COURS PI

☆ L'école sur-mesure ☆

de la Maternelle au Bac, Établissement d'enseignement privé à distance, déclaré auprès du Rectorat de Paris

Seconde - Module 2 - Fonctions

Mathématiques

v.5.1

- ***Guide de méthodologie*** *pour appréhender notre pédagogie*
- ***Leçons détaillées*** *pour apprendre les notions en jeu*
- ***Exemples et illustrations*** *pour comprendre par soi-même*
- ***Prolongement numérique*** *pour être acteur et aller + loin*
- ***Exercices d'application*** *pour s'entraîner encore et encore*
- ***Corrigés des exercices*** *pour vérifier ses acquis*

www.cours-pi.com

Paris & Montpellier

EN ROUTE VERS LE BACCALAURÉAT

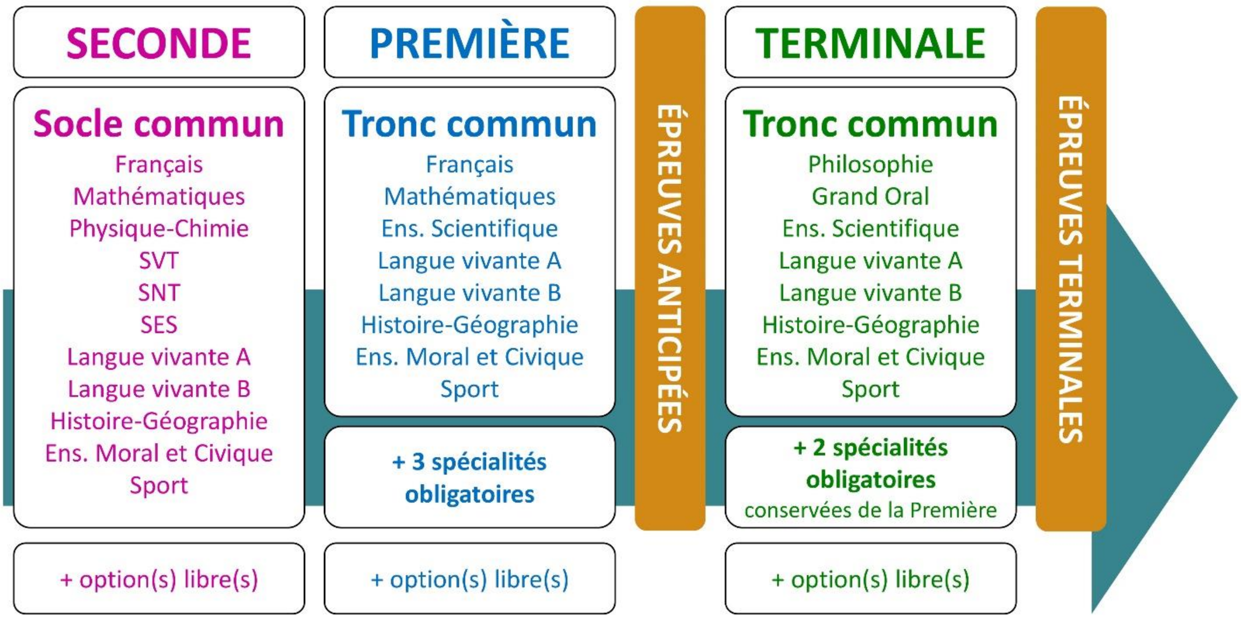
Comme vous le savez, **la réforme du Baccalauréat** est entrée en vigueur progressivement jusqu'à l'année 2021, date de délivrance des premiers diplômes de la nouvelle formule.

Dans le cadre de ce nouveau Baccalauréat, **notre Etablissement**, toujours attentif aux conséquences des réformes pour les élèves, s'est emparé de la question avec force **énergie** et **conviction** pendant plusieurs mois, animé par le souci constant de la réussite de nos lycéens dans leurs apprentissages d'une part, et par la **pérennité** de leur parcours d'autre part. Notre Etablissement a questionné la réforme, mobilisé l'ensemble de son atelier pédagogique, et déployé tout **son savoir-faire** afin de vous proposer un enseignement tourné continuellement vers l'**excellence**, ainsi qu'une scolarité tournée vers la **réussite**.

- Les **Cours Pi** s'engagent pour faire du parcours de chacun de ses élèves un **tremplin vers l'avenir**.
- Les **Cours Pi** s'engagent pour ne pas faire de ce nouveau Bac un diplôme au rabais.
- Les **Cours Pi** vous offrent **écoute** et **conseil** pour coconstruire une **scolarité sur-mesure**.

LE BAC DANS LES GRANDES LIGNES

Ce nouveau Lycée, c'est un enseignement à la carte organisé à partir d'un large tronc commun en classe de Seconde et évoluant vers un parcours des plus spécialisés année après année.



CE QUI A CHANGÉ

- Il n'y a plus de séries à proprement parler.
- Les élèves choisissent des spécialités : trois disciplines en classe de Première ; puis n'en conservent que deux en Terminale.
- Une nouvelle épreuve en fin de Terminale : le Grand Oral.
- Pour les lycéens en présentiel l'examen est un mix de contrôle continu et d'examen final laissant envisager un diplôme à plusieurs vitesses.
- Pour nos élèves, qui passeront les épreuves sur table, le Baccalauréat conserve sa valeur.

CE QUI N'A PAS CHANGÉ

- Le Bac reste un examen accessible aux candidats libres avec examen final.
- Le système actuel de mentions est maintenu.
- Les épreuves anticipées de français, écrit et oral, tout comme celle de spécialité abandonnée se dérouleront comme aujourd'hui en fin de Première.

A l'occasion de la réforme du Lycée, nos manuels ont été retravaillés dans notre atelier pédagogique pour un accompagnement optimal à la compréhension. Sur la base des programmes officiels, nous avons choisi de créer de nombreuses rubriques :

- **Suggestions de lecture** pour s'ouvrir à la découverte de livres de choix sur la matière ou le sujet.
- **Réfléchissons ensemble** pour guider l'élève dans la réflexion.
- **L'essentiel** et **Le temps du bilan** pour souligner les points de cours à mémoriser au cours de l'année
- **À vous de jouer** pour mettre en pratique le raisonnement vu dans le cours et s'accaparer les ressorts de l'analyse, de la logique, de l'argumentation, et de la justification.
- **Pour aller plus loin** pour visionner des sites ou des documentaires ludiques de qualité.
- Et enfin ... la rubrique **Les Clés du Bac by Cours Pi** qui vise à vous donner, et ce dès la seconde, toutes les cartes pour réussir votre examen : notions essentielles, méthodologie pas à pas, exercices types et fiches étape de résolution !

MATHÉMATIQUES SECONDE

Module 2 – Les fonctions

L'AUTEURE

Sylvie LAMY

« Faire des maths c'est jouer aux legos. Il s'agit d'assembler des briques pour solutionner des problèmes ». Diplômée de l'Ecole Polytechnique et agrégée de Mathématiques, elle poursuit aujourd'hui son parcours professionnel à l'Institut Géographique National et au Ministère des Transports comme chargée de mission sur les projets spatiaux. Passionnée par les sciences physiques, son approche pédagogique réside dans la transmission du raisonnement scientifique. Elle attend de ses élèves de comprendre et d'expliciter leur démarche dans la résolution des problèmes.

PRÉSENTATION

Ce **cours** est divisé en 3 chapitres, chacun comprenant :

- Le **cours**, conforme aux programmes de l'Education Nationale
- Des **exercices d'application et d'entraînement**
- Les **corrigés** de ces exercices
- Des **devoirs** soumis à correction (et ***se trouvant hors manuel***). Votre professeur vous renverra le corrigé-type de chaque devoir après correction de ce dernier.

Pour une manipulation plus facile, les corrigés-types des exercices d'application et d'entraînement sont regroupés en fin de manuel.

CONSEILS A L'ÉLÈVE

Vous disposez d'un support de Cours complet : **prenez le temps** de bien le lire, de le comprendre mais surtout de l'**assimiler**. Vous disposez pour cela d'exemples donnés dans le cours et d'exercices types corrigés. Vous pouvez rester un peu plus longtemps sur une unité mais travaillez régulièrement.

LES FOURNITURES

Vous devez posséder :

- une **calculatrice graphique pour l'enseignement scientifique au Lycée comportant un mode examen (requis pour l'épreuve du baccalauréat).**
- un **tableur** comme Excel de Microsoft (payant) ou Calc d'Open Office (gratuit et à télécharger sur http://fr.openoffice.org/). En effet, certains exercices seront faits de préférence en utilisant un de ces logiciels, mais vous pourrez également utiliser la calculatrice).

LES DEVOIRS

Les devoirs constituent le moyen d'évaluer l'acquisition de vos *savoirs* (« Ai-je assimilé les notions correspondantes ? ») et de vos *savoir-faire* (« Est-ce que je sais expliquer, justifier, conclure ? »).

Placés à des endroits clés des apprentissages, ils permettent la vérification de la bonne assimilation des enseignements.

Aux *Cours Pi*, vous serez accompagnés par un professeur selon chaque matière tout au long de votre année d'étude. Référez-vous à votre « Carnet de Route » pour l'identifier et découvrir son parcours.
Avant de vous lancer dans un devoir, assurez-vous d'avoir **bien compris les consignes**.
Si vous repérez des difficultés lors de sa réalisation, n'hésitez pas à le mettre de côté et à revenir sur les leçons posant problème. **Le devoir n'est pas un examen**, il a pour objectif de s'assurer que, même quelques jours ou semaines après son étude, une notion est toujours comprise.
Aux *Cours Pi*, chaque élève travaille à son rythme, parce que chaque élève est différent et que ce mode d'enseignement permet le « sur-mesure ».
Nous vous engageons à respecter le moment indiqué pour faire les devoirs. Vous les identifierez par le bandeau suivant :

Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le devoir n°1

Il est **important de tenir compte des remarques, appréciations et conseils du professeur-correcteur**. Pour cela, il est **très important d'envoyer les devoirs au fur et à mesure** et non groupés. **C'est ainsi que vous progresserez !**

Donc, dès qu'un devoir est rédigé, envoyez-le aux *Cours Pi* par le biais que vous avez choisi :

1) Par **soumission en ligne** via votre espace personnel sur **PoulPi**, pour un envoi **gratuit**, **sécurisé** et plus **rapide**.
2) Par **voie postale** à *Cours Pi*, 9 rue Rebuffy, 34 000 Montpellier
*Vous prendrez alors soin de joindre une **grande enveloppe** **libellée à vos nom et adresse**, et **affranchie** **au tarif en vigueur** pour qu'il vous soit retourné par votre professeur.*

N.B. : *quel que soit le mode d'envoi choisi, vous veillerez à **toujours joindre l'énoncé du devoir ;** plusieurs énoncés étant disponibles pour le même devoir.*
N.B. : *si vous avez opté pour un envoi par voie postale et que vous avez à disposition un scanner, nous vous engageons à conserver une copie numérique du devoir envoyé. Les pertes de courrier par la Poste française sont très rares, mais sont toujours source de grand mécontentement pour l'élève voulant constater les fruits de son travail.*

SOUTIEN ET DISPONIBILITÉ

VOTRE RESPONSABLE PÉDAGOGIQUE

Professeur des écoles, professeur de français, professeur de maths, professeur de langues : notre Direction Pédagogique est constituée de spécialistes capables de dissiper toute incompréhension.

Au-delà de cet accompagnement ponctuel, notre Etablissement a positionné ses Responsables pédagogiques comme des « super profs » capables de co-construire avec vous une scolarité sur-mesure.
En somme, le Responsable pédagogique est votre premier point de contact identifié, à même de vous guider et de répondre à vos différents questionnements.

Votre Responsable pédagogique est la personne en charge du suivi de la scolarité des élèves.
Il est tout naturellement votre premier référent : une question, un doute, une incompréhension ? Votre Responsable pédagogique est là pour vous écouter et vous orienter. Autant que nécessaire et sans aucun surcoût.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?

Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.

QUEL EST SON RÔLE ?

Orienter les parents et les élèves.
Proposer la mise en place d'un accompagnement individualisé de l'élève.
Faire évoluer les outils pédagogiques.
Encadrer et coordonner les différents professeurs.

VOS PROFESSEURS CORRECTEURS

Notre Etablissement a choisi de s'entourer de professeurs diplômés et expérimentés, parce qu'eux seuls ont une parfaite connaissance de ce qu'est un élève et parce qu'eux seuls maîtrisent les attendus de leur discipline. En lien direct avec votre Responsable pédagogique, ils prendront en compte les spécificités de l'élève dans leur correction. Volontairement bienveillants, leur correction sera néanmoins juste, pour mieux progresser.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?

Une question sur sa correction ?

- faites un mail ou téléphonez à votre correcteur et demandez-lui d'être recontacté en lui laissant un message avec votre nom, celui de votre enfant et votre numéro.
- autrement pour une réponse en temps réel, appelez votre Responsable pédagogique.

LE BUREAU DE LA SCOLARITÉ

Placé sous la direction d'Elena COZZANI, le Bureau de la Scolarité vous orientera et vous guidera dans vos démarches administratives. En connaissance parfaite du fonctionnement de l'Etablissement, ces référents administratifs sauront solutionner vos problématiques et, au besoin, vous rediriger vers le bon interlocuteur.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?

Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.
04.67.34.03.00
scolarite@cours-pi.com

LE SOMMAIRE

Mathématiques – Module 2 – Fonctions

OBJECTIFS

- Généralités sur les fonctions à valeurs réelles définie sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$.
- Représentations algébrique et graphique des fonctions
- Courbe représentative : la courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x,y) vérifient $y = f(x)$.
- Fonction paire, impaire. Traduction géométrique.
- Résolution d'équations/inéquations graphiques.

COMPÉTENCES VISEES

- Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques, des autres disciplines.
- Exploiter l'équation y = f(x) d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées.
- Résoudre une équation ou une inéquation du type f(x) = k, f(x) < k, en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logicielle.
- Résoudre, graphiquement ou à l'aide d'un outil numérique, une équation ou inéquation du type f(x) = g(x), f(x) < g(x).

OBJECTIFS

- Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction définie sur un intervalle. Tableau de variations.
- Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.
- Pour une fonction affine, interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe.

COMPÉTENCES VISEES

- Relier représentation graphique et tableau de variations.
- Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.
- Exploiter la calculatrice pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule.
- Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine.

OBJECTIFS

- Se constituer un répertoire d'images mentales des courbes représentatives des fonctions de référence, sur lesquelles s'appuyer lors de l'étude des propriétés des fonctions : fonctions linéaires, affines, fonctions carré, inverse, racine carrée, cube.

COMPÉTENCES VISEES

- Connaître algébriquement et graphiquement les fonctions carré, inverse, racine carrée, cube.
- Pour deux nombres a et b donnés et une fonction de référence ƒ, comparer ƒ(a) et ƒ(b) numériquement ou graphiquement.
- Pour les fonctions affines, carré, inverse, racine carrée et cube, résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type ƒ(x) = k, ƒ(x) < k.
- Étudier la position relative des courbes d'équation $y = x, y = x^2, y = x^3$, pour x ⩾ 0.
- Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée, cube.

