- Utilisé python pour calculer les premiers termes d'une suite , déterminer un seuil.

Génération d'une suite :

- **Explicite :** $u_n = f(n)$
- **Par récurrence :** $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Variations d'une suite :

- ***u*** **est croissante si on a pour tout** *n* **de** *N*, $u_{n+1} \geq u_n$
- ***u*** **est décroissante si on a pour tout** *n* **de** *N*, $u_{n+1} \leq u_n$
- ***u*** **est constante si on a pour tout** *n* **de** *N*, $u_{n+1} = u_n$
- ***u*** **est monotone si** ***u*** **est soit croissante, soit décroissante, soit constante**.

LES CLÉS DU BAC by COURS PI

LES SUITES

Les méthodes sont parfois différentes entre les suites explicites et les suites définies par récurrence (étude des variations, représentation graphique, …). Il est dont important de bien savoir dès le départ si vous êtres dans un cas ou dans l'autre.

Un exercice sur les suites comporte souvent des questions **Python**. Il faut en particulier bien distinguer les fonctions **donnant le calcul des termes et celles donnant un seuil**.

Quelques indices pour cela :

- ✓ On retourne une **liste** et/ou on a une boucle **for** ? il s'agit certainement du calcul de termes.
- ✓ On retourne un **indice** et/ou on a une boucle **while** ? il s'agit certainement du calcul d'un seuil.

Exemple :

On considère la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 8$.

Voici 2 exemples de questions :

Question 1 : Que fait la fonction calcul1 ?

```
def calcul1(n):
    u=3
    for i in range (n):
        u=2*u-8
    return u
```

Réponse : la fonction calcul terme de rang n de la suite.

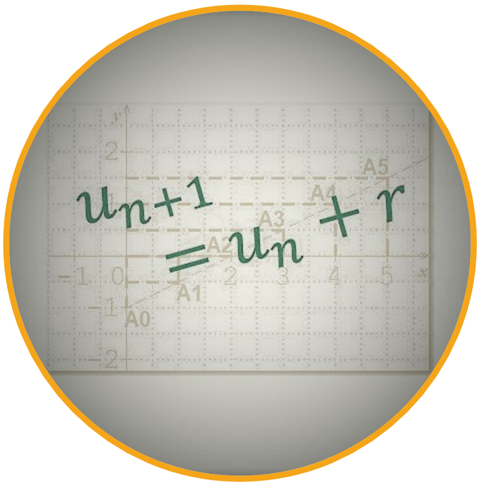
Question 2 : Complétez le programme pour afficher le plus petit entier N tel que : $u_N \geq 150$

```
u=3
N=0
 while u.............................................. :
          u=..............................................
          N=..............................................
 Print (N)
```

Réponse

```
u=3
N=0
 while u<150 :
          u=2*u-8
          N=N+1
 Print (N)
```

CHAPITRE 2
SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES



On va appliquer le chapitre précédent à deux types de suites : les suites arithmétiques et les suites géométriques. Ces suites sont particulièrement intéressantes car elles peuvent être manipulées à la fois avec une définition par récurrence et une définition explicite.

COMPÉTENCES VISÉES

- Conjecturer, à partir de sa représentation graphique, la nature arithmétique ou géométrique d'une suite.
- Démontrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique.

PRÉ-REQUIS

- Généralités sur les suites.

Première approche

ACTIVITÉ 1

Monsieur Fourmi ouvre un compte d'épargne le 1er janvier 2019. Il fait un dépôt initial de 100€. Les premiers des mois suivants, il dépose 15€ et ne retire jamais d'argent de ce compte.

1er janvier	100€
1er février	115€
1er mars	130€
1er avril	145€
1er mai	160€

1. Si le montant total déposé à un mois donné vaut M_n , que vaut ce montant le mois suivant ? ....

....

2. La suite est donc définie par : $\begin{cases} M_1 = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ M_{n+1} = M_n + \cdots \ldots\ldots\ldots.. \end{cases}$

3. Quelle est l'expression en fonction de *n* de M_n ? $M_n = 100 + 15 \times$ ....

4. Quel montant sera sur le compte le 15 octobre 2019 ? ....

Une telle suite est dite arithmétique.

