COURS PI

L'école sur-mesure

de la Maternelle au Bac, Établissement d'enseignement privé à distance, déclaré auprès du Rectorat de Paris

Première STMG - Module 3 - Statistiques et probabilités

Mathématiques

v.5.1

- ***Guide de méthodologie***
  pour appréhender notre pédagogie
- ***Leçons détaillées***
  pour apprendre les notions en jeu
- ***Exemples et illustrations***
  pour comprendre par soi-même
- ***Prolongement numérique***
  pour être acteur et aller + loin
- ***Exercices d'application***
  pour s'entraîner encore et encore
- ***Corrigés des exercices***
  pour vérifier ses acquis

www.cours-pi.com

Paris & Montpellier

EN ROUTE VERS LE BACCALAURÉAT

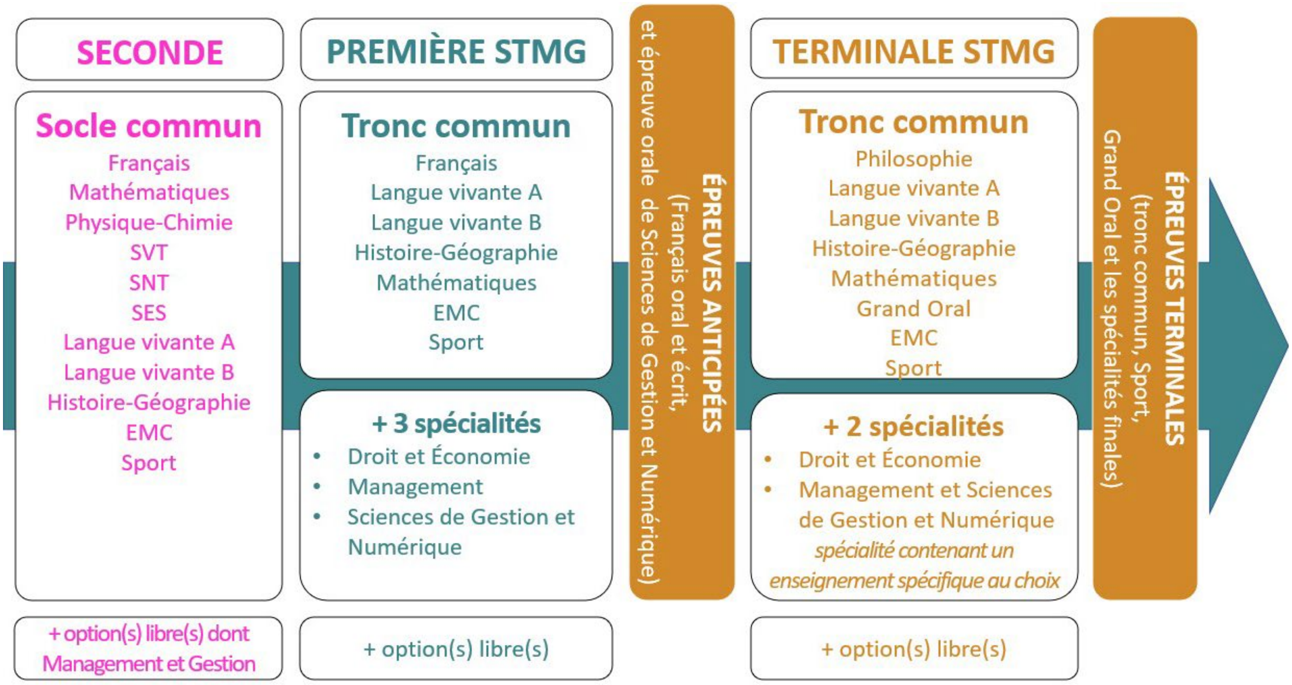
Comme vous le savez, **la réforme du Baccalauréat** est entrée en vigueur progressivement jusqu'à l'année 2021, date de délivrance des premiers diplômes de la nouvelle formule.

Dans le cadre de ce nouveau Baccalauréat, **notre Etablissement**, toujours attentif aux conséquences des réformes pour les élèves, s'est emparé de la question avec force **énergie** et **conviction** pendant plusieurs mois, animé par le souci constant de la réussite de nos lycéens dans leurs apprentissages d'une part, et par la **pérennité** de leur parcours d'autre part. Notre Etablissement a questionné la réforme, mobilisé l'ensemble de son atelier pédagogique, et déployé tout **son savoir-faire** afin de vous proposer un enseignement tourné continuellement vers l'**excellence**, ainsi qu'une scolarité tournée vers la **réussite**.

- Les **Cours Pi** s'engagent pour faire du parcours de chacun de ses élèves un **tremplin vers l'avenir**.
- Les **Cours Pi** s'engagent pour ne pas faire de ce nouveau Bac un diplôme au rabais.
- Les **Cours Pi** vous offrent **écoute** et **conseil** pour coconstruire une **scolarité sur-mesure**.

LE BAC STMG DANS LES GRANDES LIGNES

Le Baccalauréat de la série Sciences et Technologies du Management et de la Gestion (STMG) est organisé à partir d'un large tronc commun en classe de Seconde où l'option « Management et Gestion » permet une première approche du domaine. Par la suite, cette filière se caractérise par un parcours des plus spécialisés année après année.



CE QUI A CHANGÉ

- Une nouvelle épreuve en fin de Terminale : le Grand Oral.
- Pour les lycéens en présentiel l'examen est un mix de contrôle continu et d'examen final laissant envisager un diplôme à plusieurs vitesses.
- Pour nos élèves, qui passeront les épreuves sur table, le Baccalauréat conserve sa valeur.

CE QUI N'A PAS CHANGÉ

- Le Bac reste un examen accessible aux candidats libres avec examen final.
- Le système actuel de mentions est maintenu.
- Les épreuves anticipées de français, écrit et oral, tout comme celle de l'oral de Sciences de Gestion et Numériques se dérouleront comme aujourd'hui en fin de Première.

A l'occasion de la réforme du Lycée, nos manuels ont été retravaillés dans notre atelier pédagogique pour un accompagnement optimal à la compréhension. Sur la base des programmes officiels, nous avons choisi de créer de nombreuses rubriques :

- **L'essentiel** pour souligner les points de cours à mémoriser au cours de l'année
- **Réfléchissons ensemble et A vous de jouer** pour mettre en pratique le raisonnement vu dans le cours et s'accaparer les ressorts de l'analyse, de la logique, de l'argumentation, et de la justification
- **Pour aller plus loin** pour visionner des sites ou des documentaires ludiques de qualité
- Et enfin... la rubrique **Les Clés du Bac by Cours Pi** qui vise à vous donner, et ce dès la seconde, toutes les cartes pour réussir votre examen : notions essentielles, méthodologie pas à pas, exercices types et fiches étape de résolution !