SUGGESTIONS CULTURELLES

ESSAIS

- **Les maths c'est magique !** *Johnny Ball*
- **17 Équations qui ont changé le monde** *Ian Stewart*
- **Alex au pays des chiffres** *Alex Bellos*
- **Le grand roman des maths :de la préhistoire à nos jours** *Mickael Launay*
- **La symphonie des nombres premiers** *Marcus du Sautoy*
- **Dans la jungle des nombres premiers.** *John Derbyshire*
- **Histoire universelle des chiffres : L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul** *Georges Ifrah*
- **Le démon des maths.** *Hans Magnus Enzensberger*
- **A propos de rien : une histoire du zéro** *Robert Kaplan*

BANDES-DESSINÉES

- **Logicomix** *Doxiádis / Papadátos / Papadimitríou*
- **Les maths en BD 1 et 2** *Larry Gonick*
- **Les statistiques en BD** *Larry Gonick*

DOCUMENTAIRES AUDIOVISUELS

- **L'extraordinaire aventure du chiffre 1** *Terry Jones*
- **Le mystère des nombres premiers** *Marcus du Sautoy*

SITES INTERNET

- **www.images.maths.cnrs.fr**
- **www.micmaths.com**
- **www.villemin.gerard.free.fr**
- **www.therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr**
- **www.dimensions-math.org**

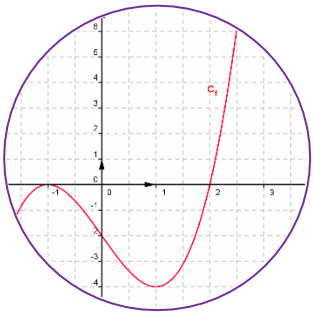
Le Cours

INTRODUCTION

La fonction permet de représenter une dépendance entre deux ou plusieurs variables : par exemple, plus on se rapproche des pôles, plus la température diminue. On dit que la fonction température est décroissante à mesure que l'on se rapproche des pôles : on constate une dépendance entre la position et la température. Si la notion de relation entre des quantités est comprise par les Hommes depuis l'Antiquité, il faut attendre la fin du XVIIème siècle pour que le mathématicien allemand Leibniz formalise cette notion sous la forme d'une fonction. A l'époque, les physiciens s'intéressaient aux « variations infinitésimales » des phénomènes physiques c'est-à-dire la façon dont un phénomène varie entre deux instants très proches. A la même période, le physicien anglais Newton développe également sa propre théorie du « calcul infinitésimal », ce qui vaudra une scission durable entre mathématiciens anglophones et allemands, chacun souhaitant attribuer la paternité de la théorie à son champion.

La connaissance d'une fonction apporte des renseignements sur un phénomène et peut permettre de faire des prédictions : par exemple, puisque l'on connaît la fonction trajectoire de la Terre en fonction du temps, on peut déterminer l'instant de la prochaine éclipse solaire. Abstraitement, une fonction n'est qu'une simple machine qui s'amuse à associer un nombre (ex : une vitesse) à un autre (l'instant où l'on mesure cette vitesse), mais elle s'est révélée être un outil redoutablement efficace de compréhension au sein des grandes questions scientifiques

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS



L'objectif de ce premier chapitre est de définir rigoureusement ce qu'est une fonction en mathématiques, d'introduire tous les éléments de langages et de notations associées afin de se servir de leurs représentations pour en extraire les informations.
Si la définition est abstraite, c'est que l'outil est général : il se retrouve en physique, en chimie, en SVT, en économie, dans un smartphone … Globalement, une fonction est une sorte de machine à associer des choses.
Ici, nous allons nous contenter d'étudier les fonctions numériques définies en général sur des intervalles de $\mathbb{R}$ (l'ensemble des nombres réels) : cela signifie que notre fonction ne parlera pas d'enfants et de prénoms mais va associer des nombres. Par exemple, une entreprise d'énergie souhaite installer des éoliennes près d'une ville pour l'alimenter en énergie. Malheureusement, une éolienne peut faire beaucoup de bruit. L'entreprise souhaite donc déterminer à quelle distance de la ville elle peut placer son éolienne. Elle va donc faire des mesures sonores : elle place l'éolienne à un endroit puis effectue une mesure tous les 10m en s'éloignant de l'éolienne. De cette façon on construit la fonction « Volume sonore » en fonction de la distance d'éloignement à l'éolienne qui associe un nombre (volume sonore en dB) à un autre (distance à l'éolienne). En traçant cela sur un graphique, on se rend compte que cette fonction a une propriété particulièrement intéressante : elle est décroissante ! Cela signifie simplement que plus on s'éloigne de l'éolienne, moins on l'entend ! Cela paraissait évident mais à présent on le visualise graphiquement.
C'est l'une des grandes révolutions de la représentation des fonctions : les données n'apparaissent plus comme des relevés ponctuels mais nous aident à comprendre qu'elles font partie d'un phénomène global et continu, aux propriétés bien particulières.

OBJECTIFS

- Généralités sur les fonctions à valeurs réelles définie sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$.
- Représentations algébrique et graphique des fonctions
- Courbe représentative : la courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x,y) vérifient $y = f(x)$.
- Fonction paire, impaire. Traduction géométrique.
- Résolution d'équations/inéquations graphiques.

COMPÉTENCES VISÉES

- Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques, des autres disciplines.
- Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées.
- Résoudre une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$, en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logicielle.
- Résoudre, graphiquement ou à l'aide d'un outil numérique, une équation ou inéquation du type $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$.

PRÉ-REQUIS

- Résolution algébrique des équations/inéquations du premier degré.
- Résoudre une équation, une inéquation produit ou quotient, à l'aide d'un tableau de signes.

On pourra retrouver ces prérequis dans le module « Nombres et Calculs ».

Première approche
Vers la notion de fonction

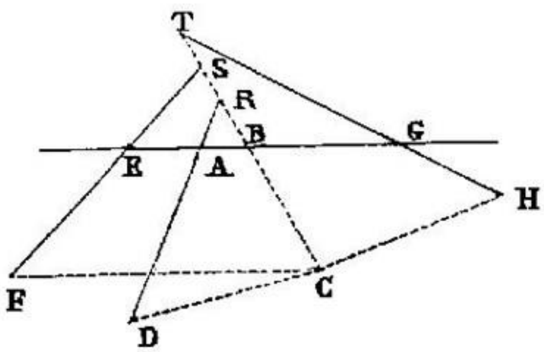
A partir des documents présentés, répondez aux questions qui vous seront posées.

DOC 1 : définition abstraite de la notion de fonction par Euler en 1755, Institutiones calculi differentialis

Leonhard Euler

« Si des quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières ; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x, sont appelées fonctions de x ».

DOC 2 : introduction des coordonnées cartésiennes pour résoudre des problèmes de géométrie, La Géométrie, Livre Premier, 1637 René Descartes



LIVRE PREMIER. 327

En sorte que je pense avoir entièrement satisfait à ce que Pappus nous dit avoir été cherché en ceci par les anciens; et je tâcherai d'en mettre la démonstration en peu de mots, car il m'ennuie déjà d'en tant écrire.

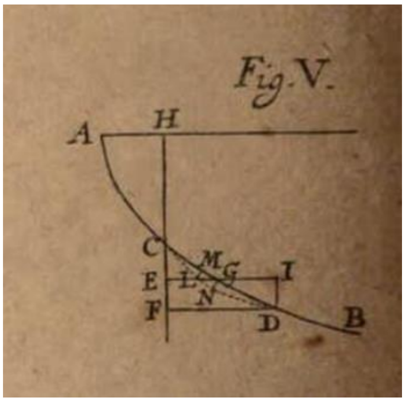
Soient (*fig.* 5) AB, AD, EF, GH, etc., plusieurs lignes données par position, et qu'il faille trouver un point, comme C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites sur les données, comme CB, CD, CF et CH, en sorte que les angles CBA, CDA, CFE, CHG, etc., soient donnés, et que ce qui est produit par la multiplication d'une partie de ces lignes soit égal à ce qui est produit par la multiplication des autres, ou bien qu'ils aient quelque autre proportion donnée, car cela ne rend point la question plus difficile.

Comment on doit poser les termes pour venir à l'équation de cet exemple.

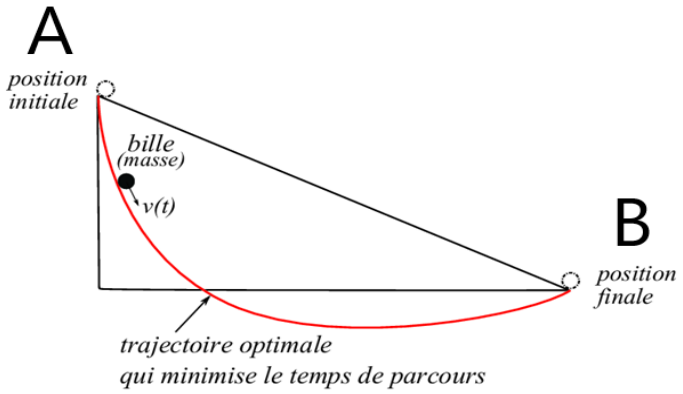
Premièrement, je suppose la chose comme déjà faite, et pour me démêler de la confusion de toutes ces lignes je considère l'une des données, et l'une de celles qu'il faut trouver, par exemple AB et CB, comme les principales et auxquelles je tâche de rapporter ainsi toutes les autres. Que le segment de la ligne AB, qui est entre les points A et B, soit nommé *x*; et que BC soit nommé *y*; et que toutes les autres lignes données soient prolongées jusques à ce qu'elles coupent ces deux aussi prolongées, s'il est besoin, et si elles ne leur sont point parallèles; comme vous voyez ici qu'elles

DOC 3 : Défi lancé aux mathématiciens par le mathématicien français Jean Bernoulli en 1696 en latin, Acta Eruditorum, p. 269, pour mettre en évidence la supériorité de l'approche analytique (par les fonctions) sur l'approche (géométrique) dans les problèmes de recherche de trajectoires.

« Datis in plano verticali duobos punctis A et B, assignaremobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens, et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B. »
Le problème peut se formuler de la façon suivante :
Etant donnée une bille M, soumise seulement à la force de pesanteur, partant d'un point A et arrivant en un point B situé plus bas dans un même plan vertical, trouver la forme optimale du toboggan entre A et B pour que la bille M descende le plus rapidement au point B. La solution de ce problème d'analyse est appelée « courbe brachistochrone ».



Solution proposée par Leibniz,
Acta eruditorum Anno MDCXCVII, 1697



La courbe rouge minimise le temps de trajet de la bille de A à B.

RÉFLÉCHISSONS ENSEMBLE

D'après les documents présentés ci-avant, répondez à ces questions.

Donnez la définition d'une fonction

....

....

....

....

....

....

....

Quelle idée novatrice propose Descartes pour étudier les problèmes de géométrie ?

....

....

....

....

....

....

....

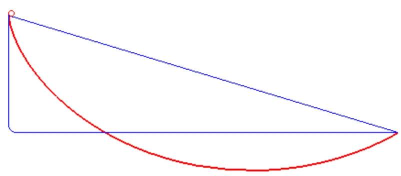
....

....

Sur le schéma du document 2, donner l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées utilisés par Descartes pour résoudre son problème. *(Indication : comment note-t-on la variable des abscisses et celle des ordonnées en mathématiques ?).*

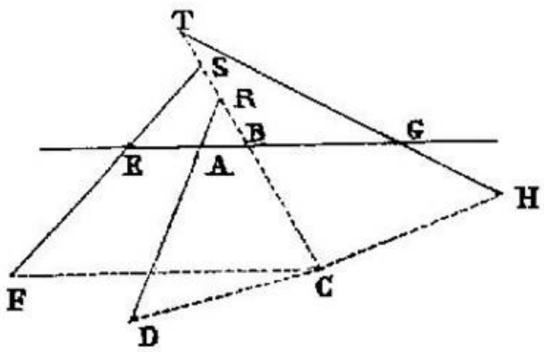
Donnez un ou plusieurs exemples de l'intérêt et de l'utilité de la notion de fonction en mathématiques.

Qu'est-ce que la courbe brachistochrone ?

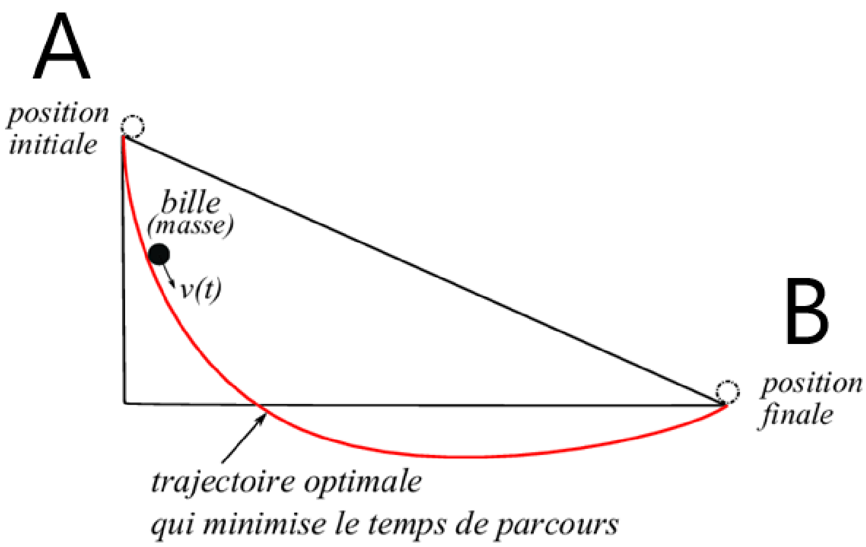


Une fonction, comme l'explique Euler dans le document 1, est un objet général (« cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres ») qui met en lien deux quantités : elle exprime la dépendance d'une quantité vis-à-vis d'une autre (« des quantités dépendent d'autres quantités »).

Descartes a l'idée merveilleuse d'associer à chaque point d'une figure géométrique un couple de nombres, appelés abscisse et ordonnée du point, à l'aide d'un repère formé par deux axes.
On peut ainsi passer des configurations géométriques à des calculs sur les nombres : un pont est créé entre la géométrie et l'algèbre.
Dans le dernier paragraphe de l'extrait de démonstration de Descartes dans le document 2, on peut lire :
« Que le segment de la ligne AB, qui est entre les points A et B, soit nommé x ; et que BC soit nommé y »
Avec nos notations habituelles, on comprend que l'axe (AB) est l'axe des abscisses et que l'axe (BC) est l'axe des ordonnées.
Les fonctions permettent notamment de résoudre des problèmes où l'on cherche la trajectoire d'un objet comme l'indique l'exemple du problème posé par Bernoulli dans le document 3 où l'on cherche le trajet le plus rapide pour descendre d'un point A à un point B. On peut également déterminer les positions d'un objet en chute libre sur la Terre, la trajectoire de la Lune, la trajectoire de la Terre… et ainsi prévenir une éventuelle collision entre les astres !



La courbe brachistochrone est la courbe minimisant le temps d'un trajet d'une bille ou d'un objet quelconque pour descendre d'un point A à un point B d'altitude inférieure, dans un plan vertical. La solution est un arc de cycloïde, qui est la trajectoire de n'importe quel point d'un pneu de vélo !



RÉFLÉCHISSONS ENSEMBLE

Une fonction transforme un nombre en un autre.

- Quelle est l'aire d'un carré de côté 2cm ? de côté 5cm ? de côté 6cm ?

....

....

....

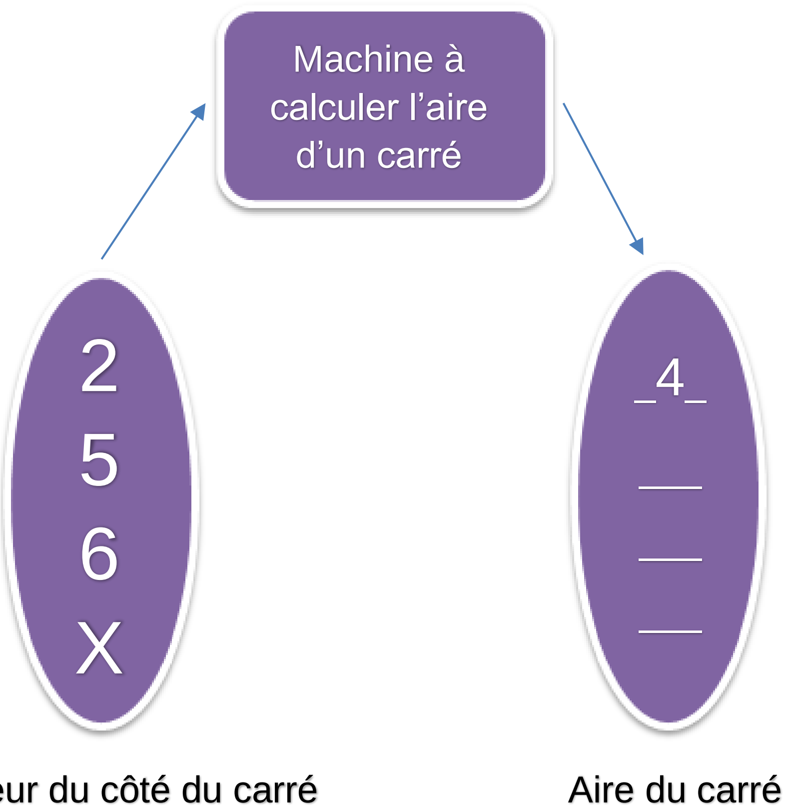
- Rappelez la formule générale pour calculer l'aire d'un carré

....