ACTIVITÉ2

Le **problème de l'échiquier de Sissa**, également connu sous les noms de **problème des grains de blé et de l'échiquier** et **problème des grains de riz et de l'échiquier**[1], est un problème mathématique pouvant s'exprimer ainsi :
« On place un grain de riz (ou de blé) sur la première case d'un échiquier. Si on fait en sorte de doubler à chaque case le nombre de grains de la case précédente (un grain sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, etc.), combien de grains de riz obtient-on au total ? »
Le problème peut être résolu par une simple addition. Puisqu'un échiquier possède 64 cases, le total des grains est de 1 + 2 + 4 + 8 + ... jusqu'à la 64e case. On obtient ainsi 18 446 744 073 709 551 615 grains, ce qui correspond au 64e nombre de Mersenne.

1. Par combien multiplie-t-on le nombre de grains pour passer d'une case à la suivante ? ....

2. Soit (a_n) la suite donnant le nombre de grains à la case *i*, pour $i = \{1,2,\ldots,64\}$.

$$a_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\times a_n$$

Une telle suite est dite géométrique.

3. Déterminez la forme explicite de cette suite. ....

4. Combien y a-t-il de grains sur la case 8 ? ....

CORRECTION DE L'ACTIVITÉ 1

1. $M_n + 15$

2. La suite est donc définie par : $\begin{cases} M_1 = 100 \\ M_{n+1} = M_n + 15 \end{cases}$

3. $M_n = 100 + 15 \times (n-1)$ Le 1 de (n – 1) correspond au nombre d'années entre l'année 1 et l'année n.

4. $M_8 = 100 + 15 \times (10-1) = 235$ €

CORRECTION DE L'ACTIVITÉ 2

1. Par combien multiplie-t-on le nombre de grains pour passer d'une case à la suivante ? 2

2. Soit (a_n) la suite donnant le nombre de grains à la case *i*, pour $i = \{1, 2, ..., 64\}$.

$$a_{n+1} = 2 \times a_n$$

Une telle suite est dite géométrique.

3. Déterminez la forme explicite de cette suite. $a_n = 2^{n-1}$

4. Combien y a-t-il de grains sur la case 8 ? $a_8 = 2^7 = 128$

Les suites géométriques sont surement celles qui interviennent le plus fréquemment. Elles font l'objet de très nombreux exercices, et vous avez peu de chances d'y échapper au bac.

01

SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

DÉFINITION ET FORMULES

L'ESSENTIEL

Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** si, à partir d'un terme initial u_0, on passe au terme suivant en ajoutant le même nombre *r* appelé **raison**.

Formule par récurrence à partir de u_0 : pour tout *n* : $u_{n+1} = u_n + r$

Exemple :

La suite (u_n) définie sur ℕ par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + 2$ est une suite arithmétique
De terme initial $u_0 = 4$ et de raison $r = 2$.
Premiers termes : 4, 6, 8, 10…….

L'ESSENTIEL

La suite arithmétique u de terme initial u_0 et de raison r a pour terme général :

$$u_n = u_0 + nr$$

Exemple :

La suite *(u_n)* définie sur ℕ par $u_0 = 4$et $u_{n+1} = u_n + 2$ a pour terme général :

$$u_n = 4 + 2n$$

Le 4ème terme de la suite correspond à $p = 3$ et vaut : $u_3 = 4 + 2 \times 3 = 10$

À VOUS DE JOUER 8

1. (u_n) est la suite arithmétique définie sur ℕ de raison 3 et de premier terme 5.

Ecrivez sa définition par récurrence : $\begin{cases} u_0 = \dots\dots\dots\dots \\ u_{n+1} = \dots\dots\dots\dots \end{cases}$

Ecrivez sa définition explicite : $u_n =$ ....

Calculez le 10ème terme de la suite donc le terme .... : $u_{...} =$ ....

2. (u_n) est une suite arithmétique tel que $u_4 = 5$ et $u_5 = 2$.

Sa raison r vaut : $u_5 - u_4 =$ ....

$u_n =$ .... soit $u_n =$ ....