MATHÉMATIQUES PREMIÈRE STMG

Module 3 – Statistiques et probabilités

L'AUTEURE

Sylvie LAMY

« Faire des maths c'est jouer aux legos. Il s'agit d'assembler des briques pour solutionner des problèmes ». Diplômée de l'Ecole Polytechnique et agrégée de Mathématiques, elle poursuit aujourd'hui son parcours professionnel à l'Institut Géographique National et au Ministère des Transports comme chargée de mission sur les projets spatiaux. Passionnée par les sciences physiques, son approche pédagogique réside dans la transmission du raisonnement scientifique. Elle attend de ses élèves de comprendre et d'expliciter leur démarche dans la résolution des problèmes.

PRÉSENTATION

Ce **cours** est divisé en chapitres, chacun comprenant :

- Le **cours**, conforme aux programmes de l'Education Nationale
- Des **exercices d'application et d'entraînement**
- Les **corrigés** de ces exercices
- Des **devoirs** soumis à correction (et ***se trouvant hors manuel***). Votre professeur vous renverra le corrigé-type de chaque devoir après correction de ce dernier.

Pour une manipulation plus facile, les corrigés-types des exercices d'application et d'entraînement sont regroupés en fin de manuel.

CONSEILS À L'ÉLÈVE

Vous disposez d'un support de Cours complet : **prenez le temps** de bien le lire, de le comprendre mais surtout de l'**assimiler**. Vous disposez pour cela d'exemples donnés dans le cours et d'exercices types corrigés.
Vous pouvez rester un peu plus longtemps sur une unité mais travaillez régulièrement.

LES DEVOIRS

Les devoirs constituent le moyen d'évaluer l'acquisition de vos *savoirs* (« Ai-je assimilé les notions correspondantes ? ») et de vos *savoir-faire* (« Est-ce que je sais expliquer, justifier, conclure ? »).

Placés à des endroits clés des apprentissages, ils permettent la vérification de la bonne assimilation des enseignements.

Aux *Cours Pi*, vous serez accompagnés par un professeur selon chaque matière tout au long de votre année d'étude. Référez-vous à votre « Carnet de Route » pour l'identifier et découvrir son parcours.
Avant de vous lancer dans un devoir, assurez-vous d'avoir **bien compris les consignes**.
Si vous repérez des difficultés lors de sa réalisation, n'hésitez pas à le mettre de côté et à revenir sur les leçons posant problème. **Le devoir n'est pas un examen**, il a pour objectif de s'assurer que, même quelques jours ou semaines après son étude, une notion est toujours comprise.
Aux *Cours Pi*, chaque élève travaille à son rythme, parce que chaque élève est différent et que ce mode d'enseignement permet le « sur-mesure ».
Nous vous engageons à respecter le moment indiqué pour faire les devoirs. Vous les identifierez par le bandeau suivant :

Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le devoir n°1

Il est **important de tenir compte des remarques, appréciations et conseils du professeur-correcteur**. Pour cela, il est **très important d'envoyer les devoirs au fur et à mesure** et non groupés. **C'est ainsi que vous progresserez !**

Donc, dès qu'un devoir est rédigé, envoyez-le aux *Cours Pi* par le biais que vous avez choisi :

1) Par **soumission en ligne** via votre espace personnel sur **PoulPi**, pour un envoi **gratuit**, **sécurisé** et plus **rapide**.
2) Par **voie postale** à *Cours Pi*, 9 rue Rebuffy, 34 000 Montpellier
*Vous prendrez alors soin de joindre une **grande enveloppe libellée à vos nom et adresse**, et **affranchie au tarif en vigueur** pour qu'il vous soit retourné par votre professeur*

N.B. : *quel que soit le mode d'envoi choisi, vous veillerez à **toujours joindre l'énoncé du devoir ;** plusieurs énoncés étant disponibles pour le même devoir.*
N.B. : *si vous avez opté pour un envoi par voie postale et que vous avez à disposition un scanner, nous vous engageons à conserver une copie numérique du devoir envoyé. Les pertes de courrier par la Poste française sont très rares, mais sont toujours source de grand mécontentement pour l'élève voulant constater les fruits de son travail.*

SOUTIEN ET DISPONIBILITÉ

VOTRE RESPONSABLE PÉDAGOGIQUE

Professeur des écoles, professeur de français, professeur de maths, professeur de langues : notre Direction Pédagogique est constituée de spécialistes capables de dissiper toute incompréhension.

Au-delà de cet accompagnement ponctuel, notre Etablissement a positionné ses Responsables pédagogiques comme des « super profs » capables de co-construire avec vous une scolarité sur-mesure.
En somme, le Responsable pédagogique est votre premier point de contact identifié, à même de vous guider et de répondre à vos différents questionnements.

Votre Responsable pédagogique est la personne en charge du suivi de la scolarité des élèves.
Il est tout naturellement votre premier référent : une question, un doute, une incompréhension ? Votre Responsable pédagogique est là pour vous écouter et vous orienter. Autant que nécessaire et sans aucun surcoût.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?	Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.
QUEL EST SON RÔLE ?	Orienter les parents et les élèves. Proposer la mise en place d'un accompagnement individualisé de l'élève. Faire évoluer les outils pédagogiques. Encadrer et coordonner les différents professeurs.

VOS PROFESSEURS CORRECTEURS

Notre Etablissement a choisi de s'entourer de professeurs diplômés et expérimentés, parce qu'eux seuls ont une parfaite connaissance de ce qu'est un élève et parce qu'eux seuls maîtrisent les attendus de leur discipline. En lien direct avec votre Responsable pédagogique, ils prendront en compte les spécificités de l'élève dans leur correction. Volontairement bienveillants, leur correction sera néanmoins juste, pour mieux progresser.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?	Une question sur sa correction ? • faites un mail ou téléphonez à votre correcteur et demandez-lui d'être recontacté en lui laissant un message avec votre nom, celui de votre enfant et votre numéro. • autrement pour une réponse en temps réel, appelez votre Responsable pédagogique.

LE BUREAU DE LA SCOLARITÉ

Placé sous la direction d'Elena COZZANI, le Bureau de la Scolarité vous orientera et vous guidera dans vos démarches administratives. En connaissance parfaite du fonctionnement de l'Etablissement, ces référents administratifs sauront solutionner vos problématiques et, au besoin, vous rediriger vers le bon interlocuteur.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?	Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi. 04.67.34.03.00 scolarite@cours-pi.com

LE SOMMAIRE

COMPÉTENCES VISÉES

- Calculer des fréquences conditionnelles et des fréquences marginales.
- Compléter un tableau croisé par des raisonnements sur les effectifs ou en utilisant des fréquences conditionnelles.
- Calculer les probabilités conditionnelles lorsque les évènements sont présentés sous forme de tableaux croisés d'effectifs.