....

....

- Complétez le schéma ci-dessous



- Complétez le texte suivant :

Cette machine à calculer l'aire d'un carré est ce que l'on nomme une fonction. En effet, à la longueur d'un côté d'un carré elle associe_____________. (ex : à 2 elle associe 4, à 5 elle associe_____________, à 6 elle associe_______________)

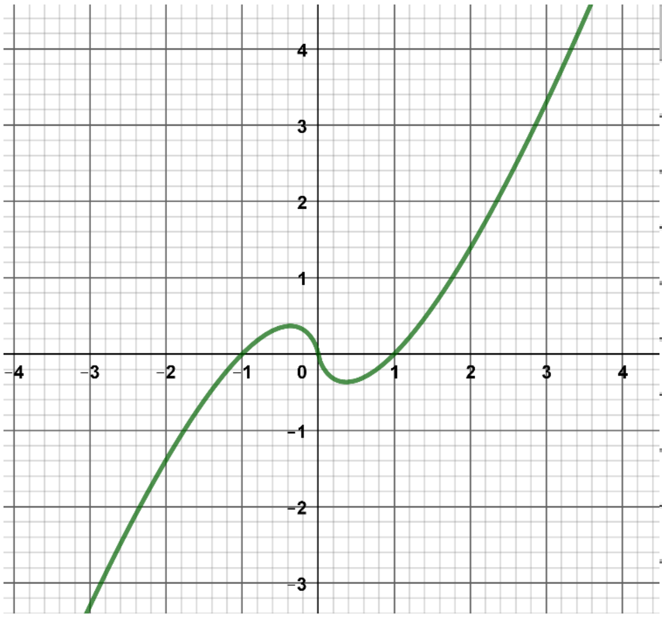
Si l'on note f cette fonction, puis x la longueur du côté d'un carré, alors l'aire du carré de côté x sera notée ________________ .

D'après la question 2, on sait que l'on obtient l'aire d'un carré en appliquant la formule « côté*côté » ce qui s'écrit en terme de fonctions f(x)=___ _________.

RÉFLÉCHISSONS ENSEMBLE

Différentes façons de représenter une fonction.

Ici nous avons représenté la courbe d'une fonction, accompagné d'un tableau de valeurs



A	B
x	f(x)
-4	-5.55
-3	-3.3
-2	-1.39
-1	0
0	0
1	0
2	1.39
3	3.3
4	5.55

- Que vaut $f(3)$? $f(-3)$? $f(4)$? $f(-4)$? Que remarque-t-on ?

- Quelle est l'image de 2 par la fonction ?

- Plusieurs nombres ont la même image 0. Lesquels ?

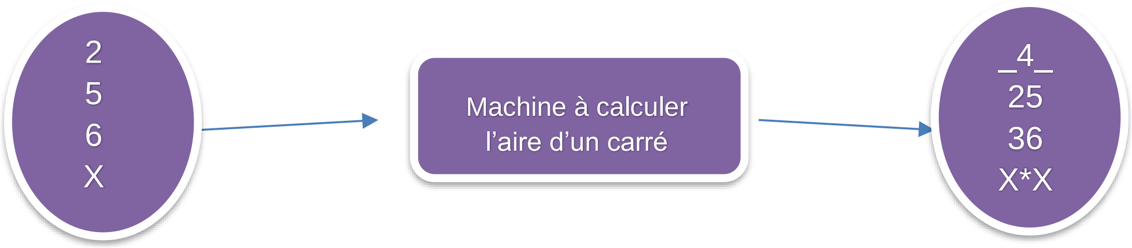
- Quels sont les intérêts respectifs de la courbe et du tableau de valeurs ?

- La fonction représentée est-elle linéaire ? affine ? Pourquoi ?

- La courbe admet-elle un axe de symétrie ? un centre de symétrie ?

CORRECTIONS DES ACTIVITÉS DE PREMIÈRE APPROCHE

1. La formule de calcul d'aire est c*c si c désigne la longueur d'un côté du carré.



Longueur du côté du carré en cm

Aire du carré en cm²

Cette machine à calculer l'aire d'un carré est ce que l'on nomme une fonction. En effet, à la longueur d'un côté d'un carré elle associe l'aire de ce carré (ex : à 2 elle associe 4, à 5 elle associe 25 , à 6 elle associe 36).
Si l'on note f cette fonction, puis x la longueur du côté d'un carré, alors l'aire du carré de côté x sera notée $x \times x = x^2$.
D'après la question 2, on sait que l'on obtient l'aire d'un carré en appliquant la formule « côté*côté » ce qui s'écrit en termes de fonctions $f(x)=x^2$.

2.

$f(3)=3{,}3$ $f(-3)=-3{,}3$ $f(4)=5.55$ $f(-4)=-5.55$

On remarque que les images des nombres opposés sont opposées.
L'image de 2 est 1,39.
$-1{,}0$ et 1.
Le tableau donne des valeurs exactes mais peu de valeurs. Le graphique permet de déterminer de manière approximative des images et antécédents.
La fonction représentée n'est ni linéaire, ni affine car sa courbe représentative n'est pas une droite.
La courbe n'admet pas d'axe de symétrie. Elle admet (0,0) comme un centre de symétrie. On dira qu'il s'agit d'une fonction impaire.

01 GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Notion de fonction

L'ESSENTIEL

Une fonction numérique *f* permet d'associer à tout élément *x* d'un ensemble D_f un <u>nombre réel unique</u> noté $f(x)$.

- **$f(x)$ est l'image de *x* par la fonction *f*.**
- **Si *x* vérifie $f(x) = y$, *x* est un antécédent de *y* par la fonction *f*.**
- **D_f est l'ensemble de définition de *f*.**

Remarques.

- *x* est une **variable**. La variable parcourt l'ensemble D_f .
- L'ensemble D_f sera généralement en mathématiques une partie de $\mathbb{R}$ comme un intervalle. Mais il peut être également une partie de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$… ou un ensemble plus complexe.
- Un élément *x* de D_f <u>n'a qu'une image</u>.
- Mais un nombre peut avoir <u>0, 1 ou plusieurs antécédents</u>.
- Vous connaissez déjà les fonctions affines. Par exemple la fonction $f(x) = 2x + 1$ et son ensemble de définition est $Df = \mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.

Une fonction *f* est **constante** sur D_f quand tous les éléments de D_f ont la même image par *f*.

$f(x)=k$ **avec *k* constante**

À VOUS DE JOUER 1

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. **On a :** $f(4)=1$

   1 est …………………….………… de 4.

   4 est un ……………………………… de 1.

   1 a pour ………………….…………….. 4.

   4 a pour ……………………………………… 1.

2. **On a :** $f(2)=5 \quad f(5)=2$

   Un antécédent de 5 est …….

   L'image de 5 est ………….

   ……… a pour antécédent 5.

   2 a pour image …….

02 GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Représentation des fonctions

Une fonction numérique peut s'exprimer de différentes manières : un tableau de valeurs, une courbe ou une expression.

- un tableau de valeurs (l'ensemble D_f est alors constitué d'un ensemble fini d'éléments)

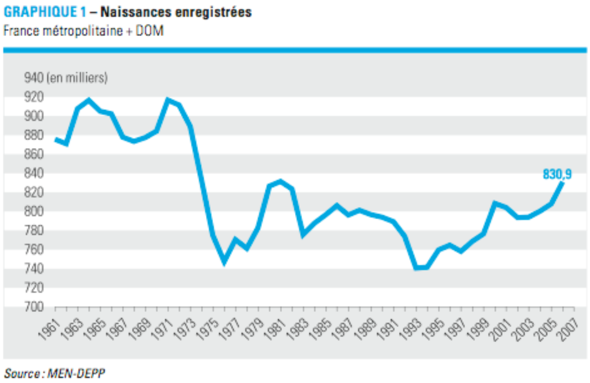
x	0	-4	5	2	8
$f(x)$	10	3	2	3	1

$D_f = \{0;-4;5;2;8\}$

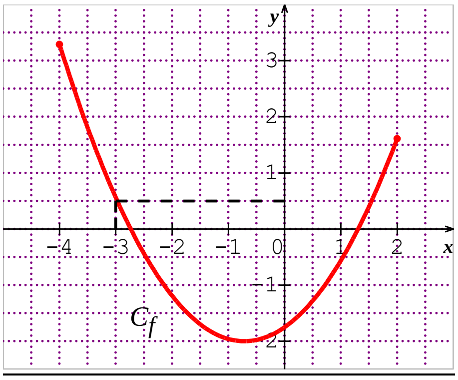
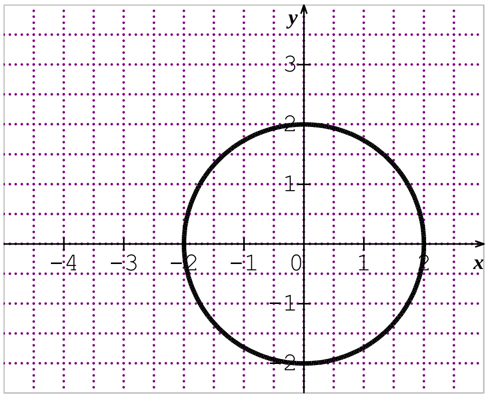
L'image de −4 vaut 3 ; 3 a deux antécédents : −4 et 2.

- une courbe

Par exemple la courbe de croissance des naissances en France



Attention : une courbe ne représente pas forcément une fonction. Pour qu'elle représente une fonction, il faut que, pour toute abscisse a, elle ait au plus un point d'intersection avec la droite $x = a$..

Courbe représentant une fonction	Courbe **ne représentant pas** une fonction
	
$D_f = [-4;2]$ L'image de -3 vaut 0,5. (Voir paragraphe suivant)	

- une expression donnant la fonction en fonction de **variables**.

Par exemple, une fonction *f* permettant le calcul du périmètre d'un cercle en fonction de son rayon *r* (réel strictement positif) :
f est la fonction définie sur par $\mathbb{R}_+^*$ par $f(r) = 2\pi r$.

On peut également définir f de la manière suivante : $f\colon\begin{cases}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\\ r \mapsto 2\pi r\end{cases}$

L'ESSENTIEL

Une fonction numérique *se définit par :*

$$f\colon\begin{cases}D_f \to \mathbb{R}\\ x \mapsto f(x)\end{cases}$$

Exemple 1
Fonction permettant le calcul du périmètre d'un rectangle en fonction de ses dimensions (a,b) (réels strictement positifs) :

$$g\colon\begin{cases}\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\\ (a,b) \mapsto 2(a+b)\end{cases}$$

Exemple2
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 4$.

f peut s'écrire : $f\colon\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto 3x^2 - 4\end{cases}$

Attention : on ne peut utiliser la représentation $f:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto 3x^2 - 4\end{cases}$ qu'avec une variable.

Pour calculer une image ou un antécédent, on utilise $f(x) = \ldots$.

$\cancel{1 \mapsto 3\times 1^2 - 4}$ incorrect $f(1) = 3\times 1^2 - 4$ correct

Remarque : le nom de la variable n'a pas d'importance.

$f:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto 3x^2 - 4\end{cases}$ peut s'écrire $f:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ t \mapsto 3t^2 - 4\end{cases}$.

Le nom de variable le plus répandu est x. Quand la variable représente le temps, on utilise généralement t.

À VOUS DE JOUER 2

La distance $d(t)$ en m parcourue pendant un temps t à la vitesse de 10 m/s est représenté par la fonction :

$$d : \begin{cases} \dots\dots \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \cdots \dots\dots\dots \end{cases}$$

03 GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Courbe représentative

L'ESSENTIEL

C_f est la **courbe représentative** (ou **représentation graphique**) d'une fonction f dont l'ensemble de définition est D_f si :

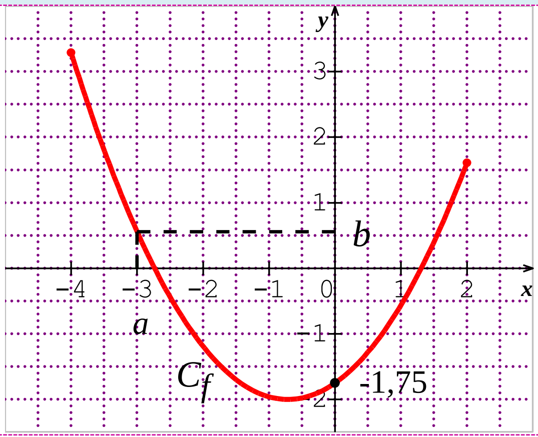
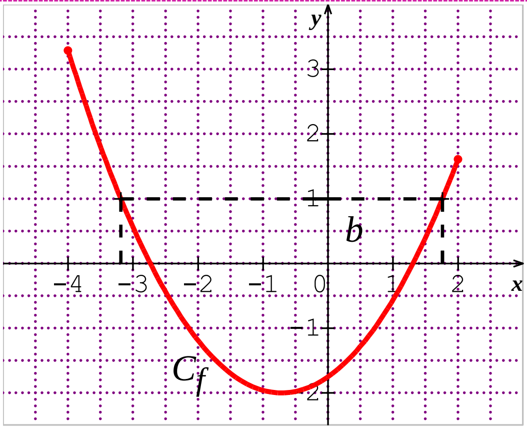
- La courbe C_f est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; f(x))$ avec x appartenant à D_f.
- Ou $y = f(x)$ est une équation de la courbe C_f .

- La courbe représentative d'une fonction constante est une droite horizontale, donc parallèle à l'axe des abscisses (Ox).
- Les droites verticales, donc parallèles à des ordonnées (Oy) ne sont pas des courbes représentatives de fonction !

MÉTHODOLOGIE

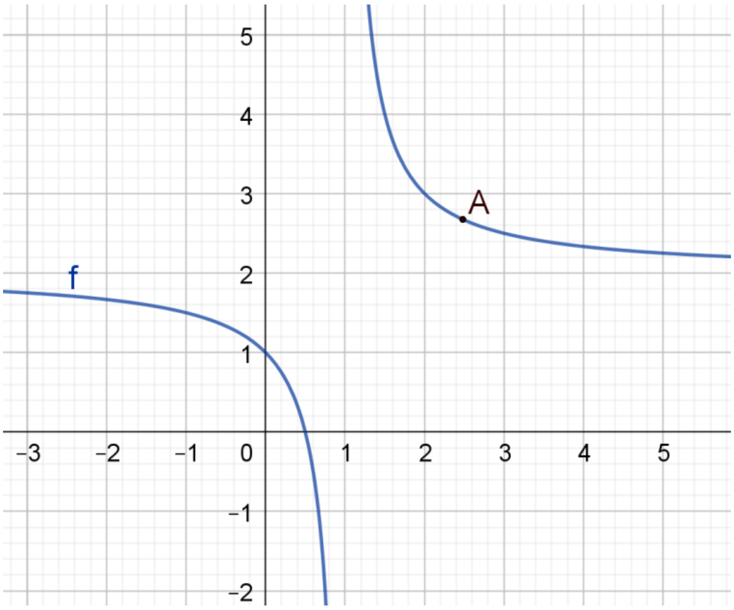
Détermination graphique d'images et d'antécédents

Par convention, les valeurs déterminées par graphique ne sont pas inscrites car il s'agit de valeurs approchées. Les valeurs exactes sont en revanche inscrites.