Méthode : déterminer si une suite est arithmétique

On calcule la différence de deux termes consécutifs <u>quelconques</u> : $u_{n+1} - u_n$

- Si cette différence est un réel constant, il s'agit d'une suite arithmétique.
- Sinon, la différence dépend de n et il ne s'agit pas d'une suite arithmétique.

➢ **Pour montrer <u>qu'il ne s'agit pas d'une suite arithmétique</u>, on peut également exhiber deux couples de termes consécutifs n'ayant pas la même différence.**

➢ **Remarque : on peut également essayer de calculer u_{n+1} et montrer que u_{n+1}s'écrit $u_{n+1} = u_n + r$.**

Exemple 1 :

Soit (u_n) définie sur ℕ par $u_n = -2n + 5$. Est-elle arithmétique ?

$$u_{n+1} - u_n = -2(n+1) + 5 - (-2n+5) = -2n - 2 + 5 + 2n - 5 = -2$$

Il s'agit donc d'une suite arithmétique de raison −2.

Exemple 2 :

Soit (u_n) définie sur ℕ par $u_n = -n^2 + 5$. Est-elle arithmétique ?

$$u_{n+1} - u_n = -(n+1)^2 + 5 - (-n^2 + 5) = -(n^2 + 2n + 1) + 5 - (-n^2 + 5)$$

$$u_{n+1} - u_n = -n^2 - 2n - 1 + 5 + n^2 - 5 = -2n - 1$$

Il ne s'agit donc d'une suite arithmétique.

On aurait également calculé : $u_1 - u_0 = -1$ et $u_2 - u_1 = -3$.

Les deux résultats étant différents, il ne s'agit pas d'une suite arithmétique.

À VOUS DE JOUER 9

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} + u_n = 2u_n + 2 \end{cases}$

Est-elle arithmétique ? ....

....

1. Voici les premiers termes d'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$: 1 5 10 15

Est-elle arithmétique ? ....

....

2. Voici les premiers termes d'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$: 1 5 9 13

Est-elle arithmétique ? ....

....

....

COMPORTEMENT ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

L'ESSENTIEL

Le **sens de variation** d'une suite arithmétique (u_n) de terme initial u_0 et de raison r

- Si $r > 0$: *u* est croissante.
- Si $r < 0$: *u* est décroissante.
- Si $r = 0$: *u* est constante.

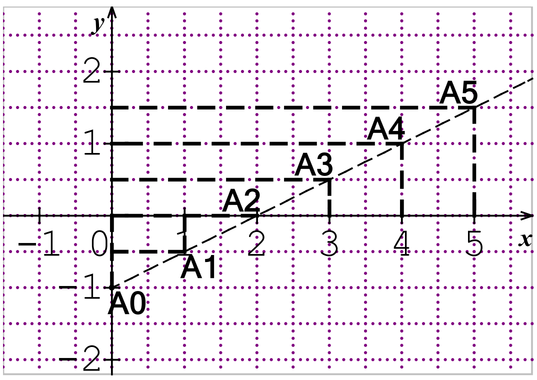
Dans sa représentation graphique, **tous les points d'une suite arithmétique seront alignés** sur la droite d'équation : $y = u_0 + rx$.

➢ Les termes d'une suite arithmétique augmentent ou diminuent de manière linéaire. On parle de **croissance ou décroissance linéaire.**

Exemple ❶ *:*
Pour tout *n* :
$u_n = 0{,}5n - 1$

Il s'agit d'une suite arithmétique de raison 0,5.

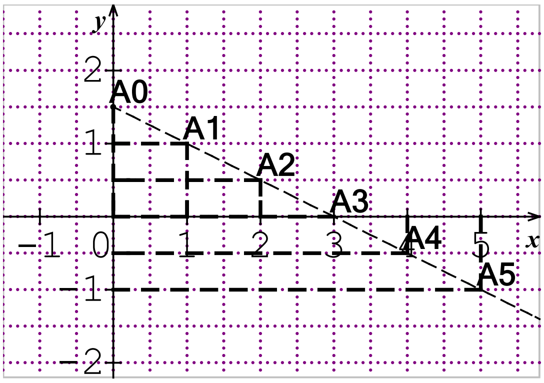
La suite est donc <u>croissante</u>.