COMPÉTENCES VISÉES

- Variable aléatoire discrète : loi de probabilité, espérance.
- Loi de Bernoulli (0,1) de paramètre p, espérance.

ESSAIS

- **Les maths c'est magique !** *Johnny Ball*
- **La grande aventure des nombres et du calcul** *Jason Lapeyronnie*
- **17 Équations qui ont changé le monde** *Ian Stewart*
- **Alex au pays des chiffres** *Alex Bellos*
- **Le grand roman des maths : de la préhistoire à nos jours** *Mickael Launay*
- **Histoire universelle des chiffres : L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul** *Georges Ifrah*
- **Le démon des maths** *Hans Magnus Enzensberger*
- **A propos de rien : une histoire du zéro** *Robert Kaplan*

BANDES-DESSINÉES

- **Logicomix** *Doxiádis / Papadátos / Papadimitríou*
- **Les maths en BD 1 et 2** *Larry Gonick*

DOCUMENTAIRES AUDIOVISUELS

- **L'extraordinaire aventure du chiffre 1** *Terry Jones*

PODCASTS

- **L'oreille mathématiques** *Podcast de la Maison Poincarré*
- **Maths en tête** *toutes plateformes*

YOUTUBE

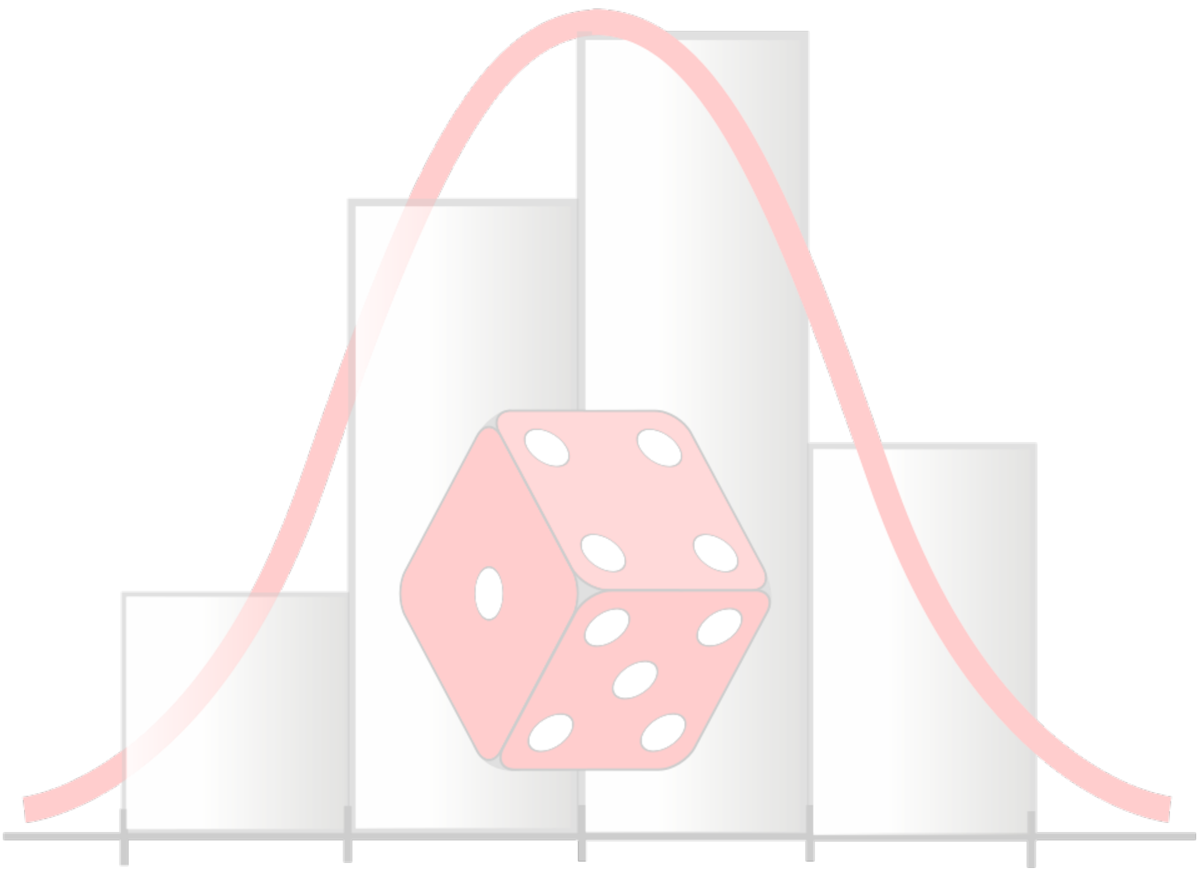
- **Chaîne YouTube Maths et Tiques** *Yvan Monka*
- **Chaîne YouTube Micmaths** *Mickaël Launay*
- **Chaîne YouTube de la Maison des mathématiques et de l'informatique**
- **Chaîne YouTube Automaths** *Jason Lapeyronnie*

Le Cours

INTRODUCTION

Les probabilités… ces mathématiques apprises au collège et développées depuis sous forme ludique avec ces tirages avec ou sans remise de boules de différentes couleurs.

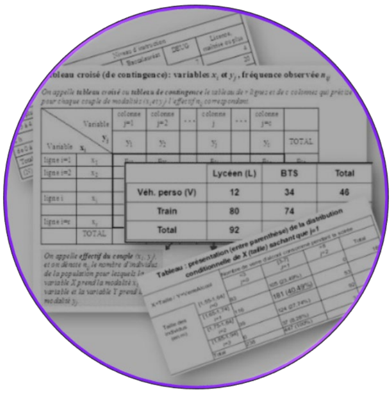
Mais quelles en sont les réelles applications ? Que vont-elles nous permettre ? Mais surtout comment s'en sortir même dans les cas les plus compliqués ?



Ce module est constitué de deux chapitres. Le premier est consacré aux statistiques (tableaux croisés) et aux probabilités conditionnelles.

Nous en profiterons pour faire des rappels sur le vocabulaire des probabilités. Le second est un chapitre de probabilités avec une introduction aux variables aléatoires et l'étude des successions d'épreuves indépendantes.

CHAPITRE 1
TABLEAUX CROISÉS ET PROBABILITÉS CONDITIONNELLES



Ce chapitre est consacré aux statistiques avec l'étude des tableaux croisés faisant intervenir deux variables catégorielles. Ces tableaux permettront d'avoir des notions d'effectifs marginaux ou de fréquences marginales ainsi que définir les probabilités conditionnelles.

Un paragraphe est consacré à la programmation de tableaux croisés sous Python.