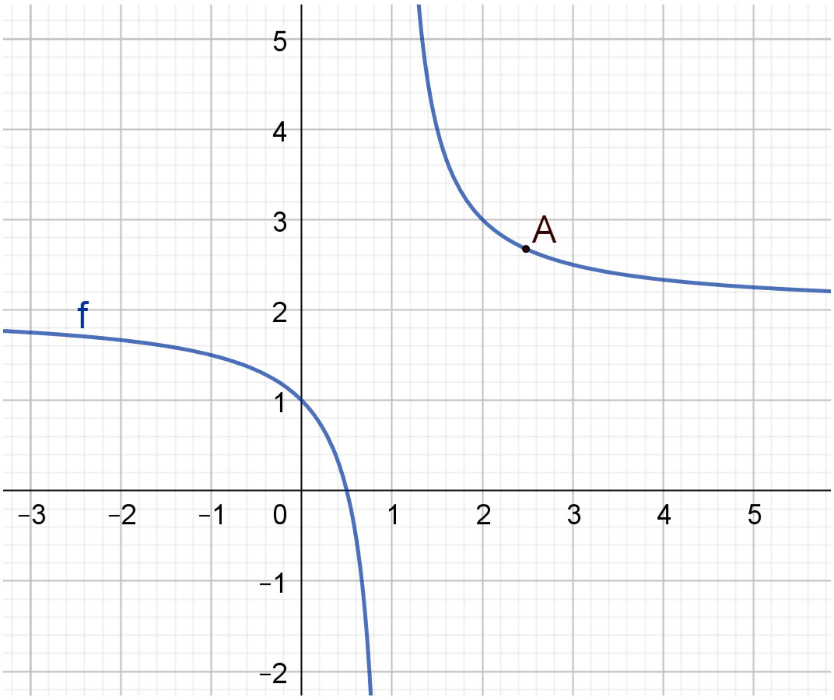
Détermination de l'image d'un point	Détermination des antécédents
	
On trace la verticale jusqu'à la courbe et on lit l'ordonnée *b* sur l'axe (O*y*). Dans cet exemple : $a = -3$. L'image de *a* a pour valeur approchée $0,5$. L'image de 0 est notée : il s'agit d'une valeur exacte !	On repère *b* sur l'axe des ordonnées (O*y*). On trace l'horizontale passant par le point (0 ; *b*). Si elle coupe la courbe, on lit les abscisses des points d'intersection sur l'axe des abscisses (O*x*). Dans cet exemple : $b = 1$. Les antécédents ont pour valeurs approchées : $-3{,}2$ et $1{,}8$.

À VOUS DE JOUER 3

On a tracé la courbe représentative de $f : \begin{cases} \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2x-1}{x-1} \end{cases}$



On a tracé la courbe représentative de $f : \begin{cases} \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2x-1}{x-1} \end{cases}$



1) Placer $M\left(3;\dfrac{5}{2}\right)$. M est sur la courbe car $f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$

Placer $N(-1;2)$. N n'est pas sur la courbe car $f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$ et ....

2) A a pour abscisse $\dfrac{5}{2}$.

$f\left(\dfrac{5}{2}\right)$ a pour valeur approchée .... (*faire apparaître les traits de construction sur le graphique*).

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{2 \times \frac{\cdots}{\cdots} - 1}{\frac{\cdots}{\cdots} - 1} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} = \frac{\cdots\cdots}{3}$$

$f\left(\dfrac{5}{2}\right)$ a pour valeur exacte ... .

3) Avec le graphique, on peut dire que .... est un antécédent de 4 (*faire apparaître les traits de construction sur le graphique*).

On ne peut pas affirmer que .... est l'unique antécédent car ....

....

Recherche algébrique des antécédents de 4.

$$\frac{2x-1}{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2x - 1 = 4(\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Leftrightarrow 2x = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ldots}{\ldots}$$

4 admet un seul antécédent qui vaut ....

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

04

Ensemble de définition

L'ESSENTIEL

L'ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction est l'ensemble des valeurs pour lesquelles on peut calculer l'image. En effet, même si la plupart du temps, nous pourrons calculer les images de n'importe quel nombre réel, il existe des cas où certaines valeurs seront interdites.

Exemples

Pour la fonction $f(x) = 2x + 1$, on peut remplacer x par n'importe quelle valeur. On dira alors que l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres réels ce qui se note $Df = \mathbb{R}$.

Alors que pour la fonction $g(x) = \frac{1}{x}$, il est impossible de remplacer x' par zéro puisqu'on ne peut pas diviser par zéro ! On dira alors que l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres réels privé de 0, ce qui se note $Dg = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

MÉTHODOLOGIE

Il faut exclure toutes les valeurs interdites, en particulier :

- celles qui annulent les dénominateurs ;
- celles qui rendent les valeurs sous les racines carrés négatives.

Exemples :

- $f(x)=\dfrac{x-3}{x-5}$ $D_f=\mathbb{R}-\{5\}$ $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$ 5 est une valeur interdite.
- $f(x)=\sqrt{5-x}$ $D_f=\left]-\infty;5\right]$ L'expression sous la racine doit être positive. $5-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 5$

Remarque :

- Quand on a un quotient, on résout généralement une équation et on exclut ces solutions.
- Quand on a une racine carrée, on résout généralement une inéquation et l'ensemble de définition est l'ensemble solution de cette inéquation.

À VOUS DE JOUER 4

1) $f(x)=\dfrac{3x}{x+2}$ f est définie si le ……..................……… est non nul.

$x+2=0 \Leftrightarrow x=\ldots\ldots$ donc $D_f=\ldots\ldots\ldots\ldots$

2) $f(x)=\sqrt{x+2}$ f est définie si l'expression sous la racine est ………………..

$x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq\ldots\ldots$ donc $D_f=\ldots\ldots\ldots\ldots$

Remarque : dans certains cas, l'ensemble sur lequel la fonction est définie est d'emblée réduit à un certain ensemble E, même si la fonction est calculable pour d'autres valeurs. L'ensemble de définition sera donc l'intersection de E avec l'ensemble des valeurs non interdites.

05 GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Parité d'une fonction

L'ESSENTIEL

Soit f une fonction définie sur D_f.

La fonction f est **paire** si et seulement si pour tout réel *x* :

- (1) si $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$
- (2) $f(-x) = f(x)$

La fonction f est **impaire** si et seulement si pour tout réel *x* :

- (3) si $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$
- (4) $f(-x) = -f(x)$

Etudier la parité d'une fonction consiste à déterminer si elle est paire ou impaire.

Remarques importantes :

- Condition (1) : pour qu'une fonction soit paire ou impaire, il faut donc que l'**ensemble de définition soit symétrique par rapport à 0**. Cette condition est toujours satisfaite si $D_f = \mathbb{R}$
- La plupart des fonctions ne sont ni paires ni impaires !

Exemples

- $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

On a $D_f = \mathbb{R}$. La condition (1) est donc satisfaite.

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. La condition (2) est donc satisfaite.

La fonction *f* est donc paire.

Remarque importante : si on restreint l'ensemble de définition de *f*, par exemple à $\mathbb{R}^+$, alors la condition (1) n'est plus satisfaite et la fonction n'est pas paire.

- $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$

On a $D_f = \mathbb{R}$. La condition (1) est donc satisfaite.

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. La condition (4) est donc satisfaite.

La fonction *f* est donc impaire.

- $f : \begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x-1} \end{cases}$

L'ensemble de définition n'est pas symétrique par rapport à 0.

Donc *f* n'est ni paire, ni impaire.

- $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x+1 \end{cases}$ $\quad f(1) = 3$ et $f(-1) = -1$

Donc *f* n'est ni paire, ni impaire.

Remarques :

- pour montrer qu'une fonction est paire ou impaire, le calcul de $f(-x)$ doit être fait pour un nombre quelconque (donc on calcule avec la variable *x*).
- pour montrer qu'une fonction n'est ni paire ni impaire, il suffit de montrer :
  - soit que l'ensemble de définition n'est pas symétrique,
  - soit qu'on peut trouver un nombre *a* tel que : $f(-a) \neq f(a)$ et $f(-a) \neq -f(a)$

À VOUS DE JOUER 5

1) $f:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 3\end{cases}$

L'ensemble de définition est ……………………………. par rapport à 0.

$f(-x) = (\ldots\ldots)^2 + 3 = \ldots\ldots\ldots\ldots = f(x)$

Donc f est ………………

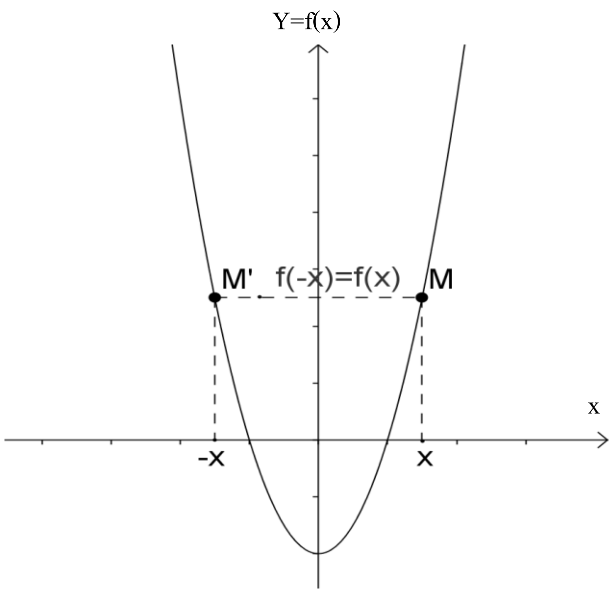
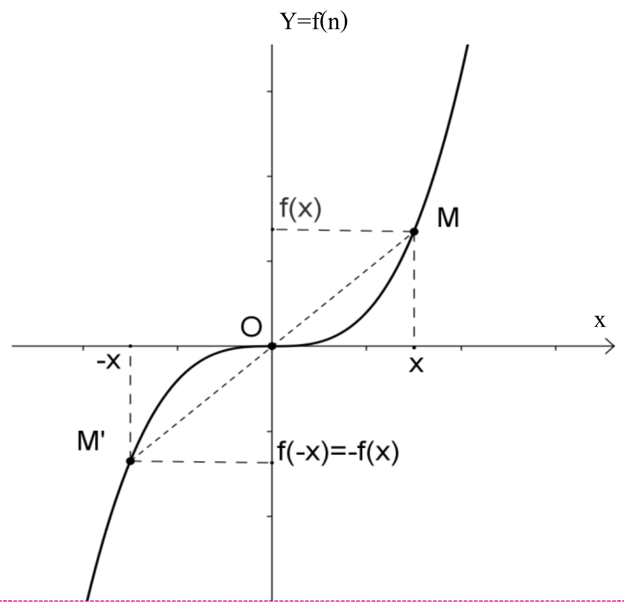
2) $f:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 2x\end{cases}$

$f(1) = \ldots\ldots$ et $f(-1) = \ldots\ldots$ donc $f(-1) \ldots f(1)$ et $f(-1) \ldots -f(1)$

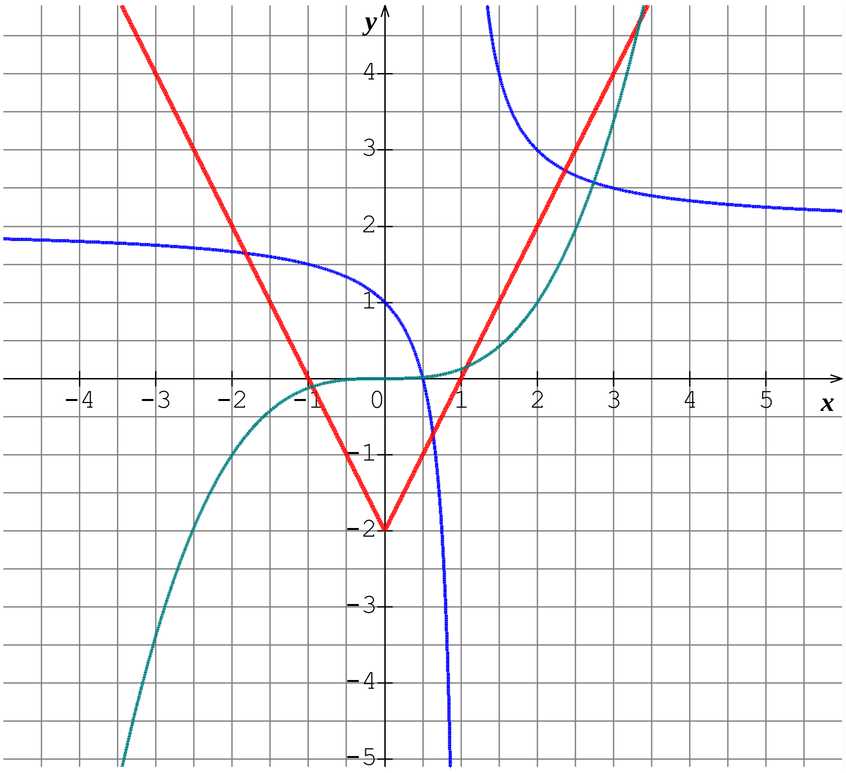
Donc f n'est ……………………………………………

PARITÉ ET RÉPRESENTATION GRAPHIQUE

- La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy).
- La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport au centre du repère O.

Courbe représentative d'une fonction paire	Courbe représentative d'une fonction impaire
	
Les points M $(x; f(x))$ et M' $(-x; f(-x))$ appartiennent tous les deux à la courbe C_f. Ils ont des abscisses opposées et la même ordonnée car $f(-x) = f(x)$. **Ces points sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.**	Les points M $(x; f(x))$ et M' $(-x; f(-x))$ appartiennent tous les deux à la courbe C_f. Ils ont des abscisses opposées et des ordonnées opposées car $f(-x) = -f(x)$. **Ces points sont donc symétriques par rapport à l'origine O du repère.**

À VOUS DE JOUER 6



La courbe verte correspond à une fonction …………………………………………….

car ………………………………………………………………………………………………… .

La courbe rouge correspond à une fonction ………………….

car ………………………………………………… ……………………………………………………………………… .

La courbe bleue correspond à une fonction ………………….

car …………………………………………………

UTILITÉ DE LA PARITÉ

L'étude de la parité d'une fonction permet, si la fonction est paire ou impaire, de réduire l'ensemble sur lequel on étudie la fonction à $\mathbb{R}^+ \cap D_f$ ou à $\mathbb{R}^- \cap D_f$.

Des propriétés de la fonction mises en évidence sur cet ensemble, on pourra déduire les propriétés de la fonction sur l'ensemble de définition par symétrie.

Remarque : l'ensemble d'étude peut être encore réduit si la fonction est périodique.

06 GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Résolution graphique des équations et inéquations

En général, un graphique ne permet d'obtenir que des **valeurs approchées**. La **précision** obtenue **dépend** des **échelles** choisies sur les axes. Le nombre de solutions visibles dépend de la **fenêtre** de tracé.

Les résolutions graphiques sont utiles si on ne connait pas l'expression algébrique d'une fonction, ou si la résolution est complexe. **Elles permettent également de contrôler la cohérence des solutions algébriques**.

RÉSOLUTION GRAPHIQUE D'ÉQUATIONS : équations du type $f(x) = k$

On se donne une fonction ***f*** par sa courbe représentative C_f.

Résoudre $f(x)=k$ revient à chercher tous les antécédents de *k*.

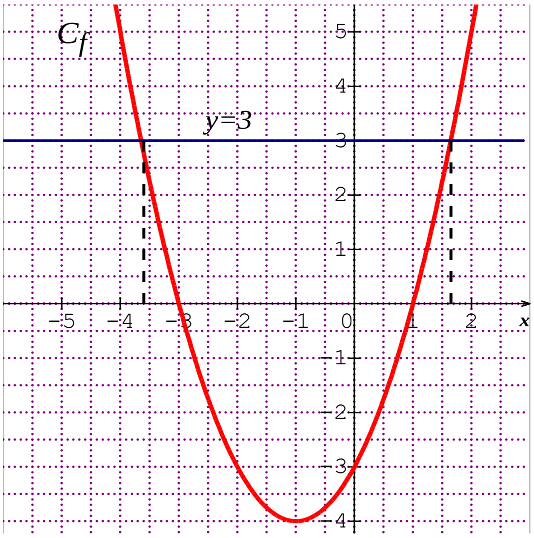
MÉTHODOLOGIE

Méthode de résolution graphique de $f(x)=k$ (rappel)

- On trace la droite (horizontale) d'équation $y=k$.
- On détermine les points d'intersection de cette droite avec la courbe.
- On lit les abscisses de ces points.

Cas particulier important : $f(x)=0$

Il suffit de lire les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses



Résolution graphique de $f(x)=3$

On trace la droite d'équation $y=3$.

On détermine les points d'intersection de cette droite avec la courbe : on obtient ici 2 points dont on lit les abscisses : −3,6 et +1,7.

$S=\{-3,6;1,7\}$

Résolution graphique de $f(x)=0$

On détermine les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. On obtient ici 2 points dont on lit les abscisses : −3 et +1.

$S=\{-3;1\}$

Il s'agit de valeurs approchées !