Exemple ❷ *:*
Pour tout *n* :
$u_n = -0{,}5n + 1{,}5$

Il s'agit d'une suite arithmétique de raison −0,5.

La suite est donc <u>décroissante</u>.



À VOUS DE JOUER 10

(u_n) est la suite définie sur ℕ par : $\begin{cases} u_0 = -10 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$

(u_n) est une suite arithmétique (*croissante/décroissante*) .... car sa raison est ....

Cette suite correspond à un modèle de (*croissance/décroissance*) ....

....

(u_n) est la suite définie sur ℕ par : $u_n = 10 - 2n$

(u_n) est une suite arithmétique (*croissante/décroissante*).. car sa raison est ....

Cette suite correspond à un modèle de (*croissance/décroissance*) ....

....

APPLICATION DES SUITES ARITHMÉTIQUES À L'ÉCONOMIE : PLACEMENTS A INTÉRÊTS SIMPLES

En économie, il y a principalement deux manières de placer un capital pour le faire fructifier :

- ✓ Le placement à intérêts simples,
- ✓ Et le placement à intérêts composés (ces placements seront vus ultérieurement).

L'ESSENTIEL

Placement à intérêts simples : Pour ce type de placement, les intérêts sont calculés chaque année sur le <u>capital initial placé au départ</u>. Ainsi, chaque année, le capital acquis augmente d'une somme fixe (cette somme correspondant généralement à un certain pourcentage du capital initial).

L'ESSENTIEL

L'évolution de ce type de placement peut être modélisée par une suite arithmétique (C_n), C_n représentant le capital au terme de *n* années de placement.

- Le premier terme de cette suite est le capital initial C_0.
- La raison de cette suite est le capital initial multiplié par le taux annuel du placement.

Exemple :

Un capital de 20 000 € est placé à intérêts simples au taux annuel de 5%.

Chaque année le capital augmente de 5 % de 20 000, soit1 000 €.

Si $C_n$représentant le capital au terme de *n* années, $C_n = 20000 + 1000n$

02 SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

Suites géométriques

DÉFINITIONS ET FORMULES

L'ESSENTIEL

Une suite (u_n) est une **suite géométrique** si, à partir d'un terme initial u_0, on passe au terme suivant en le multipliant par le même nombre *q* appelé **raison**.

pour tout *n* : $u_{n+1} = qu_n$ (formule par récurrence, u_0 donné)

➢ **Comme pour les suites arithmétiques, la constante de la formule de récurrence est appelée raison. Généralement on note *r* la raison d'une suite arithmétique et *q* la raison d'une suite géométrique.**

Exemple :

La suite *u* définie sur ℕ par $u_0 = 4$et $u_{n+1} = 2u_n$ est une suite géométrique de

Terme initial $u_0 = 4$ et de raison $q = 2$.

Premiers termes : 4, 8, 16, 32…….

Cas particuliers :

$q = 1$: la suite est constante $u_n = u_0$

$q = 0$: la suite est constante à partir du rang 1 . Pour $n > 0$ $u_n = 0$

$u_0 = 0$: la suite est la suite constante nulle . Pour $n \geq 0$ $u_n = 0$

À VOUS DE JOUER 11

Entourez les suites géométriques (suites définies sur ℕ de premier terme u_0):

$u_{n+1} = 3u_n$ $\qquad u_{n+1} = 4u_n - 1$ $\qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{5}$ $\qquad u_{n+1} = 5u_n + n$

APPLICATION DES SUITES ARITHMÉTIQUES À L'ÉCONOMIE : PLACEME

L'ESSENTIEL

La **suite géométrique** *u* de terme initial u_0 et de raison *q* a pour terme général :

$u_n = u_0 q^n$ (Formule explicite).

À VOUS DE JOUER 12

1. (u_n) est la suite géométrique de raison 3 et de premier terme 5.

Ecrivez sa définition par récurrence : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \text{..} \end{cases}$

Ecrivez sa définition explicite : $u_n =$ ....