COMPÉTENCES VISÉES

- Calculer des fréquences conditionnelles et des fréquences marginales.
- Compléter un tableau croisé par des raisonnements sur les effectifs ou en utilisant des fréquences conditionnelles.
- Calculer les probabilités conditionnelles lorsque les évènements sont présentés sous forme de tableaux croisés d'effectifs.

PRÉ-REQUIS

- Pourcentages.
- Notions de probabilités.
- Ensembles.
- Python.

Première approche

ACTIVITÉ

Voilà un tableau de salariés d'une entreprise.

	Moins de 35 ans	Plus de 35 ans	Total
Cadres		56	
Non-cadres	325		565
Total		296	666

1. Quels sont les caractères étudiés ?

2. Quelles valeurs prennent ces caractères ?

3. Compléter le tableau.

4. Combien y-a-t-il de cadres dans l'entreprise ? *Cette donnée est l'effectif marginal des cadres.*

5. Quelle est la proportion en pourcentage de non-cadres dans l'entreprise ? *Cette donnée est la fréquence marginale des non-cadres.*

6. Parmi les cadres, combien ont moins de 35 ans ? *Cette donnée est l'effectif marginal des salariés âgés de moins de 35 ans.*

7. Quelle est la proportion de cadres parmi les salariés de moins de 35 ans ? *Cette donnée est la fréquence marginale des cadres relativement aux salariés âgés de moins de 35 ans. C'est également la probabilité si on choisit au hasard un salarié âgé de moins de 35 ans qu'il soit cadre. Il s'agit de la **probabilité conditionnelle** qu'un salarié soit cadre sachant qu'il a moins de 35 ans.*

CORRECTION DE L'ACTIVITÉ

1. Quels sont les caractères étudiés ? Les caractères étudiés sont le statut et l'âge.

2. Quelles valeurs prennent ces caractères ? Les différents caractères sont :
- Satut : Cadre/Non-cadre
- Age : moins de 35 ans /plus de 35 ans.

3. Compléter le tableau.

	Moins de 35 ans	Plus de 35 ans	Total
Cadres	**45**	56	**101**
Non-cadres	325	**240**	565
Total	**370**	296	666

4. Combien y-a-t-il de cadres dans l'entreprise ? Il y a 101 cadres dans l'entreprise.

5. Quelle est la proportion en pourcentage de non-cadres dans l'entreprise ? Voici le calcul :

$$p = \frac{565}{666} \approx 0,848 = 84,8\%$$

6. Parmi les cadres, combien ont moins de 35 ans ? 45 cadres ont moins de 35 ans.

7. Quelle est la proportion de cadres parmi les salariés de moins de 35 ans ? La proportion de cadres parmi les salariés de moins de 35 ans est de :

$$p = \frac{45}{370} \approx 0,122 = 12,2\%$$

---

01 TABLEAUX CROISÉS ET PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Tableau croisé, fréquences marginales et conditionnelles

Un **tableau croisé** d'effectifs permet d'avoir les effectifs suivant **deux caractères (ou variables)**, l'un étant représenté en ligne et l'autre en colonne.

L'effectif marginal de la valeur prise par une variable est l'effectif de la population présentant cette valeur.

La fréquence marginale de la valeur prise par une variable est le quotient de son effectif marginal sur l'effectif total.

Exemple :

On réalise le tableau suivant donnant les effectifs d'un lycée sur deux variables (genre et statut d'internat):

- Le genre avec 2 valeurs : Filles/Garçons
- Le statut d'internat avec 3 valeurs : Externes/Demi-pensionnaires/Internes

	Externes	Demi-pensionnaires	Internes	Total
Filles	**245**	**410**	**45**	**700**
Garçons	**125**	**348**	**58**	**531**
Total	**370**	**758**	**103**	**1231**

L'effectif marginal des filles est 700.

La fréquence marginale des filles est $\frac{700}{1231} \approx 0,569 \approx 56,9\%$.

À VOUS DE JOUER 1

On reprend l'exemple précédent.

L'effectif marginal des élèves demi-pensionnaires est ....

La fréquence marginale des élèves demi-pensionnaires est $\frac{758}{\dots} \approx \dots\dots \approx \dots\dots\%$.

En pratique, les effectifs marginaux sont donnés par les lignes et les colonnes Total.

On suppose qu'on étudie deux variables A et B.
La fréquence conditionnelle d'une valeur VB de la variable B par rapport à une valeur VA de la variable A est sa fréquence parmi la population vérifiant VA.

On peut se dire qu'il s'agit de la fréquence de VB parmi VA.

Exemple :
Quelle est la fréquence conditionnelle des filles parmi les externes ?

	Externes	Demi-pensionnaires	Internes	Total
Filles	**245**	**410**	**45**	**700**
Garçons	**125**	**348**	**58**	**531**
Total	**370**	**758**	**103**	**1231**

On ne considère que la colonne Externes (effectif marginal :370).

La fréquence conditionnelle des filles parmi les externes est $\frac{245}{370} \approx 0,662 \approx 66,2\%$

À VOUS DE JOUER 2

On reprend l'exemple.
Quelle est la fréquence conditionnelle des internes parmi les garçons ?
On ne considère que la ligne ....

	Externes	Demi-pensionnaires	Internes	Total
Filles	245	410	45	700
Garçons	125	348	58	531
Total	370	758	103	1231

La fréquence .... des internes parmi les garçons est $\frac{\dots}{\dots} \approx \dots\dots \approx \dots\dots\%$.

TABLEAUX CROISÉS ET PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

02 Rappels sur les probabilités

Expériences et évènements

La probabilité d'un évènement caractérise la possibilité que ce fait se produise. Plus précisément, elle donne le pourcentage qu'un fait se réalise.

On réalise une **expérience.** Les résultats possibles de cette expérience sont appelés **issues**. Si on ne peut pas connaître le résultat par avance, l'expérience est alors **aléatoire.**

L'ensemble des issues est appelé univers ; on le note généralement Ω (lire *oméga*).

Un **événement** est constitué par un ensemble d'issues (on dit que **ces issues réalisent l'évènement ou que ces issues sont favorables à l'événement**).

- ✓ Un **événement élémentaire** correspond à une seule issue.
- ✓ **Un événement contenant toutes les issues** (il est alors égal à l'univers) **est dit certain.**
- ✓ **Un événement ne contenant aucune issue** (il est alors égal à l'ensemble vide) **est dit impossible.**

Si A est un événement, l'événement contraire $\overline{A}$ **est celui qui se réalise quant A ne se réalise pas. Il est composé des issues qui ne réalisent pas A.**

Si A et B sont deux événements, l'événement $A \cap B$ est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A et B.