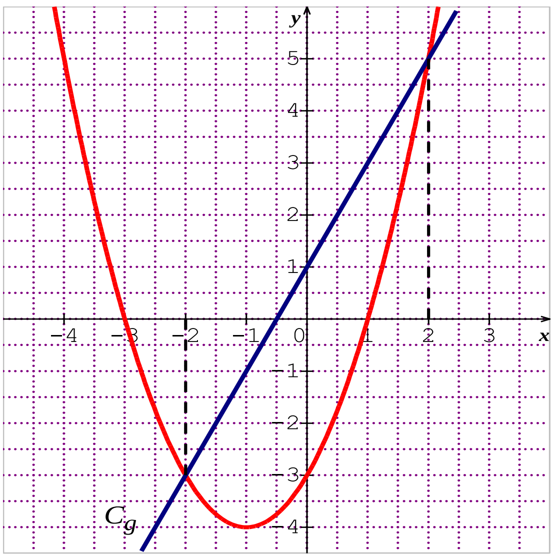
RÉSOLUTION GRAPHIQUE D'ÉQUATIONS : équations du type f(x) = g(x)

On se donne une fonction **f** *par sa courbe représentative* C_f *et une fonction* **g** *par sa courbe représentative* C_g **dans le même repère**.

MÉTHODOLOGIE

Méthode de résolution graphique de $f(x)=g(x)$

- On détermine les points d'intersection des 2 courbes.
- On lit les abscisses de ces points d'intersection.



Résolution graphique de $f(x)=g(x)$

On détermine les points d'intersection des 2 courbes : on obtient ici 2 points dont on lit les abscisses : −2 et +2.

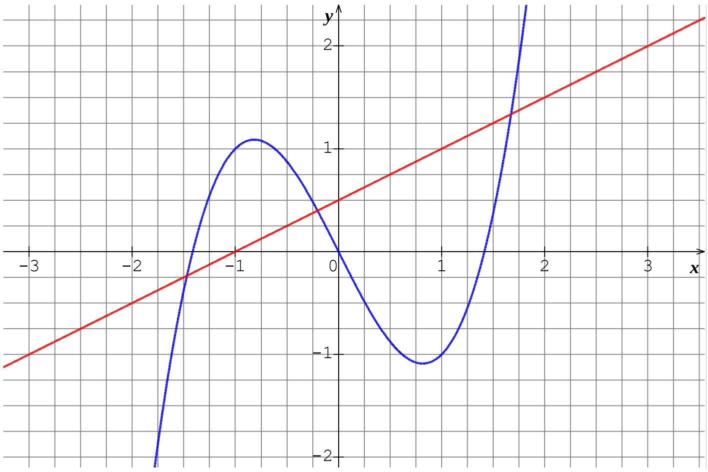
$S=\{-2;2\}$

Il s'agit de valeurs approchées !

À VOUS DE JOUER 7

La fonction f est représentée par la courbe bleue ; la fonction g est représentée par la courbe rouge.

Résoudre graphiquement $f(x)=g(x)$ en faisant apparaître les traits de construction.



Il y a .... points d'intersection dont les abscisses sont : .... $S=$.........................

$S=\{-1,5;1,7\}$ ....

RÉSOLUTION GRAPHIQUE D'INÉQUATIONS : Équations du type f(x) > k

On se donne une fonction f par sa courbe représentative C_f.

Résoudre $f(x)>k$ revient à chercher tous les points dont les images sont strictement supérieures à k.

$S = \{\dots\dots ; \dots\dots\}$

MÉTHODOLOGIE

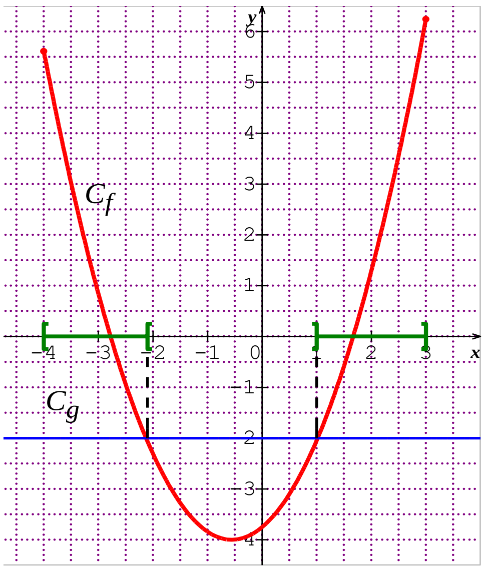
Méthode de résolution graphique de $f(x)>k$

- On trace la droite (horizontale) d'équation $y=k$
- On détermine les abscisses des points pour lesquels la courbe est au-dessus de cette droite avec la courbe.

Cas particulier important : $f(x)>0$

On détermine les abscisses des points pour lesquels la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses.

On raisonne de manière analogue pour les autres signes d'inégalité : <, ≤, ≥.



Résolution graphique de $f(x)>-2$

f est définie sur $[-4;3]$

On trace la droite d'équation $y=-2$.

On détermine les points d'intersection de cette droite avec la courbe : on obtient ici 2 points dont on lit les abscisses : −2,1 et +1.

On détermine ensuite sur quels intervalles la courbe est au-dessus de la droite et on en déduit :

$$S=[-4;-2,1[\cup]1;3]$$

Attention aux bornes ouvertes et fermées ! L'inégalité est stricte donc les abscisses des intersections ne sont pas solutions.

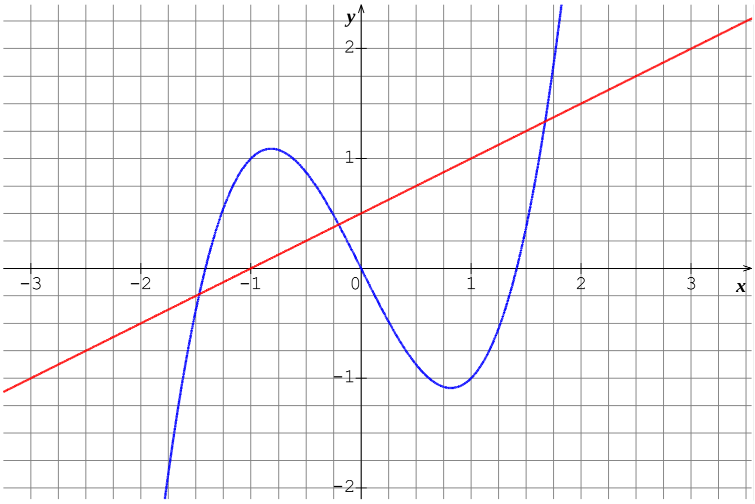
Résolution graphique de $f(x)>0$

On fait le même raisonnement avec comme droite l'axe des abscisses. $S=[-4;-2,8[\cup]1,7;3]$

À VOUS DE JOUER 8

La fonction f est représentée par la courbe bleue ; la fonction g est représentée par la courbe rouge.

Résoudre graphiquement $f(x) > g(x)$ en faisant apparaître les traits de construction.



On détermine d'abord les .... des 2 courbes.

$f(x) > g(x)$ quand la courbe de f est .... de celle de g, donc sur les intervalles .... et ....

POUR ALLER PLUS LOIN

Un site web pour faire et refaire de nombreux exercices.

www.chingatome.fr/chapitre/2nd/generalite-sur-les-fonctions

LE TEMPS DU BILAN

➢ Une fonction numérique f associe à un nombre x d'un ensemble de départ Df un unique nombre noté $f(x)$.

➢ Lorsqu'on écrit $f(2) = 5$, on comprend que la fonction f associe au nombre 2 le nombre 5. On dit que 5 est l'image de 2 ou que 2 est l'UN des antécédents de 5 (il peut y avoir plusieurs antécédents).

➢ On peut représenter une fonction de trois façons :

- une formule algébrique

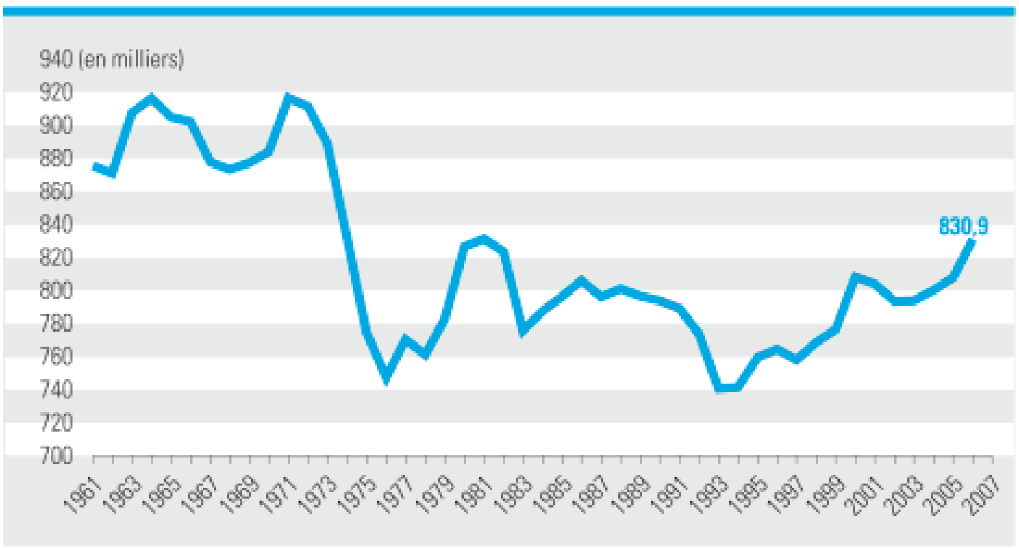
  $f(x) = 2x + 1$

- un tableau de valeurs

x	0	−4	5	2	8
$f(x)$	10	3	2	3	1

- une courbe

GRAPHIQUE 1 – Naissances enregistrées
France métropolitaine + DOM

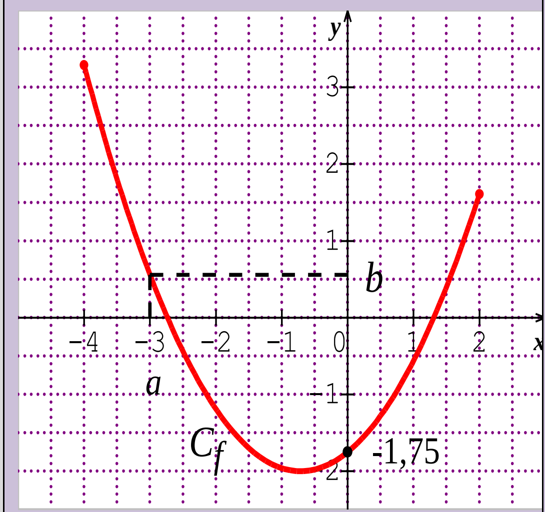
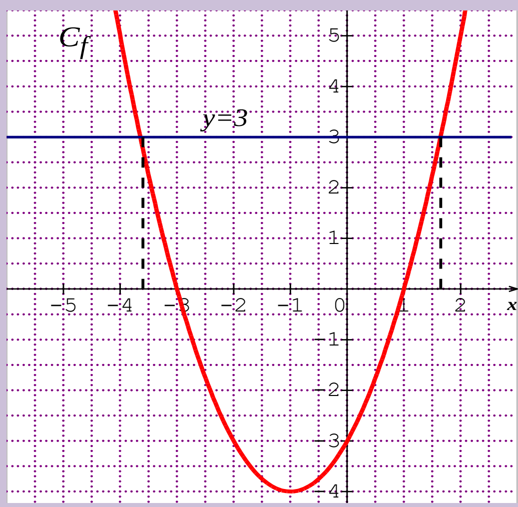


Source : MEN-DEPP

➢ L'ensemble ou domaine de définition d'une fonction f, noté Df, est l'ensemble des valeurs pour lesquelles on peut calculer une image. Dans de nombreux cas, l'ensemble de définition est l'ensemble de tous les nombres réels mais il existe deux cas à connaître :

➢ le cas des fractions : $f(x) = \frac{1}{2x+1}$.
Puisqu'on ne peut pas diviser par 0, $2x + 1$ ne peut pas être égal à 0 donc x ne peut pas être égal à $-\frac{1}{2}$ et $Df = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$.
- le cas des racines : $f(x) = \sqrt{2x + 1}$.
Puisqu'on ne peut placer que des nombres positifs sous une racine, il faut que $2x + 1$ soit positif donc que x soit supérieur ou égal à $-\frac{1}{2}$. Ainsi $Df = [-\frac{1}{2} ; \infty[$.

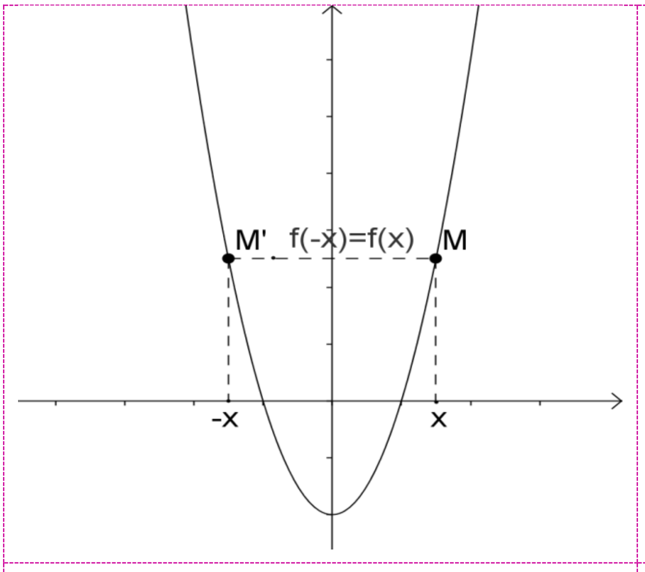
➢ On peut déterminer les images et les antécédents de façon algébrique (par le calcul) ou de façon graphique.

	Déterminer une image	Déterminer un antécédent
De façon algébrique	$f(x) = 2x + 1$ Pour calculer l'image de 3, on remplace x par 3. $f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$ L'image de 3 est 7.	$f(x) = 2x + 1$ Pour calculer le ou les antécédents de 3 par f, on résout l'équation $f(x) = 3$ $2x + 1 = 3$ d'où $x = 1$ Le(s) antécédent(s) de 3 est(sont) 1.
De façon graphique	 Pour calculer l'image de -3, on trace la verticale jusqu'à la courbe et on lit l'ordonnée *b* sur l'axe (O*y*). L'image de *-3* pour valeur approchée $a=-3$	 Pour calculer le ou les antécédents de 3, on trace la droite d'équation $f(x)=3$. On détermine les points d'intersection de cette droite avec la courbe : on obtient ici 2 points dont on lit les abscisses : −3,6 et +1,7. Les antécédents de 3 sont donc -3,6 et 1,7

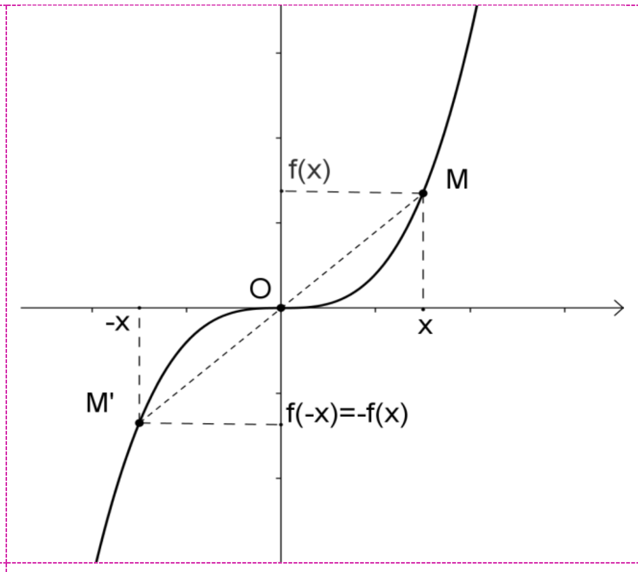
- La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des abscisses (symétrie axiale) et la courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère (symétrie centrale). Pour déterminer qu'une fonction paire (resp. impaire), on montre que

$$f(x) = f(-x) \qquad (\text{resp.}\, f(-x) = -f(x))$$

après avoir vérifié que son ensemble de définition est symétrique par rapport à zéro.