2. (u_n) est une suite géométrique telle que $u_3 = 6$ et $u_2 = 3$.

Sa raison q vaut : $\frac{u_3}{u_2} =$ ....

$u_2 = q^{\cdots} u_0 = \ldots\ldots\ u_0$ donc $u_0 = \ldots\ldots\ldots$.

Terme général : $u_n =$ ....

....

Méthode : déterminer si une suite est géométrique

On calcule le rapport entre deux termes consécutifs quelconques : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

- Si ce rapport est un réel constant, il s'agit d'une suite géométrique.
- Si ce rapport dépend de n, il ne s'agit pas d'une suite géométrique.

➤ **Pour montrer <u>qu'il ne s'agit pas d'une suite géométrique</u>, on peut également exhiber deux couples de termes consécutifs n'ayant pas le même quotient.**

➤ **Remarque : on peut également essayer de calculer u_{n+1} et montrer que u_{n+1}s'écrit $u_{n+1} = qu_n$.**

Exemple 1 :

soit (u_n) définie sur N par $u_n = 5 \times (-2)^n$. Est-elle géométrique ?

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times (-2)^{n+1}}{5 \times (-2)^n} = -2$$

Il s'agit donc d'une suite géométrique de raison −2.

Exemple 2 :

soit (u_n) définie sur N par $u_n = -n^2$. Est-elle géométrique ?

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-(n+1)^2}{-n^2} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

Il ne s'agit donc pas d'une suite géométrique.

On aurait également pu calculer : $\frac{u_2}{u_1} = 4$ et $\frac{u_3}{u_2} = \frac{9}{4}$. Les deux quotients étant différents, il ne s'agit pas d'une suite géométrique.

Dans la suite du cours, on supposera que le premier terme et la raison sont des nombres strictement positifs.

COMPORTEMENT ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

L'ESSENTIEL

- Si $q > 1$: (u_n) est strictement croissante.
- Si $q < 1$: (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$: (u_n) est constante.

➢ Les termes d'une suite géométrique quand la raison n'est pas très proche de 1, augmentent très rapidement. On parle de **croissance exponentielle.**

Si **0<q<1**, les termes diminuent très rapidement. On parle de **décroissance exponentielle.**

L'ESSENTIEL

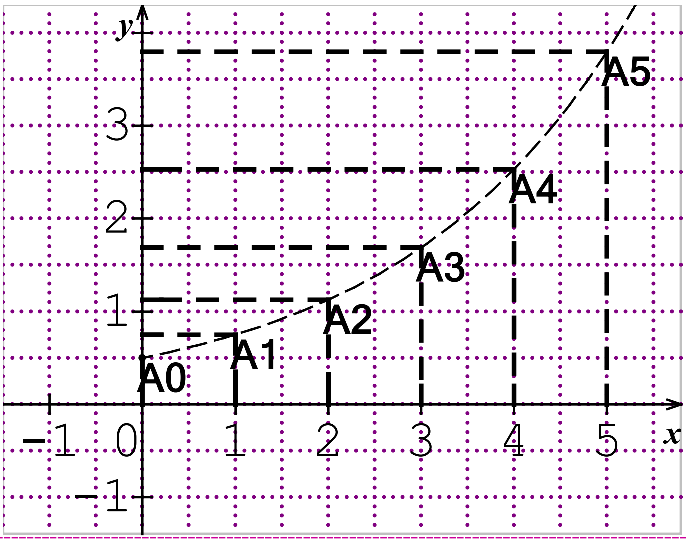
Une **suite géométrique** correspond à **un modèle de croissance (ou de décroissance) exponentielle.**

Exemple 1 :

Pour tout n : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2} u_n \end{cases}$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$ qui est strictement supérieure à 1.

La suite est donc <u>croissante</u>.