✗ **Si aucune issue ne réalise à la fois A et B, les événements sont dits incompatibles :** $A \cap B = \varnothing$ **(les ensembles sont disjoints).**

Si A et B sont deux événements, l'événement $A \cup B$ est l'ensemble des issues qui réalisent A ou B (c'est-à-dire qui réalisent <u>au moins</u> l'un des deux).

<u>Exemple du lancer de dé « équilibré » :</u>

Expérience : « On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 ».
Issues possibles : 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
Événement élémentaire A : « Obtenir 3 » $A = \{3\}$
Événement non élémentaire B : « Obtenir un chiffre pair » $B = \{2,4,6\}$
Événement contraire de B : « $\overline{B} = \{1,3,5\}$
A et B sont incompatibles mais ne sont pas contraires.

C'est l'événement : « Obtenir un nombre au moins égal à 5 ». $C = \{5,6\}$
"B et C" est l'événement : « Obtenir un nombre pair au moins égal à 5 ». $B \cap C = \{6\}$
B ou C est l'événement : « Obtenir un nombre pair ou moins égal à 5 ».
$B \cup C = \{2,4,5,6\}$

PROBABILITÉ, LOI DE PROBABILITÉ

Dans toute la suite, on considère un univers à n issues : $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

A chaque **évènement élémentaire** $E_i = \{e_i\}$, on attribue un nombre p_i **positif** $p_i = p(E_i)$ appelé **probabilité** de l'événement $\{e_i\}$ tel que :

$$\text{Pour } i = 1, \dots, n \quad 0 \leq p_i \leq 1 \quad \text{et} \quad p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

La loi de probabilité de l'expérience aléatoire est la fonction qui à chaque évènement élémentaire associe sa probabilité.

Pour représenter une loi de probabilité, on utilise généralement un tableau.

évènement	e_1	e_2	$\dots$	e_p
probabilité	p_1	p_2	$\dots$	p_p

Exemple :
On considère une roue avec 1 secteur jaune, 1 secteur rouge et 1 secteur bleu.
La probabilité de tomber sur du jaune est 30%, sur du rouge de 20% et sur du bleu de 50%.

L'univers est : $\Omega = \{\text{jaune}, \text{rouge}, \text{bleu}\}$

J est l'évènement : « on tombe sur du jaune ».

R est l'évènement : « on tombe sur du rouge ».

B est l'évènement : « on tombe sur du bleu ».

issue	J	R	B
probabilité	0,3	0,2	0,5

<u>Probabilité d'un événement</u> : si A est un événement, sa probabilité *p*(A) est la somme des probabilités des événements élémentaires correspondant aux issues de A.

- A est **impossible** si $p(\mathbf{A}) = 0$
- A est **certain** si $p(\mathbf{A}) = 1$

<u>Exemple 3:</u>
On considère la loi de probabilité :

évènement	J	R	B	V
probabilité	0,3	0,1	0,4	0,2

On considère l'évènement A={J;B}.
$p(\text{A}) = p(\text{R}) + p(\text{B}) = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'ils sont équiprobables. La probabilité de chacun vaut alors $\frac{1}{n}$.

Remarque importante : dans le cas d'équiprobabilité, p(A) est le rapport entre le nombre d'issues favorables à A et le nombre total d'issues possibles.

Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'élément de cet ensemble.
Le cardinal d'un évènement A est le nombre d'issues qui réalisent A.

Il se note Card(A).

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Exemple du lancer de dé (suite) :

Si le dé est bien équilibré, on a autant de chances d'obtenir chacun des nombres de 1 à 6.

La probabilité d'obtenir un 3 est alors $p(\{3\}) = \frac{1}{6}$.

A est l'événement : « Obtenir un chiffre pair ». $A = \{2,4,6\}$

$$p(A) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

On retrouve le résultat en utilisant la remarque d'équiprobabilité.

$$p(A) = \frac{\textit{nombre d'issues favorables}}{\textit{nombre d'issues total}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Exemple 2 :

On considère une roue avec 100 secteurs jaunes, 20 secteurs rouges et 80 secteurs bleus.

On a la même chance de tomber sur un secteur.
J est l'évènement : « on tombe sur du jaune ».
R est l'évènement : « on tombe sur du rouge ».
B est l'évènement : « on tombe sur du bleu ».

On a 100 secteurs jaunes sur 200. Donc $p(J) = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$

On a 20 secteurs rouges sur 200. Donc $p(R) = \frac{20}{200} = \frac{1}{10}$

On a 80 secteurs rouges sur 200. Donc $p(B) = \frac{80}{200} = \frac{2}{5}$

Si A et B sont deux événements, on a la relation :

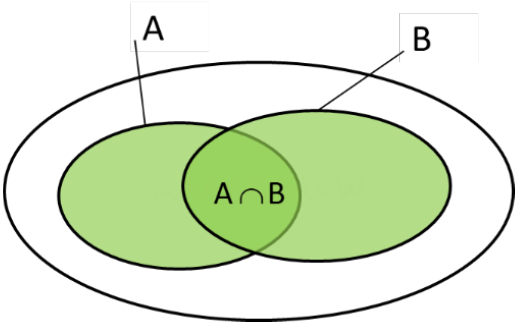
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

✓ Cas particulier : si les 2 événements sont incompatibles alors :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Justification intuitive

On utilise un **diagramme en patates** (également appelé diagramme de Venn).



$A \cup B$ est la partie verte :
Si on calcule $p(A)+p(B)$, la partie $A \cap B$ est comptée 2 fois.

A est l'événement : « Obtenir un nombre pair ». $A=\{2,4,6\}$

B est l'événement : « Obtenir un nombre au moins égal à 5 ». $B=\{5,6\}$

Déterminer la probabilité de : « Obtenir un nombre pair ou au moins égal à 5 ».

Cela correspond à $A \cup B$.

Calcul des probabilités :

$A \cap B=\{6\}$

$p(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ $\quad p(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ $\quad p(A\cap B)=\frac{1}{6}$

Donc $p(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

Remarque : $p(A)+p(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\neq p(A\cup B)$

03 TABLEAUX CROISÉS ET PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Probabilités conditionnelles

Reprenons l'exemple du paragraphe A avec un point de vue probabiliste.

	Externes	Demi-pensionnaires	Internes	Total
Filles	245	410	45	700
Garçons	125	348	58	531
Total	370	758	103	1231

On choisit **au hasard** un élève du lycée.
On appelle :

- ✓ F l'évènement « l'élève est une fille. »
- ✓ G l'évènement « l'élève est un garçon. »
- ✓ E l'évènement « l'élève est externe. »
- ✓ DP l'évènement « l'élève est demi-pensionnaire. »
- ✓ I l'évènement « l'élève est interne ».

La fréquence marginale des filles est $\frac{700}{1231} \approx 0,569 \approx 56,9\%$. Il s'agit de la probabilité $p(F)$.