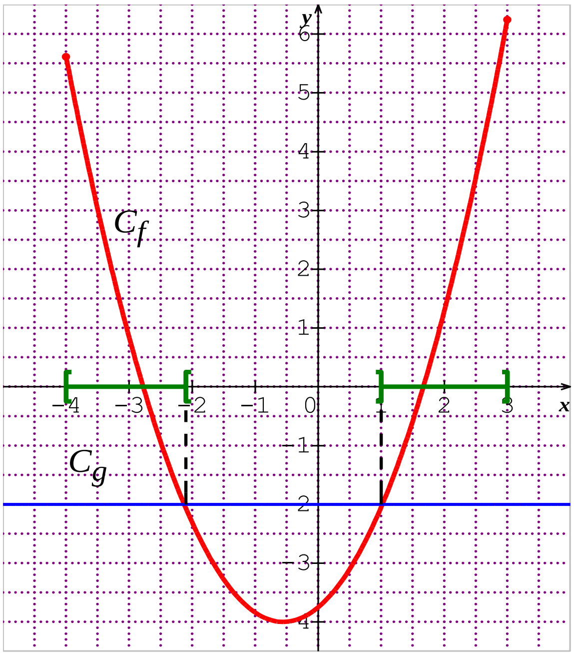


Fonction paire



Fonction impaire

- \- Résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = 3$ consiste à chercher graphiquement les antécédents de 3.
  \- Résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = g(x)$ consiste à déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes de f et de g.
  \- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$ consiste à déterminer les intervalles sur lesquelles la courbe de f est strictement au-dessus de la courbe de g



Résolution graphique de $f(x) > -2$

f est définie sur $[-4;3]$

On trace la droite d'équation $y = -2$.

On détermine les points d'intersection de cette droite avec la courbe : on obtient ici 2 points dont on lit les abscisses : $-2{,}1$ et $+1$.

On détermine ensuite sur quels intervalles la courbe est au-dessus de la droite et on en déduit :

$$S = [-4;-2{,}1[\cup]1;3]$$

Attention aux bornes ouvertes et fermées ! L'inégalité est stricte donc les abscisses des intersections ne sont pas solutions.

EXERCICES

Abordons maintenant une série d'exercices, afin de vérifier vos connaissances.
Les exercices ont été classés dans un ordre d'approfondissement croissant.
Les réponses aux exercices se trouvent en fin de manuel.

EXERCICE 01

On considère une fonction *f*, *C* sa courbe représentative, et des propositions relatives à *f*.

a) 1 a pour image −2.
b) Le point de la courbe d'abscisse 2 a pour ordonnée 1.
c) $f(-1)=2$
d) 1 est l'image de 2.
e) $(-1;2)\in\mathcal{C}$.
f) 1 est un antécédent de −2.

Quelles sont les propositions équivalentes ?

EXERCICE 02

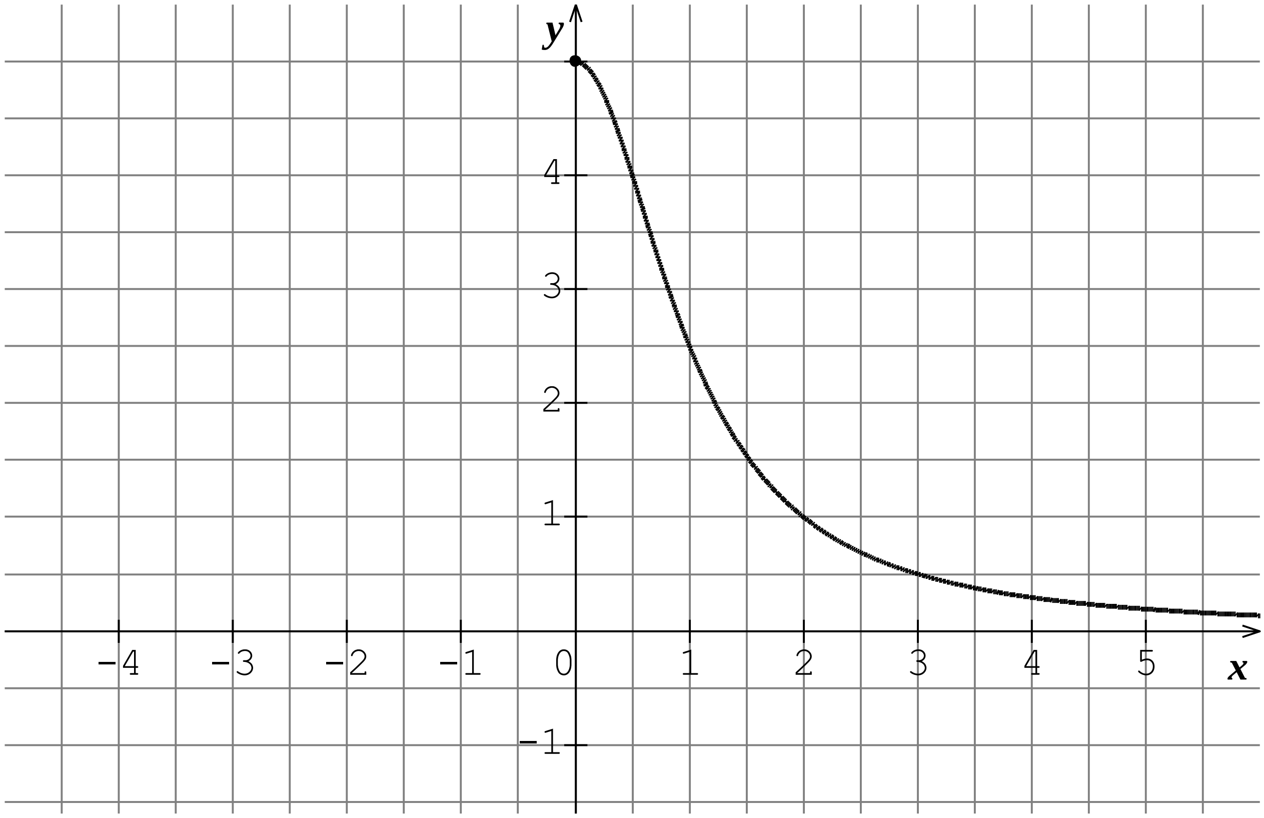
Déterminez l'ensemble de définition et la parité des fonctions suivantes :

$$g(x)=\sqrt{x^2+1} \qquad h(x)=\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+5}} \qquad i(x)=\sqrt{\frac{x+3}{x+5}}$$

EXERCICES

EXERCICE 03

1) Déterminez l'ensemble de définition et la parité de la fonction $f(x)=\dfrac{5}{x^2+1}$.



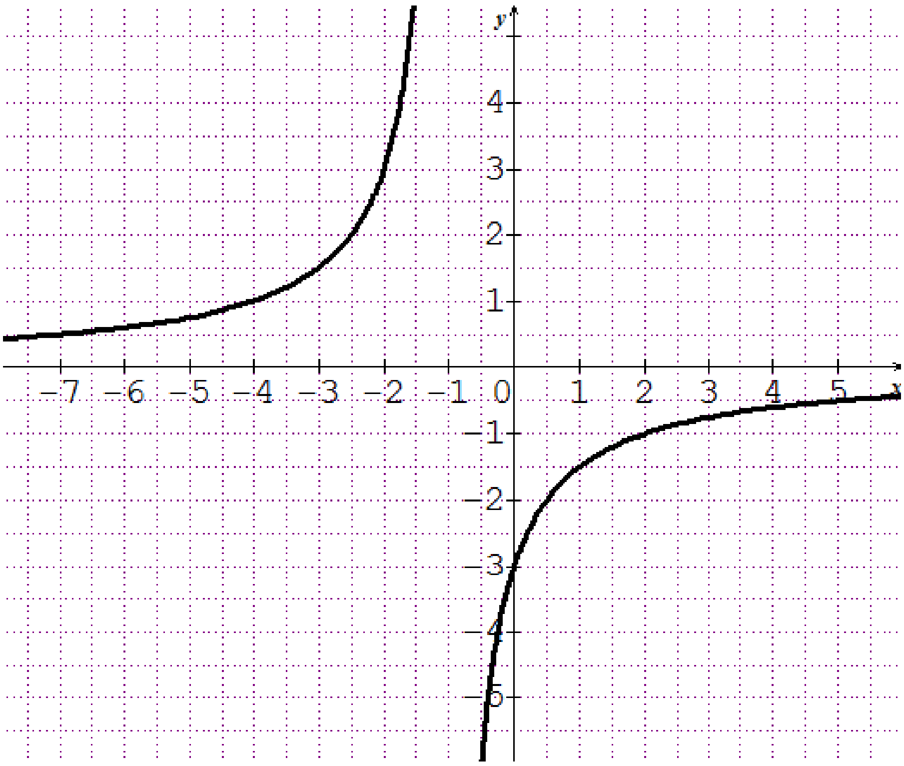
2) On a tracé la courbe sur $[0;+\infty[$. Finissez le tracé de la courbe en justifiant la démarche.

3) Déterminez graphiquement puis algébriquement les images de 1 et de $-\frac{1}{2}$.

4) Déterminez graphiquement puis algébriquement les antécédents de 2 et de -2.

EXERCICE 04

On considère la courbe représentative C de la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $f(x)=\dfrac{-3}{x+1}$

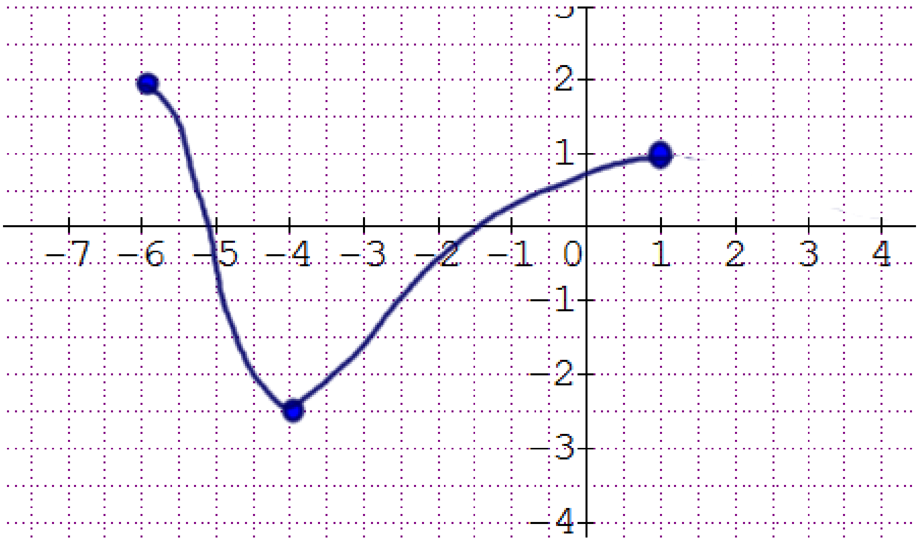


1) Résolvez graphiquement : $-2<f(x)<2$. Retrouvez le résultat algébriquement.

2) Tracez la droite $y = 1 - x$. On pose $g(x) = 1 - x$
Déterminez graphiquement les solutions de $f(x) = g(x)$. Retrouvez le résultat algébriquement.

EXERCICE 05

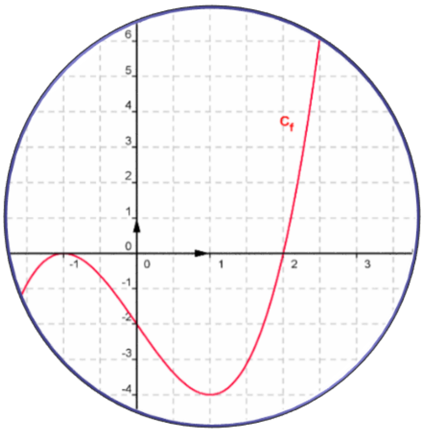
Voici la courbe représentative d'une fonction f.



1) Déterminez son ensemble de définition.

2) Étudiez le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$ suivant les valeurs de k.

CHAPITRE 2
VARIATIONS ET EXTREMA D'UNE FONCTION



Maintenant que nous savons ce qu'est une fonction et comment on la représente, nous allons pouvoir distinguer certaines de leurs propriétés. Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur les variations des fonctions qui est une modélisation mathématique d'une chose que nous côtoyons quotidiennement : les notions de croissance et de décroissance.

Quand on collecte des données, et que nous les plaçons sur un graphique, nous sommes capables de reconnaître lorsque la courbe monte ou la courbe descend. Par exemple, une entreprise qui vend de plus en plus d'objets fait croître son bénéfice. Les endroits où l'on change de variations (maxima, minima) sont des points de repère intéressants dans l'étude d'un phénomène : c'est là qu'on observe un changement de comportement. Par exemple, la même entreprise peut augmenter son bénéfice jusqu'à un nombre maximal d'objets vendus : au-delà, le bénéfice décroît. Cela peut être révélateur du moment à partir duquel les moyens de production et les coûts humains deviennent plus coûteux que la vente des objets. C'est un outil pour l'entreprise qui peut alors s'adapter en revoyant son organisation

OBJECTIFS

- Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction définie sur un intervalle. Tableau de variations.
- Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.
- Pour une fonction affine, interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe.

COMPÉTENCES VISÉES

- Relier représentation graphique et tableau de variations.
- Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.
- Exploiter la calculatrice pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule.
- Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine.

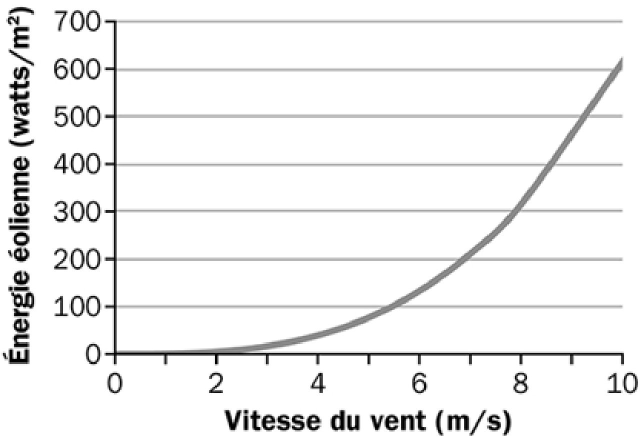
PRÉ-REQUIS

- Factorisation/développement
- Résolution algébrique des équations/inéquations du premier degré.
- Résoudre une équation, une inéquation produit ou quotient, à l'aide d'un tableau de signes.

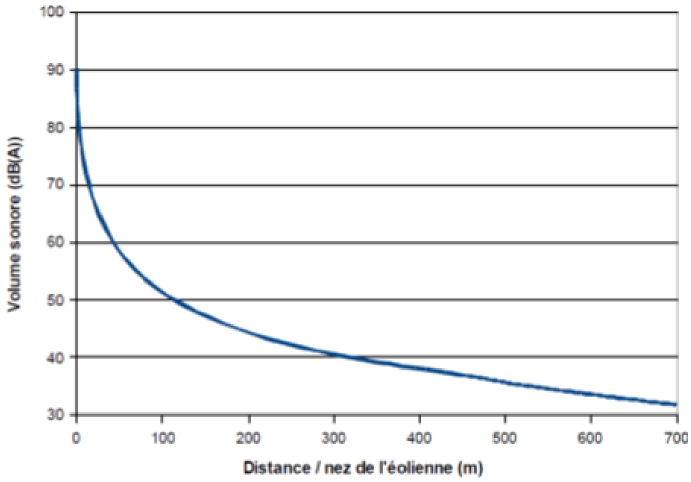
On pourra retrouver ces prérequis dans le module « Nombres et Calculs ».

Première approche
Effectuer une démarche scientifique

Voici 2 courbes concernant des éoliennes.



Courbe 1



Courbe 2

RÉFLECHISSONS ENSEMBLE

▪ Complétez ces phrases.

La courbe 1 représente ……………………..………………………………………… en fonction de ……………………………………………………

La courbe 2 représente ……………………..……………………………………………… en fonction de ………………………………………………………………………..

▪ Complétez ces tableaux.

Vitesse du vent en m/s	0	4	7	10
Energie en W/m²	……………	……….….	…………….	…………

Distance en m	0	100	300	700
Volume sonore en dB	……………	……….….	…………….	…………

▪ Comparez l'allure des 2 courbes et complétez ces phrases.