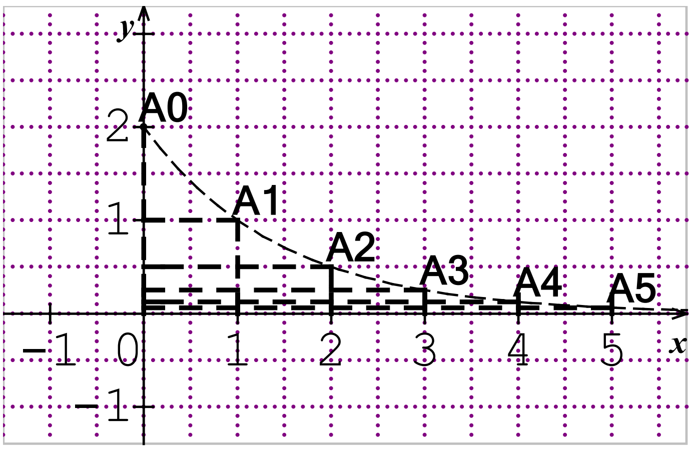


Exemple 2 :

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n \end{cases}$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ qui est positive et strictement inférieure à 1.

La suite est <u>décroissante</u>.



À VOUS DE JOUER 13

1.

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{5}{3}u_n \end{cases}$$

Cette suite géométrique est (*croissante/décroissante*) ....

car ....

Cette suite correspond à un modèle de (*croissance/décroissance*)..

....

2.

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{5}u_n \end{cases}$$

Cette suite géométrique est (*croissante/décroissante*) .... car .....

....

Cette suite correspond à un modèle de (*croissance/décroissance*) ....

....

APPLICATION DES SUITES GÉOMÉTRIQUES À L'ÉCONOMIE : PLACEMENTS A INTÉRÊTS COMPOSÉS

L'ESSENTIEL

Placement à intérêts composés : Pour ce type de placement, les intérêts sont calculés chaque année sur le capital de l'année précédente.

L'évolution de ce type de placement à taux d'intérêt fixe peut-être modélisée par une suite géométrique (C_n), C_n représentant le capital au terme de *n* années de placement.

- Le premier terme de cette suite est le capital initial C_0.
- La raison de cette suite est $(1+t)$ où *t* est le taux d'intérêt annuel.

Exemple :

Un capital de 20 000 € est placé à intérêts composés au taux annuel de 5%.

Si C_n représentant le capital au terme de *n* années, $C_n = 20000 \times (1 + 5\%)^n = 20000 \times 1{,}05^n$

Au bout de 10 ans, le capital acquis sera : $C_{10} = 20000 \times 1{,}05^n = 32578€$

EXERCICE 12 Pour chaque suite supposée arithmétique de raison r, déterminer u_1, u_2 et u_3.

a) $u_0 = -1 ; r = 3$

b) $u_0 = \frac{4}{3} ; r = \frac{1}{3}$

c) $u_1 = -3 ; r = -2$

EXERCICE 13 Pour chaque suite reconnaître si elle est arithmétique, et si elle l'est, donner son premier membre et sa raison.

a) $u_n = 3 - 5n$

b) $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$

c) $u_n = \frac{n^2-1}{n+1}$

EXERCICE 14

Pour chaque suite supposée géométrique de raison q, calculer u_1, u_2, u_3 et déterminer son sens de variation.

a) $u_0 = \frac{1}{2}; q = 3$

b) $u_0 = 5; q = 1{,}2$

EXERCICE 15

Les suites suivantes sont-elles géométriques ? (On donnera pour les suites géométriques le premier terme u_0, la raison q.

a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n \end{cases}$

b) $u_n = 3 \times 5^{n+1}$

c) $u_n = 2n^4 + 1$

d) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3} u_n \end{cases}$

EXERCICE 16 54 ; 162 ; 486 peuvent-ils être les 3 termes consécutifs d'une suite géométrique de raison positive ?

....

....

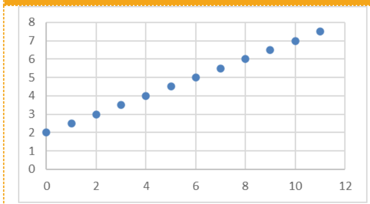
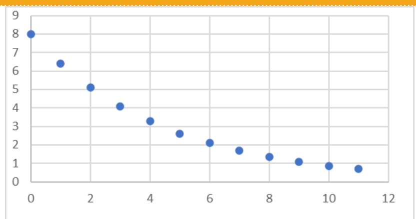
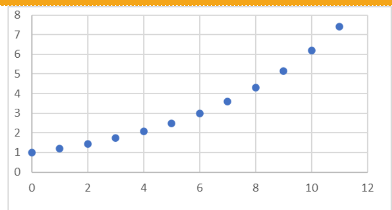
....