245 correspond au nombre de filles externes soit au nombre d'élèves vérifiant $F \cap E$. Ce nombre est le cardinal de $F \cap E$.

On a donc : $p(F \cap E) = \frac{Card(F \cap E)}{Card(\Omega)} = \frac{245}{1231} \approx 0,199$

On suppose maintenant que l'élève est externe. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une fille ?

Il s'agit d'une **probabilité conditionnelle** qui se reformule ainsi : « Quelle est la probabilité que l'élève soit une fille sachant qu'il est externe ».

Cette probabilité se note : $p_E(F)$.

On sait qu'il y a 370 élèves externes, et parmi eux 245 sont des filles. Donc cette probabilité vaut : $p_E(F) = \frac{245}{370} = \frac{Card(F \cap E)}{Card(E)} \approx 0,662$

Si A et B sont 2 évènements correspondant à une même expérience, avec A non impossible, la probabilité conditionnelle de B sachant A (ou relativement à A) est la probabilité que B se réalise quand on sait que A est réalisé.

On la note : $p_A(B)$.

En cas d'équiprobabilité, on a : $p_A(B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)}$.

Remarque : autre expression de la probabilité conditionnelle

Soit N l'effectif de la population :

$$p_A(B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)} = \frac{Card(A \cap B):N}{Card(A):N} = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Exemple

On reprend l'exemple précédent.

Probabilité qu'un élève soit externe sachant que c'est une fille : $p_F(E) = \frac{Card(F \cap E)}{Card(F)} = \frac{245}{700} = 0,35$

À VOUS DE JOUER 3

	A	B	Total
S	10	25	35
T	8	7	15
Total	18	32	50

Card (A)=.................... Card(T)=.................... Card($A \cap T$) = ...

$p(A) = \frac{\dots\dots}{50} = \dots\dots\dots\dots$ Il s'agit de la probabilité de ....

$p_T(A) = \frac{Card(\dots\dots\dots)}{Card(\dots\dots\dots)} = \frac{\dots\dots}{15}$

Il s'agit de la probabilité .... de .... sachant ....

Tableaux croisés avec python

Il est conseillé de reproduire le programme avec Python.
On va utiliser comme exemple un fichier csv d'élèves d'une classe de sport pratiquant la natation ou bien le tennis.
Le format **csv** est un format texte, où les différents champs sont séparés par des **délimiteurs** généralement des points virgules.

Dans ce fichier exemple, il y a 1 ligne par élève, chaque ligne comporte 3 **champs** : son nom, le sport pratiqué et le genre.

```
eleve1;natation;G
eleve2;natation;G
eleve3;natation;G
eleve4;natation;F
eleve5;natation;F
eleve6;natation;G
eleve7;tennis;G
eleve8;tennis;G
eleve9;tennis;G
eleve10;tennis;G
eleve11;tennis;G
eleve12;tennis;G
eleve13;tennis;G
eleve14;tennis;F
eleve15;tennis;F
eleve16;natation;F
eleve17;natation;F
eleve18;natation;F
eleve19;natation;G
eleve20;natation;G
eleve21;tennis;G
eleve22;tennis;G
eleve23;tennis;G
eleve24;tennis;G
eleve25;tennis;G
```

Dans un premier temps, nous allons ouvrir ce fichier et créer les 3 listes correspondant aux 3 champs.

La lecture d'un fichier csv dans Python demande l'importation du module **csv**.
with open va permettre l'ouverture du fichier et la fonction **reader** va créer une liste avec autant d'items que de lignes du fichier.

Voilà le programme :

```
import csv
with open('classesport.csv',newline='') as f:
   lecture=csv.reader(f,delimiter=";")  # création d'une liste
contenant autant d'items que de lignes
```

Chacun des items de lecture est en fait une liste de 3 items correspondant aux 3 champs. Même si lecture ne se manipule pas comme une liste normale, lecture[0] est par exemple la liste : ['eleve1','natation','G'].

On va alors constituer 3 listes correspondant aux 3 champs.

```
Nom=[]
Sport=[]
Genre=[]
for ligne in lecture:
    Nom.append(ligne[0])
    Sport.append(ligne[1])
    Genre.append(ligne[2])
```

Voilà ce que contient les listes Sport et Genre :

Sport=['natation', 'natation', 'natation', 'natation', 'natation', 'natation', 'tennis', 'tennis', 'tennis', 'tennis', 'tennis', 'tennis', 'tennis', 'tennis', 'tennis', 'natation', 'natation', 'natation', 'natation', 'natation', 'tennis', 'tennis', 'tennis', 'tennis', 'tennis']

Genre=['G', 'G', 'G', 'F', 'F', 'G', 'G', 'G', 'G', 'G', 'G', 'G', 'G', 'F', 'F', 'F', 'F', 'F', 'G', 'G', 'G', 'G', 'G', 'G', 'G']

Nous allons maintenant créer 4 listes avec les noms des élèves correspondant aux cas suivants : Garçons nageurs, Filles nageuses, Garçons faisant du tennis, Filles faisant du tennis.

On réalise ainsi un filtrage des données.

```
GN=[]   # Liste des Garçons nageurs
FN=[]   # Liste des Filles nageuses
GT=[]   # Liste des Garçons faisant du tennis
FT=[]   # Liste des Filles faisant du tennis

for k in range (len(Nom)) :
    if (Sport[k]=='natation' and Genre[k]=='G'):
        GN.append(Nom[k])
    if (Sport[k]=='natation' and Genre[k]=='F'):
        FN.append(Nom[k])
    if (Sport[k]=='tennis' and Genre[k]=='G'):
        GT.append(Nom[k])
    if (Sport[k]=='tennis' and Genre[k]=='F'):
        FT.append(Nom[k])
```

Voilà ce que contient la liste des filles faisant du tennis :

```
#Filtre des élèves filles faisnt du tennis
print (FT)
```

Résultat : ['eleve14', 'eleve15']

Nous pouvons maintenant calculer les effectifs croisés grâce à la longueur des listes.

```
#Effectifs croisés
gn=len(GN)
fn=len(FN)
gt=len(GT)
ft=len(FT)
print ('Effectifs Croisés : GN=',gn,'  FN=',fn,'  GT=',gt, '   FT=',ft)
```

Résultat : effectifs Croisés : GN= 6   FN= 5   GT= 12   FT= 2

```
#Effectifs marginaux
g=gn+gt
f=fn+ft
n=gn+fn
t=gt+ft

print ('Effectifs marginaux : G=',g,'  F=',f,'  N=',n, '   T=',t)
```

Résultat : effectifs marginaux : G= 18   F= 7   N= 11   T= 14

```
#Probabilité conditionnelle qu'un élève soit un garçon sachant qu'il fait du tennis
p=gt/t
print(round(p,2))
```

Résultat : 0,82

Tableau de synthèse

	G	F	Total
N	**6**	**5**	**11**
T	**12**	**2**	**14**
Total	**18**	**7**	**25**

$$p_T(G) = \frac{\text{Card}(G \cap T)}{\text{Card}(T)} = \frac{12}{14} \approx 0{,}86$$

EXERCICE 01

1. Complétez le tableau croisé suivant :

	Hommes	Femmes	Total
Employés	....	....	68
Cadres	9	....	....
Total	....	**64**	100

2. Quel est l'effectif marginal des femmes ? ....

3. Combien y-a-t-il de femmes cadres ? ....

4. Quelle est la fréquence marginale des cadres ? ....

5. Quelle est la fréquence conditionnelle des femmes parmi les cadres ? ....

....