Quand la vitesse du vent augmente, l'énergie de l'éolienne ……………………………………………….

On dit que la fonction est croissante.

Quand la distance à l'éolienne augmente, le volume sonore de l'éolienne ………………………….

On dit que la fonction est décroissante.

SOLUTIONS ACTIVITÉ

La courbe 1 représente l'énergie éolienne en fonction de la vitesse du vent.

La courbe 2 représente le volume sonore n fonction de la distance à l'éolienne.

Vitesse du vent en m/s	0	4	7	10
Energie en W/m^2	0	40	200	620

Distance en m	0	100	300	700
Volume sonore en dB	90	55	40	32

Quand la vitesse du vent augmente, l'énergie de l'éolienne augmente.

Quand la distance à l'éolienne augmente, le volume sonore de l'éolienne diminue.

01

VARIATIONS ET EXTREMA D'UNE FONCTION

Sens de variation

FONCTION CROISSANTE, DECROISSANTE SUR UN INTERVALLE

Dans ce paragraphe : f est une fonction définie sur D_f, *I* est un intervalle inclus dans D_f.

L'ESSENTIEL

Fonction croissante.

- f est **croissante** sur l'intervalle *I* si et seulement si :
  quels que soient x_1, x_2 deux réels quelconques appartenant à *I*,
  si $x_1 < x_2$ **alors** $f(x_1) \leq f(x_2)$

- f est **strictement croissante** sur l'intervalle *I* si et seulement si :
  quels que soient x_1, x_2 deux réels quelconques appartenant à *I*,
  si $x_1 < x_2$ **alors** $f(x_1) < f(x_2)$

Exemple : la fonction $f(x)=x^2$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

En effet, soient 2 réels x_1, x_2 tels que $x_1<x_2$

$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)$

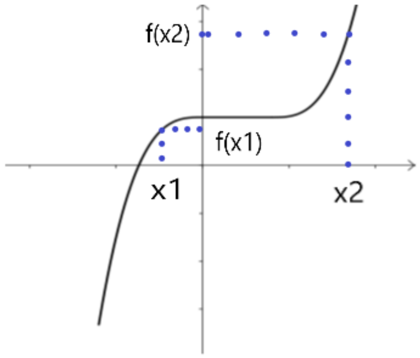
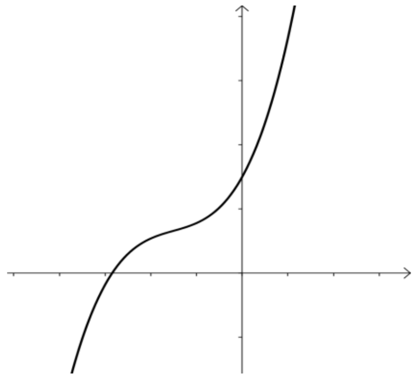
$x_2-x_1>0$ car on a $x_1<x_2$

et $x_2+x_1>0$ puisque les 2 nombres sont positifs.

On en déduit : $f(x_2)-f(x_1)>0$ ou encore $f(x_1)<f(x_2)$

Remarque : attention au « *quels que soient* » de la définition. Pour montrer qu'une fonction est croissante sur *I*, il ne suffit pas de montrer que la relation $f(x_1)\leq f(x_2)$ est vérifiée pour 2 valeurs particulières de x_1 et x_2, mais qu'elle l'est mais pour des valeurs quelconques !

Représentation graphique d’une fonction décroissante

Fonction croissante	**Fonction strictement croissante**
	
La représentation graphique d’une fonction **croissante** est « montante » de la gauche vers la droite, avec éventuellement des paliers horizontaux.	La représentation graphique d’une fonction **strictement croissante** est « montante » de la gauche vers la droite.

L’ESSENTIEL

Fonction décroissante

- f est **décroissante** sur l’intervalle *I* si et seulement si :
  quels que soient x_1, x_2 deux réels quelconques appartenant à *I*,
  si $x_1 < x_2$ **alors** $f(x_1) \geq f(x_2)$
- f est **strictement décroissante** sur l’intervalle *I* si et seulement si :
  quels que soient x_1, x_2 deux réels quelconques appartenant à *I*,
  si $x_1 < x_2$ **alors** $f(x_1) > f(x_2)$

Une fonction décroissante change l’ordre.

Exemple : la fonction $f(x)=\frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

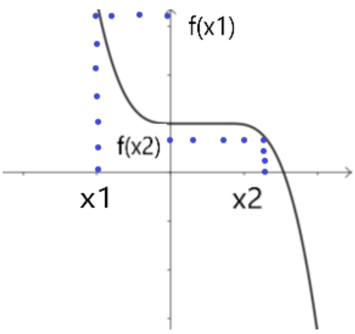
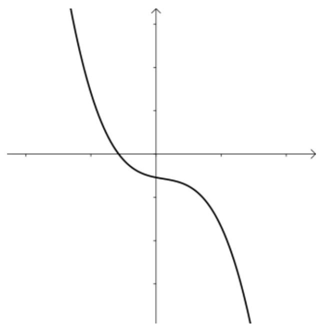
En effet, soient 2 réels strictement positifs x_1, x_2 tels que $x_1 < x_2$.

D’après les règles de calcul des inégalités, il vient immédiatement :

$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ soit $f(x_1) > f(x_2)$

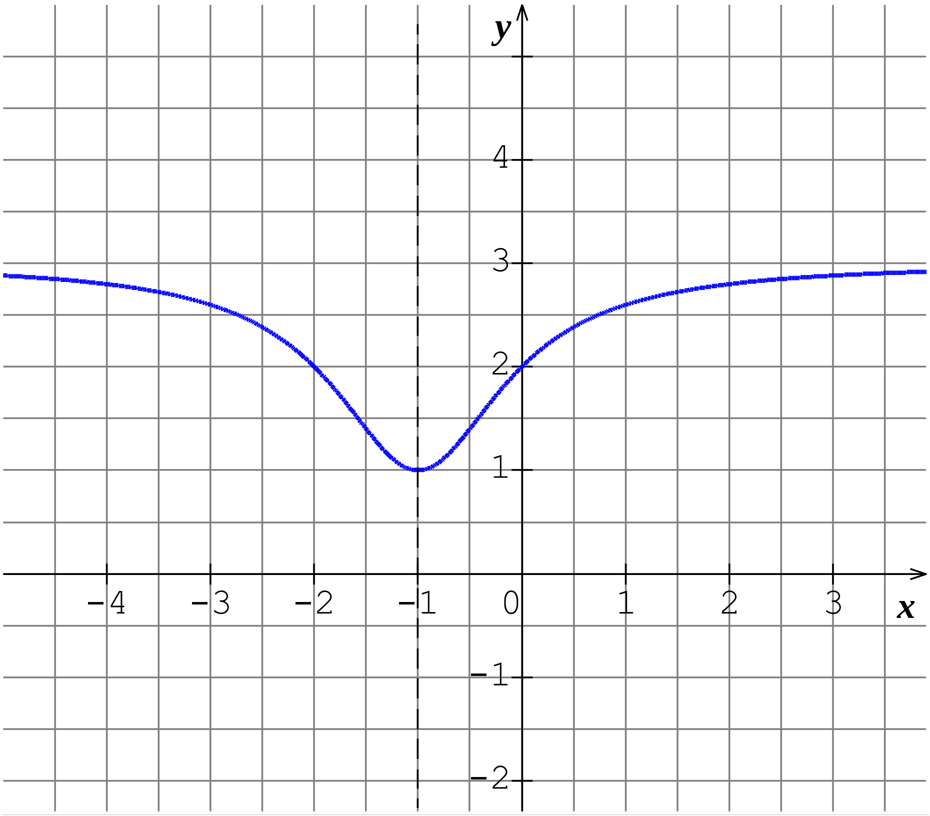
La fonction est donc décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Représentation graphique d’une fonction décroissante

Fonction décroissante	**Fonction strictement décroissante**
	
La représentation graphique d’une fonction décroissante est « descendante » de la gauche vers la droite, avec éventuellement des paliers horizontaux.	La représentation graphique d’une fonction strictement décroissante est « descendante » de la gauche vers la droite.

Une fonction peut être croissante sur certains intervalles et décroissante sur d'autres.

Exemple



Cette fonction est décroissante sur $]-\infty;-1]$ et croissante sur $[-1;+\infty[$.

À VOUS DE JOUER 9

1) f est une fonction strictement croissante $\mathbb{R}$.

$f(4)$ … $f(5)$

$f(-2)$ … $f(-3)$

$f(-2)$ … $f(1)$

$f(-6)$ … $f(-3)$

2) f est une fonction strictement décroissante $\mathbb{R}$.

$f(2)$ … $f(-5)$

$f(-3)$ … $f(0)$

$f(4)$ … $f(-4)$

$f(-6)$ … $f(-7)$

L'ESSENTIEL
Fonction décroissante

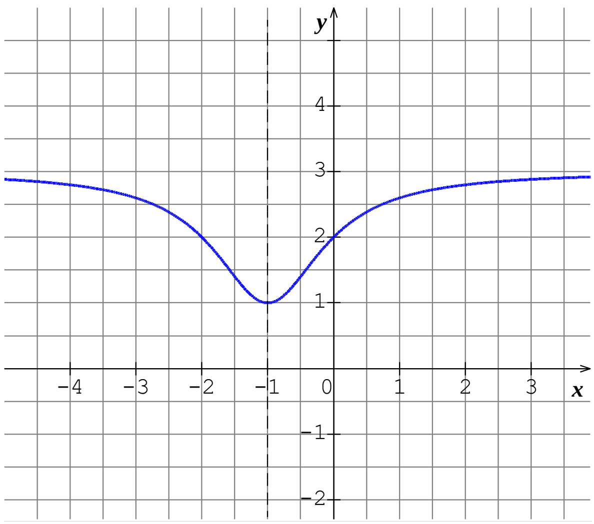
- f est **monotone** sur l'intervalle *I* si elle est croissante sur I ou si elle est décroissante sur I.

- f est **strictement monotone** sur l'intervalle *I* si elle est strictement croissante sur I ou si elle est strictement décroissante sur I.

VARIATIONS D'UNE FONCTION

L'ESSENTIEL
Etudier les variations d'une fonction consiste à déterminer sur quels intervalles elle est croissante ou décroissante.

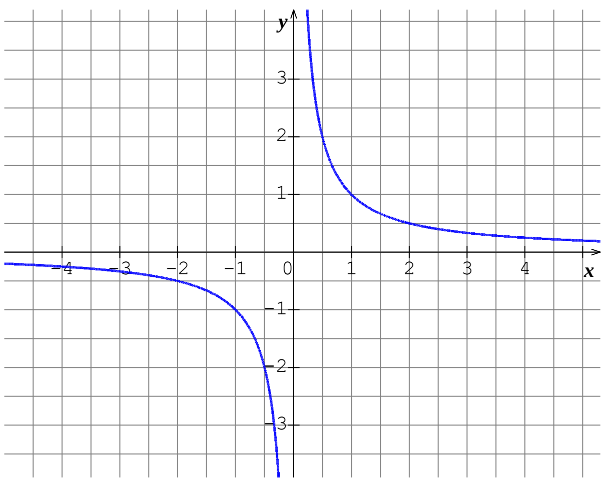
Exemple



Cette fonction est décroissante sur $]-\infty;-1]$ et croissante sur $[-1;+\infty[$.

Remarque importante : le sens de variation des fonctions s'étudie sur des intervalles.

Exemple :



Cette fonction est décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

Remarque : on ne peut pas dire que cette fonction est décroissante sur $\mathbb{R}^*$. En effet $f(-1) < f(1)$!

À VOUS DE JOUER 10

f est une fonction strictement croissante sur $]-\infty;1]$ et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$

Complétez avec <, > ou ? (si on ne peut pas savoir) :

$$f(4)\ \ldots\ f(5)$$

$$f(-2)\ \ldots\ f(-3)$$

$$f(-2)\ \ldots\ f(2)$$

$$f(-6)\ \ldots\ f(-3)$$

02 VARIATIONS ET EXTREMA D'UNE FONCTION

Extrema d'une fonction

MAXIMUM ET MAJORATION

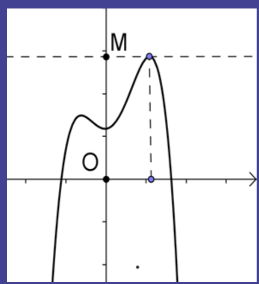
L'ESSENTIEL

Maximum et majoration.

Le **maximum M** d'une fonction f est **l'image la plus grande atteinte par la fonction**, si elle existe.
On a alors : pour tout x de D_f : $f(x) \leq M$

On dit que les valeurs de la fonction sont majorées par M ou plus simplement que **la fonction est majorée par M.**

Si un maximum M existe, la courbe représentative de f est au-dessous de la droite horizontale d'équation : $y = M$



Exemple de courbe d'une fonction admettant un maximum M

Remarques :

- Toutes les fonctions n'admettent pas un maximum (par exemple $f(x)=x$).
- Si un maximum existe, il peut être atteint en plusieurs points.
- Une fonction peut être majorée, même si elle n'admet pas de maximum. Par exemple la fonction $f(x)=-\dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*_+$ est majorée par 0, mais il n'existe pas de point ayant pour image 0.

MINIMUM ET MAJORATION

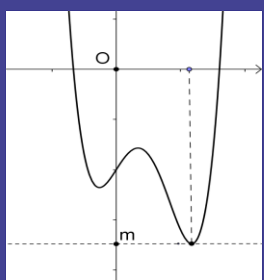
L'ESSENTIEL

Maximum et majoration.

Le **minimum m** d'une fonction f est **l'image la plus petite atteinte par la fonction**, si elle existe.
On a alors : pour tout x de D_f : $f(x) \geq m$

On dit que les valeurs de la fonction sont minorées par m ou plus simplement que **la fonction est minorée par m.**

Si un minimum m existe, la courbe représentative de f est au-dessus de la droite horizontale d'équation : $y = m$



Exemple de courbe d'une fonction admettant un maximum M

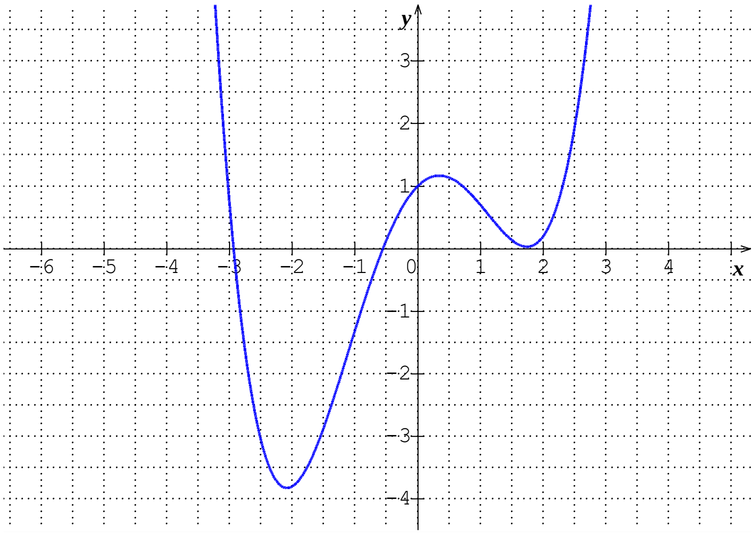
Remarques :

- Toutes les fonctions n'admettent pas un minimum (par exemple $f(x)=x$).
- Si un minimum existe, il peut être atteint en plusieurs points.
- Une fonction peut être minorée, même si elle n'admet pas de minimum. Par exemple la fonction $f(x)=\frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*{}_+$ est minorée par 0, mais il n'existe pas de point ayant pour image 0.