....

....

....

EXERCICE 17 Donnez la nature de la suite (arithmétique/géométrique), son sens de variation des suites et le modèle correspondant (croissance/décroissance, linéaire/exponentielle).

Suite *u*	Suite *v*	Suite *w*
		
....	....	....

EXERCICE 18 Donnez la nature de la suite (arithmétique/géométrique), son sens de variation des suites et le modèle correspondant (croissance/décroissance, linéaire/exponentielle) :

a) $\begin{cases} u_0 = 0{,}5 \\ u_{n+1} = \dfrac{4}{3}u_n \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{3}{4} \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} - u_n = -1 \end{cases}$

a. ....

b. ....

c. ....

d. ....

EXERCICES

EXERCICE 19 **Chaque année le nombre d'unités importées d'une marchandise augmente de 5%. 10000 unités ont été importées en 2020.**

1. Quel est le nombre d'unités importées en 2021 ?

2. Quelle est la relation entre le nombre d'unités importées l'année 2020+n et le nombre d'unités importées l'année 2020+n+1 ?

3. Comment qualifieriez-vous ce modèle ?

EXERCICE 20 **Pour former une pièce métallique à partir d'une plaque de 2 centimètres d'épaisseur, on utilise un marteau pilon. Le marteau pilon frappe toutes les 6 secondes, et à chaque coup, l'épaisseur de métal diminue de 2 %. On note u_n (*n* entier naturel) l'épaisseur en millimètres de la pièce après *n* frappes de marteau pilon.**

1. Déterminez les 4 premiers termes de la suite (u_n) au centième de millimètre près.

2. Montrez que la suite (u_n) est géométrique. On précisera sa raison et son terme initial.

3. Quelle est l'épaisseur de la pièce après 10 frappes ? *(On donnera le résultat au centième de millimètres près).* On rappelle que le terme d'une suite géométrique s'écrit : $u_n = u_0 q^n$

4. La pièce est terminée quand son épaisseur est inférieure à 14 mm. En combien de temps sera-t-elle terminée ?

EXERCICE 21 **(Suite de l'exercice Liban TES 2016)**

On rappelle que, pour tout entier naturel *n*, on $u_{n+1} = 1{,}12 \times u_n - 6$ et $u_0 = 75$.On pose pour tout entier naturel *n*: $v_n = u_n - 50$.

a. Montrez que la suite (v_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

b. En déduire l'expression de v_n en fonction de *n* puis montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a :

$$u_n = 25 \times 1{,}12^n + 50.$$

LE TEMPS DU BILAN

Dans ce chapitre, nous avons :

- Défini les suites arithmétiques et géométriques;
- Appris à les reconnaitre **;**
- Etudié leur comportement à partir de leur définition ou de leur représentation graphique ;
- Utilisé python pour calculer les premiers termes d'une suite et déterminer un seuil.

Suites arithmétiques

▶ ***La suite u est une suite arithmétique de raison r (réel) si pour tout n de* N *on a :***

$$u_{n+1} - u_n = r$$

Terme général d'une suite arithmétique : $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$

▶ **Sens de variation et limite** :

- ✓ Si $r > 0$: *u* est strictement croissante ;
- ✓ Si $r < 0$: *u* est strictement décroissante ;
- ✓ Si $r = 0$: *u* est constante ;

Une suite arithmétique correspond à un modèle à croissance (ou décroissance) linéaire.

Suites géométriques (avec premier terme et raison strictement positifs)

▶ ***La suite u est une suite géométrique de raison q (réel) si pour tout n de* N *on a :***

$$u_{n+1} = qu_n$$

Sens de variation d'une suite géométrique *u* de terme initial u_0 et de raison *q* :

- ✓ Si $q > 1$: (u_n) est strictement croissante.
- ✓ Si $q < 1$: (u_n) est strictement décroissante.
- ✓ Si $q = 1$: (u_n) est constante

Une suite arithmétique correspond à un modèle à croissance (ou décroissance) exponentielle.