EXERCICE 02

Cet exercice est un exemple de reconstituer un tableau croisé à partir de fréquences marginales et conditionnelles.

Voici quelques données démographiques (année 2000) :

Hommes	Femmes
48,7%	51,3%

✓ **Hommes**

moins de 15 ans	de 15 à 64 ans	plus de 64 ans
20%	67%	13%

✓ **Femmes**

moins de 15 ans	de 15 à 64 ans	plus de 64 ans
18%	64%	18%

Remplissez le tableau suivant (on donnera les résultats en pourcentages de la population totale, au dixième près).

	moins de 15 ans	de 15 à 64 ans	plus de 64 ans	Total
Hommes				
Femmes				
Total				

EXERCICE 03

Les élèves de Terminale d'un lycée étudient l'anglais, l'allemand ou l'espagnol en première langue vivante. Parmi ces élèves :

- ✓ La fréquence marginale des garçons est 45 %,
- ✓ 70 % étudient l'anglais,
- ✓ 20 % des garçons étudient l'allemand,
- ✓ 40 % de ceux qui étudient l'anglais sont des garçons,
- ✓ Il y a autant de garçons que de filles qui étudient l'espagnol.

Remplir le tableau suivant en pourcentages du nombre d'élèves de Terminale) :

	Garçons	Filles	Total
Anglais			
Allemand			
Espagnol			
Total			**100%**

EXERCICES

EXERCICE 04 Dans un village, 45 % des habitants ont un chat, et 32 % ont un chien.

1. Peut-on affirmer que 77 % des habitants ont un animal de compagnie (chien ou chat) ? ....

....

2. Si 61 % des habitants ont un chien ou un chat, quel est le pourcentage d'habitants ayant un chat et un chien ? ....

....

....

....

....

....

....

....

EXERCICE 05 Dans une entreprise, 70% des salariés sont des hommes, 6% des femmes sont cadres et 4% des hommes sont cadres.

1. Quels sont les proportions d'hommes cadres sur l'ensemble des salariés et de femmes cadres sur l'ensemble des salariés ? ....

....

....

....

2. Remplissez le tableau suivant en <u>pourcentages</u>.

	Hommes	Femmes	Total
Cadres	....	....	....
Non cadres	....	....	....
Total	....	....	....

3. L'entreprise compte 23 cadres. Calculez le nombre de salariés. ....

....

....

4. Remplissez le tableau suivant en nombres de salariés.

	Hommes	Femmes	Total
Cadres			
Non cadres			
Total			

EXERCICE 06 Une agence de voyage fait une enquête de satisfaction auprès de ses 2000 de ses clients.

- Parmi ces clients, 72% étaient satisfaits.
- 512 avaient voyagé en France et étaient satisfaits.
- 25% des clients non satisfaits avaient voyagé à l'étranger.

1. Quel est le pourcentage de clients ayant voyagé en France et qui sont satisfaits ?

2. Quel est le nombre de clients ayant voyagé à l'étranger et qui ne sont pas satisfaits ?

3. Complétez le tableau en pourcentages.

	Clients satisfaits	Clients non satisfaits	Total
Séjour en France			
Séjour à l'étranger			
Total			

On interroge un client.

4. Quelle est la probabilité qu'il ait voyagé en France ?

5. Quelle est la probabilité qu'un client satisfait ait voyagé en France ?

EXERCICE 07 On tire au hasard 1 carte dans un jeu de 32 cartes et on considère l'événement P : « La carte est un Pique ».

1. Calculez la probabilité de l'événement P en utilisant 3 modèles différents :
Modèle A : un modèle avec univers à 32 issues

EXERCICES

Modèle B : un modèle avec univers à 4 issues

Modèle C : un modèle avec univers à 2 issues.

2. On souhaite maintenant calculer la probabilité de l'événement C : « La carte est un Coeur ». Parmi les modèles précédents, quels sont les modèles utilisables ?

EXERCICE 08 Dans chacune des situations décrites ci-dessous, proposez un univers (plusieurs solutions sont possibles), écrivez chaque événement sous forme d'ensemble puis énoncez l'événement contraire sous forme de phrase. Dans une classe :

1. on choisit un élève : A « L'élève est un garçon ».

2. on choisit deux élèves : B « Les deux élèves sont des filles ».

3. on choisit trois élèves : C « Il y a au moins une fille ».

EXERCICE 09 Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. On tire une boule de l'urne. On note :

A : « Tirer une boule blanche ».
B : « Tirer une boule ni blanche ni rouge ».
C : « Tirer une boule noire ou une boule rouge ».

1. A et B sont-ils incompatibles ?

2. B et C sont-ils incompatibles ?

EXERCICE 10 Lors d'un référendum, deux questions étaient posées.

60 % des personnes ont répondu « oui » à la première question, 50 % ont répondu « oui » à la seconde question, et 40 % ont répondu « oui » aux deux questions.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondu « oui » à l'une ou l'autre des questions ?

2. Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondu « non » aux deux questions ?

3. Retrouver les réponses avec un tableau.

EXERCICE 11

	A	Non A	Total
B	80	590	670
Non B	120	210	330
Total	200	800	1000

Déterminez :

$p(\overline{A})$ $p(B)$ $p(A \cap \overline{B})$ $p_A(B)$ $p_B(\overline{A})$

EXERCICE 12

Un laboratoire teste l'efficacité d'un vaccin sur 2000 vaches. On obtient le tableau suivant :

	Vaccinés	Non vaccinée	Total
Malades	120	430	550
Non Malades	1080	370	1450
Total	1200	800	2000

On tire une vache au hasard.
On appelle V l'évènement : « La vache est vaccinée ».
On appelle M l'évènement : « La vache est malade ».

En utilisant ces évènements et les notations des probabilités, répondez aux questions suivantes :

1. Quelle est la probabilité qu'une vache soit malade et non vaccinée ?

2. Quelle est la probabilité qu'une vache malade soit vaccinée ?

3. La vache n'est pas vaccinée. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?

EXERCICE 13 On dispose du fichier des adhérents d'un club avec l'âge et le genre.