Une fonction à la fois minorée par *m* et majorée par *M* est dite bornée.
On a alors : $m \le f(x) \le M$

À VOUS DE JOUER 11

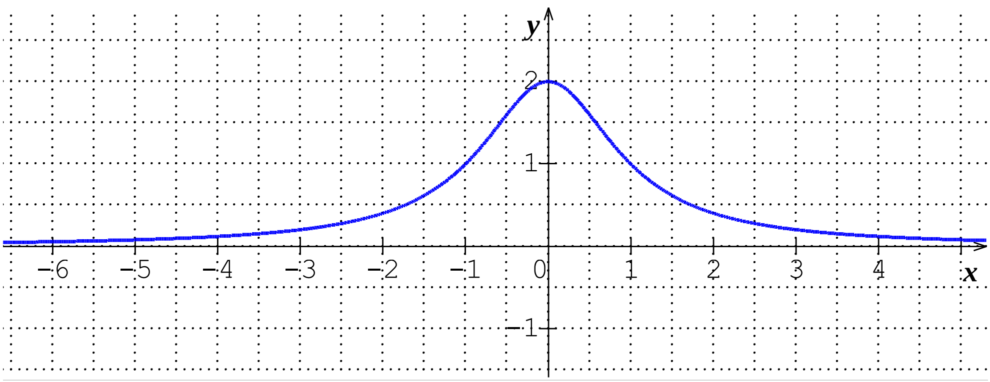
1) Voici la courbe d'une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$.



f admet un .... qui vaut environ .... et ce minimum est atteint en $x \approx \ldots\ldots$.

Mais *f* n'admet pas de .... La fonction n'est donc pas ....

2) Voici la courbe d'une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$.



f admet un .... qui vaut environ .... qui est atteint en $x=0$.

f admet 0 comme .... ; mais 0 n'est pas un .... car 0 n'a pas d'.......................................

La fonction .... car pour tout *x* de $\mathbb{R}$, $\ldots\ldots \le f(x) \le \ldots\ldots$.

VARIATIONS ET EXTREMA D'UNE FONCTION

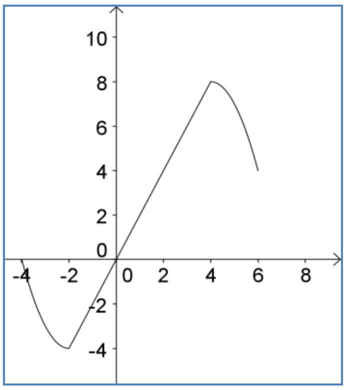
03

Tableau de variations

Etudier les variations d'une fonction revient à déterminer les intervalles sur lesquels elle est croissante ou décroissante.
L'ensemble des informations des variations sur le domaine de définition est résumé dans un tableau appelé tableau de variations.

Ce tableau permet de « visualiser » la forme approximative de la courbe.

Exemple :
Voici la courbe représentative d'une fonction définie sur $D_f = [-4;6]$.



Cette fonction est décroissante sur $[-4;-2]$ puis croissante sur $[-2;4]$, et à nouveau décroissante sur $[4;6]$.

On établit alors son tableau de variations.

Tableau de variations :

x	-4		-2		4		6
$f(x)\}$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	8	$\searrow$	4

Un tableau de variations se compose de deux lignes correspondant respectivement :

- **aux valeurs de *x*** (on fait apparaître les bornes de l'ensemble de définition et des intervalles sur lesquels la fonction est monotone) ;
- **aux variations de** $f(x)$ (on fait apparaître les valeurs prises par la fonction à chacune des bornes et on les joint par des flèches indiquant la croissance ou la décroissance).

Remarque : on ne peut pas dire que cette fonction est décroissante sur $\mathbb{R}^*$. En effet $f(-1) < f(1)$!

À VOUS DE JOUER 12

f est définie sur $[-1;10]$, croissante sur [-1;5] décroissante sur [5;10].
tel que les images respectives de $-1,5$ et 10 $sont$ $-6,2$ et 0
Complétez les phrases suivantes :

Pour établir le tableau de variations, on doit mettre sur la ligne des *x* ……………………………….

……………………………………………… , soit -1 et …… , et le point où il y a changement de

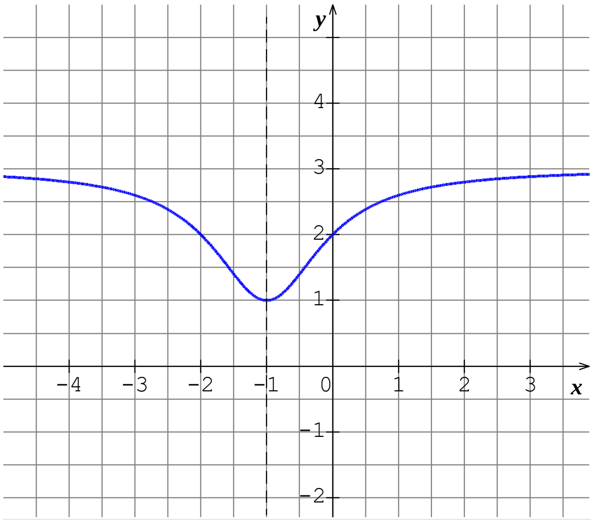
………………………………, soit ……. .

x	…		…		…
$f(x)$	…	$\nearrow$	…	$\searrow$	…

LE TEMPS DU BILAN

- Une fonction a des variations : elle peut croître ou décroître. Une fonction est croissante sur un intervalle si elle ne fait que croître sur cet intervalle ; une fonction est décroissante sur un intervalle si elle ne fait que décroître.

- Etudier les variations d'une fonction consiste à déterminer les intervalles sur lesquels elle est croissante et décroissante. Le minimum (resp. maximum), s'il existe, est la plus petite (resp. grande) valeur atteinte par la fonction.

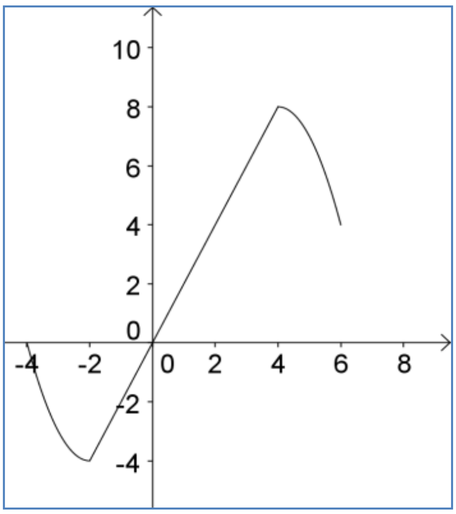


Cette fonction est décroissante sur $]-\infty;-1]$ *et croissante sur* $[-1;+\infty[$.
De plus, elle admet un minimum en -1 qui vaut 1.

- Pour prouver qu'une fonction est croissante ou décroissante, on utilisera la définition formelle.
Par exemple, pour prouver que $f(x) = 1/x$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]\,0;+\infty[$, on choisit deux nombres $x1$ et $x2$ quelconques dans cet intervalle et on montre que $f(x1)$ est strictement plus grand que $f(x2)$.

- A partir du tableau de variations d'une fonction, on peut reconstruire globalement la forme de la courbe.

x	-4		-2		4		6
$f(x)\}$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	8	$\searrow$	4



Abordons maintenant une série d'exercices, afin de vérifier vos connaissances.
Les exercices ont été classés dans un ordre d'approfondissement croissant.
Les réponses aux exercices se trouvent en fin de manuel.

EXERCICE 06

Établissez le tableau de variations et donnez un exemple de représentation graphique d'une fonction f ayant ces caractéristiques :

- f est définie sur $[-4;5]$.
- -1 n'a que 2 antécédents : −4 et 1 ; c'est le minimum de la fonction.
- La fonction est strictement monotone sur $[-4;-2]$, $[-2;1]$, $[1;5]$ et change de sens de variation à chaque borne.
- Le maximum de la fonction est 3,5.
- $f(5)=2$

EXERCICE 07

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

1) Soient 2 points x_1 et x_2. Factorisez l'expression : $f(x_2) - f(x_1)$.

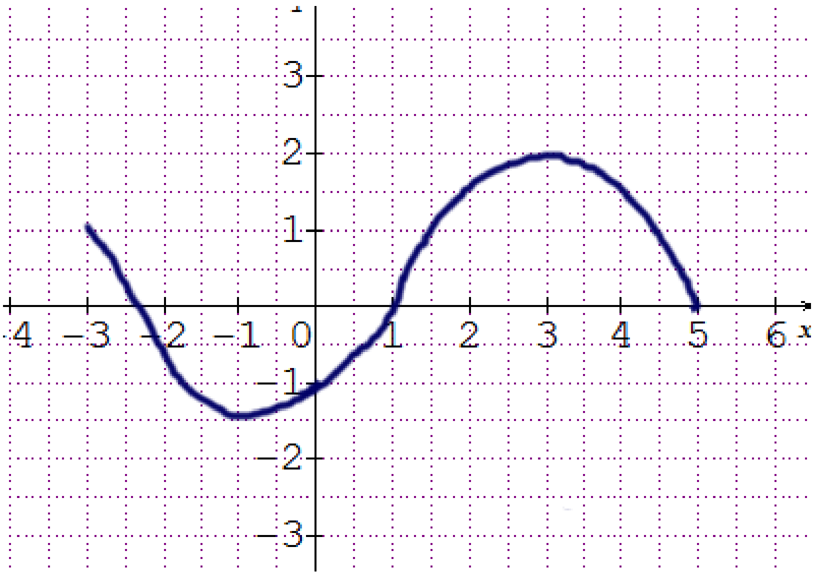
2) En déduire que :

a) f est strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

b) f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$

EXERCICE 08

On considère la courbe représentative d'une fonction f.



1) Déterminez l'ensemble de définition de f.

2) Déterminez les images de 1 et de 2.

3) Déterminez les antécédents, s'ils existent, de 1.

4) La fonction admet-elle un minimum ? Un maximum ? Si oui, en quels points sont-ils atteints ?

5) Dressez le tableau de variations de la fonction.

EXERCICE 09

Soit f une fonction croissante sur un intervalle I. Que peut-on dire du sens de variation de la fonction g définie sur le même intervalle I par : $g(x) = -f(x)$?

EXERCICE 10

1) Montrez qu'une fonction impaire croissante sur $]a;b[$ avec $0 < a < b$ est également croissante sur $]-b;-a[$.
   Vous montrerez de même qu'une fonction impaire décroissante sur $]a;b[$ avec $0 < a < b$ est également décroissante sur $]-b;-a[$.

2) f est une fonction impaire décroissante sur [0;1[et croissante sur]1;+∞[.
   On sait que $f(0) = 0$ et $f(1) = -4$
   Etablissez son tableau de variations.

EXERCICE 11

x	-3		-1		2		4
$f(x)$	-2	$\nearrow$	5	$\searrow$	3	$\nearrow$	4

1) x∈[-1;2]" ; donnez un encadrement de " f(x)"."

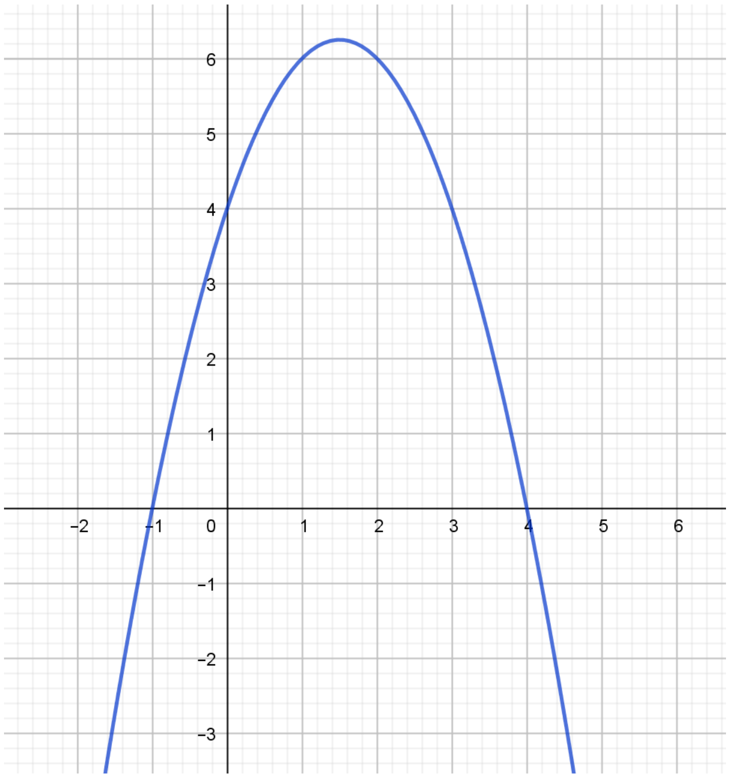
2) x∈[-3;2]" ; donnez un encadrement de " f(x)"."

3) Faites le tableau de variations de la fonction $g: \begin{cases} [-3;4] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3 - f(x) \end{cases}$

EXERCICE 12

Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ et $g(x) = x - 1$.

On appelle *Cf* et *Cg* leurs courbes représentatives respectives. On a tracé *Cf*.



1) Etude de la fonction *f* :
   a. Déterminez graphiquement les variations de *f*.
   b. Déterminez graphiquement le maximum de la fonction et le point où il est atteint.
   c. Déterminez graphiquement pour quelles valeurs de *x* on a $f(x) \geq 0$.
   d. Montrez que $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$ et retrouver algébriquement les résultats de 1.c.

----

2) Etudiez les variations de g et tracez la courbe *Cg.*

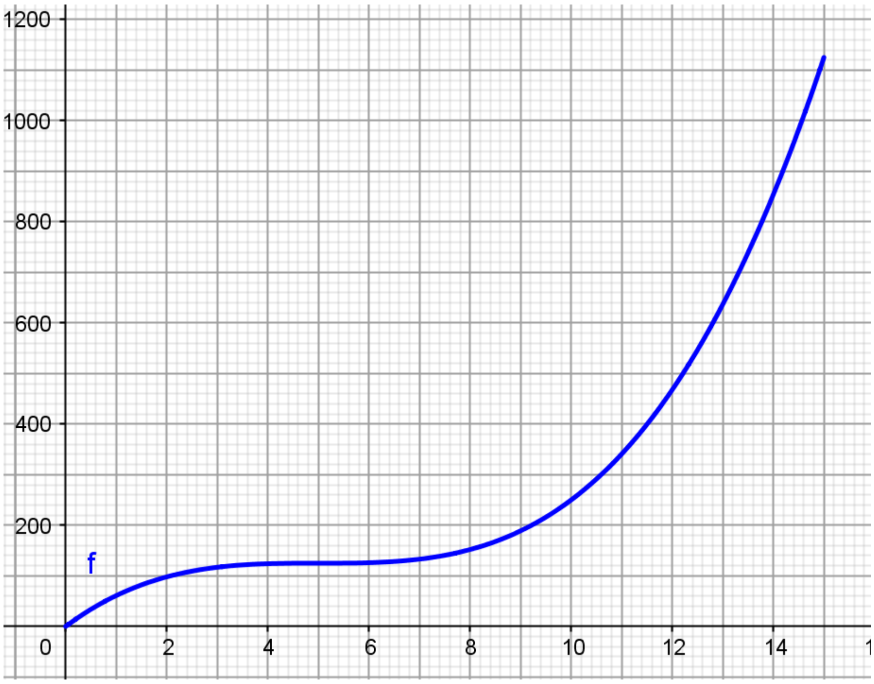
3) Résolvez graphiquement $f(x) = g(x)$.

4) Montrez que $g(x) - f(x) = (x - 1 - \sqrt{6})(x - 1 + \sqrt{6})$ et résoudre algébriquement $f(x) = g(x)$. Commenter

EXERCICE 13

Le coût de production en milliers d'euros de *x* milliers d'objets est donné par la fonction :

$$f : \begin{cases} [0; 15] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 - 15x^2 + 75x \end{cases}$$



Le prix de vente unitaire est de 30 €. Le prix de vente de *x* milliers d'objets en milliers d'euros est donné par $R(x)$. La fonction bénéfice est donnée B est définie par : $B(x)=R(x)-f(x)$

1) Exprimez R(x) en fonction de x.

----

2) Quelle est la nature de la fonction R ?

----

3) Tracez sa courbe représentative sur le graphique ci-dessus.

A partir du graphique, déterminez :

4) Quel est le coût de production de 9 000 objets ? Quel est le bénéfice réalisé ?

----

5) Pour quelles quantités d'objets réalise-t-on un bénéfice?

----

6) Donnez le tableau de signes de B ?

7) Pour quelle valeur de x a-t-on le bénéfice maximal ?

8) Donnez le tableau de variation de la fonction bénéfice.

9) A l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, donnez à 100 près le nombre d'objets qui permet de réaliser un bénéfice maximal.

Vous pouvez maintenant faire et envoyer le devoir n°1