LES SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

La très grande majorité des exercices sur les suites font intervenir les suites arithmétiques et géométriques avec souvent une question Python.

Voici deux exemples commentés.

Exemple ❶ *:*

Question 3

On souhaite modéliser le niveau de la mer par une suite (U_n) de façon que U_0 représente le niveau de la mer, en mm, en 2003 et que U_n représente le niveau de la mer, en mm, n années après 2003.

Selon le site www.notre-planete.info/terre/climatologie_meteo, on constate une hausse assez rapide du niveau de la mer, qu'on estime à 3,3 mm par an depuis 2003.

Pour traduire ce constat, la suite (U_n) doit être :

$a)$ une suite géométrique de raison 3,3.	$b)$ une suite géométrique de raison 1,033.	$c)$ une suite arithmétique de raison 1,033.	$d)$ une suite arithmétique de raison 3,3.

Réponse : C'est bien entendu la réponse d) qui est correcte.

Exemple ❷ *: exercice type*

En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 20 % de son intensité lumineuse. L'intensité lumineuse est exprimée en candela (cd).

On utilise une lampe torche qui émet un rayon d'intensité lumineuse réglée à 400 cd.

On superpose n plaques de verres identiques (n étant un entier naturel) et on désire mesurer l'intensité lumineuse I_n du rayon à la sortie de la n-ième plaque.

On note $I_0 = 400$ l'intensité lumineuse du rayon émis par la lampe torche avant de traverser les plaques (intensité lumineuse initiale). Ainsi, cette situation est modélisée par la suite (I_n).

1. Montrer par un calcul que $I_1 = 320$.
2. a. Pour tout entier naturel n, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
   b. En déduire la nature de la suite (I_n). Préciser sa raison et son premier terme.
   c. Pour tout entier naturel n, exprimer I_n en fonction de n.

Un exemple classique de suite géométrique, construite à partir d'un taux d'augmentation ou de diminution. Une occasion de réviser les pourcentages !

1. ....

2a. ....

2b. ....

2c. ....

Réponse :
1. L'intensité diminue de 20%, donc 80% passe. $I_1 = 0{,}8 \times I_0 = 0{,}8 \times 400 = 320$
2.a. Avec le même raisonnement qu'en 1, $I_{n+1} = 0{,}8 \times I_n$
2.b. Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme 400, et de raison 0,8.
2.c. $I_n = I_0\, q^n = 400 \times 0,8^n$ – Pour la question c, il faut bien faire attention au rang du premier terme. Si le rang est 1, $u_n = u_1\, q^{n-1}$

Exemple ❸ *:*

3. On souhaite déterminer le nombre minimal n de plaques à superposer afin que le rayon initial ait perdu au moins 70 % de son intensité lumineuse initiale après sa traversée des plaques.

   a. Afin de déterminer le nombre de plaques à superposer, on considère la fonction Python suivante.

```
def nombrePlaques(J):
    I=400
    n=0
    while I > J:
        I = 0.8*I
        n = n+1
    return n
```

   Préciser, en justifiant, le nombre j de sorte que l'appel `nombrePlaques(j)` renvoie le nombre de plaques à superposer.

   b. Le tableau suivant donne des valeurs de I_n. Combien de plaques doit-on superposer ?

n	0	1	2	3	4	5	6	7
I_n	400	320	256	204,8	163,84	131,07	104,85	83,886

a. ....

....

....

b. ....

....

....

Réponse :
a. Une fonction classique de calcul d'un seuil.
L'intensité doit être inférieure à 30% de l'intensité initiale, soit $30\% \times 400 = 120$.
Donc j=120. L'algorithme aurait pu également concerner le calcul d'un terme de la suite, le calcul des premiers termes (résultat donné sous forme d'une liste), ou la somme des premiers termes.
b.120 se situe entre n=4 et n=5. **Il faut donc 5 plaques.**
On aurait pu également exécuter l'algorithme "à la main" et vous demander la valeur renvoyée par nombrePlaques(120).