On souhaite compléter le tableau suivant :

On dispose d'un fichier csv avec pour chaque membre son nom, son genre et son âge qui a permis de créer 2 listes : une liste Genre dont les items peuvent prendre les valeurs 'f' ou 'h', et une liste Age dont les items sont des entiers.

	<18	18-49	>50	Total
Hommes				
Femmes				
Total				

Ecrivez :

- une fontion NbHommes (G) qui permet de trouver le nombre d'hommes à partir de la liste Genre.
- une fontion NbHsenior(G,A) qui permet de trouver le nombre d'hommes âgé de 18 à 49 ans à partir des listes Genre et d'une liste des Age. .
- une instruction affichant probabilité qu'un membre masculin soit âgé entre 18 et 49 ans.

EXERCICES

LE TEMPS DU BILAN

On considère un tableau croisé avec les caractères A et B.

	A1	A2	A3	Total
B1	e11	e21	e31	TB1
B2	e12	e22	e33	TB2
Total	TA1	TA2	TA3	T

Point de vue statistique	Point de vue probabiliste
	On tire au hasard un individu. On considères les évènements : A1 : « L'individu satisfait A1 ». A2 : « L'individu satisfait A2 ». A3 : « L'individu satisfait A3 ». B1 : « L'individu satisfait B1 ». B2 : « L'individu satisfait B1 ».
Fréquence marginale de la population satisfaisant A1 : $\frac{\mathrm{TA1}}{T}$	**Probabilité de A1 :** $p(A1) = \frac{\mathrm{TA1}}{T}$
e11 est l'effectif de la population satisfaisant A1 et B1.	**Probabilité de A1∩B1 :** $p(A1 \cap B1) = \frac{\mathrm{e11}}{T}$
Fréquence conditionnelle de la population satisfaisant B1 parmi la population satisfaisant B1 : $\frac{\mathrm{e11}}{\mathrm{TA1}}$	**Probabilité conditionnelle de B1 sachant A1 :** $p_{A1}(B1) = \frac{\mathrm{e11}}{\mathrm{TA1}}$

LES SUITES

Compétences :

- ✓ Remplir un tableau croisé connaissant quelques valeurs.
- ✓ Remplir un tableau croisé connaissant des fréquences marginales et conditionnelles.
- ✓ Calculer des fréquences marginales et conditionnelles
- ✓ Calculer des probabilités (évènements, intersections d'évènements) et des probabilités conditionnelles.

Il faut en particulier faire attention à ne pas confondre la probabilité $p(A \cap B)$ et $p_A(B)$.

Exemple issue de l'exercice 12

Quelle est la probabilité qu'une vache soit malade **et** non vaccinée ?

Probabilité d'une intersection

Quelle est la probabilité qu'une vache malade soit vaccinée ?

On sait que la vache est malade. Probabilité conditionnelle.

Exemple d'exercice de synthèse

Dans une école municipale de 500 élèves dont 200 sont des garçons, on sait que :

- ➢ 20% des garçons sont en maternelle ;
- ➢ 150 filles sont en primaire.

1. Complétez le tableau d'effectifs. - Réponse pas à pas :

	Garçons	Filles	Total
Maternelle			
Primaire			
Total			500

On repère dans l'énoncé les effectifs donnés et on analyse le type de donnée :

Dans une école municipale de 500 élèves dont 200 sont des garçons, on sait que :

- ✓ 20% des garçons sont en maternelle ;
- ✓ 150 filles sont en primaire.

500 : effectif total
200 : effectif marginal des garçons (on remplit l'effectif marginal des garçons).
150 : effectif des élèves qui sont filles et en primaire (intersection de la colonne Filles et de la ligne Primaire).

On commence à remplir le tableau avec ces données.

	Garçons	Filles	Total
Maternelle			
Primaire		**150**	
Total	**200**		500

On peut compléter l'effectif marginal des Filles avec 300 (puisque le total Filles + Garçons doit faire 500), puis l'effectif des filles en maternelle puisque Primaire Filles + Maternelle Filles doit faire 300.

	Garçons	Filles	Total
Maternelle		**150**	
Primaire		**150**	
Total	**200**	**300**	500

Reste la dernière information : 20% des garçons sont en maternelle. Il s'agit d'une fréquence conditionnelle qui vaut $\dfrac{\text{card}(\{\text{garçons en maternelle}\})}{\text{card}(\{\text{garçons}\})}$.

$\text{card}(\{\text{garçons en maternelle}\}) = 0{,}2 \times \text{card}(\{\text{garçons}\}) = 0{,}2 \times 200 = 40$

On met 40 à l'intersection de la colonne Garçons et de la ligne Maternelle.

	Garçons	Filles	Total
Maternelle	**40**	**150**	
Primaire		**150**	
Total	**200**	**300**	500

On complète les dernières valeurs.

	Garçons	Filles	Total
Maternelle	**40**	**150**	**190**
Primaire	**160**	**150**	**310**
Total	**200**	**300**	500

2. Quelle est la fréquence conditionnelle à 1% près des filles parmi les primaires ?

Comme la question est « parmi les primaire », il faut considérer la ligne « Primaire ».

	Garçons	Filles	Total
Maternelle	**40**	**150**	**190**
Primaire	**160**	**150**	**310**
Total	**200**	**300**	500

Il y a dans cette ligne 150 filles pour un total de 310.

Réponse : La fréquence conditionnelle à 1% près des filles parmi les primaires vaut : $\frac{150}{310} \approx 0{,}484$, soit 48%.

3. On choisit au hasard un élève.

On appelle :

- ✓ G l'évènement : « l'élève est un garçon. »
- ✓ P l'évènement : « l'élève est en primaire. »

Calculez la probabilité conditionnelle $p_P(G)$ à 0,001 près.

Il s'agit de la probabilité que l'élève soit un garçon sachant qu'il est en primaire.

On doit considérer la ligne des « Primaires ».

La réponse doit faire intervenir les évènements.

Réponse : $p_P(G) = \dfrac{Card(P \cap G)}{Card(P)} = \dfrac{160}{310} \approx 0{,}516$

4. On choisit au hasard un élève. Déterminer la probabilité à 0,001 près qu'il s'agisse d'un garçon sachant qu'il est en maternelle.

La réponse doit faire intervenir les évènements.

L'évènement « l'élève est en maternelle » est contraire à l'évènement P ; c'est donc $\overline{P}$. On doit donc calculer $p_{\overline{P}}(G) = \dfrac{Card(\overline{P} \cap G)}{Card(\overline{P})} = \dfrac{40}{190} \approx 0{,}211$

Même si ce n'est pas précisé, la rédaction des réponses de questions de probabilités doit faire intervenir les évènements définis (où leur contraire).

Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le devoir n°1