COURS PI

L'école sur-mesure

de la Maternelle au Bac, Établissement d'enseignement privé à distance, déclaré auprès du Rectorat de Paris

Seconde - Module 4 - Géométrie

Mathématiques

v.5.1

- **Guide de méthodologie** pour appréhender notre pédagogie
- **Leçons détaillées** pour apprendre les notions en jeu
- **Exemples et illustrations** pour comprendre par soi-même
- **Prolongement numérique** pour être acteur et aller + loin
- **Exercices d'application** pour s'entraîner encore et encore
- **Corrigés des exercices** pour vérifier ses acquis

www.cours-pi.com

Paris & Montpellier

EN ROUTE VERS LE BACCALAURÉAT

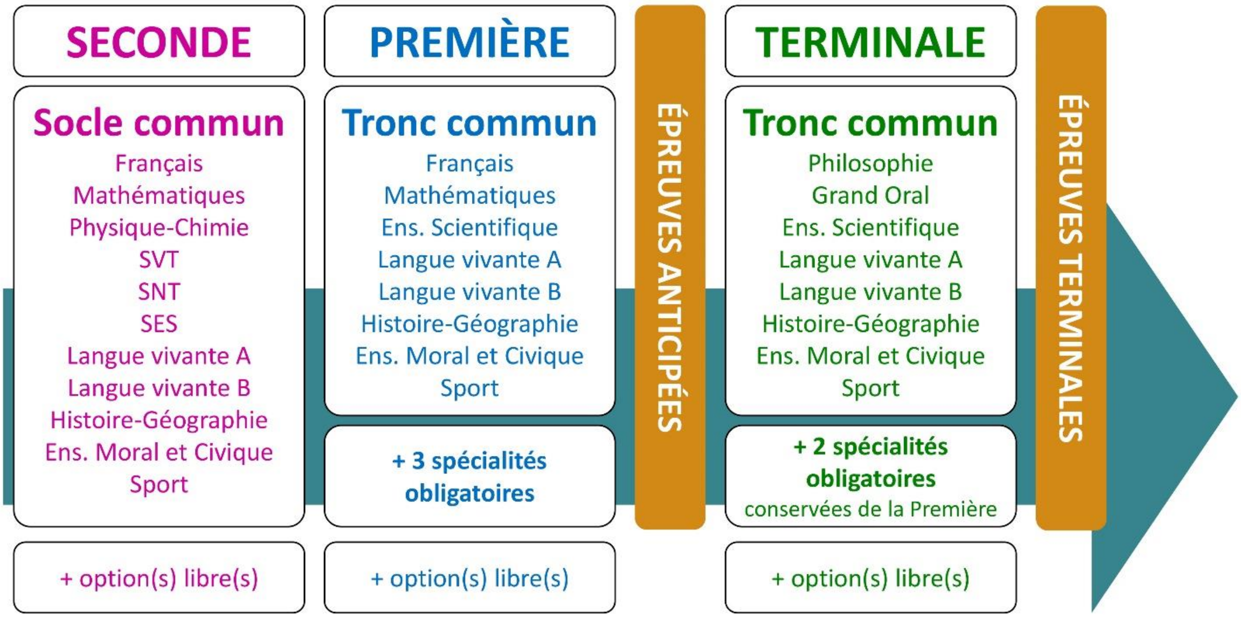
Comme vous le savez, **la réforme du Baccalauréat** est entrée en vigueur progressivement jusqu'à l'année 2021, date de délivrance des premiers diplômes de la nouvelle formule.

Dans le cadre de ce nouveau Baccalauréat, **notre Etablissement**, toujours attentif aux conséquences des réformes pour les élèves, s'est emparé de la question avec force **énergie** et **conviction** pendant plusieurs mois, animé par le souci constant de la réussite de nos lycéens dans leurs apprentissages d'une part, et par la **pérennité** de leur parcours d'autre part. Notre Etablissement a questionné la réforme, mobilisé l'ensemble de son atelier pédagogique, et déployé tout **son savoir-faire** afin de vous proposer un enseignement tourné continuellement vers l'**excellence**, ainsi qu'une scolarité tournée vers la **réussite**.

- Les **Cours Pi** s'engagent pour faire du parcours de chacun de ses élèves un **tremplin vers l'avenir**.
- Les **Cours Pi** s'engagent pour ne pas faire de ce nouveau Bac un diplôme au rabais.
- Les **Cours Pi** vous offrent **écoute** et **conseil** pour coconstruire une **scolarité sur-mesure**.

LE BAC DANS LES GRANDES LIGNES

Ce nouveau Lycée, c'est un enseignement à la carte organisé à partir d'un large tronc commun en classe de Seconde et évoluant vers un parcours des plus spécialisés année après année.



CE QUI A CHANGÉ

- Il n'y a plus de séries à proprement parler.
- Les élèves choisissent des spécialités : trois disciplines en classe de Première ; puis n'en conservent que deux en Terminale.
- Une nouvelle épreuve en fin de Terminale : le Grand Oral.
- Pour les lycéens en présentiel l'examen est un mix de contrôle continu et d'examen final laissant envisager un diplôme à plusieurs vitesses.
- Pour nos élèves, qui passeront les épreuves sur table, le Baccalauréat conserve sa valeur.

CE QUI N'A PAS CHANGÉ

- Le Bac reste un examen accessible aux candidats libres avec examen final.
- Le système actuel de mentions est maintenu.
- Les épreuves anticipées de français, écrit et oral, tout comme celle de spécialité abandonnée se dérouleront comme aujourd'hui en fin de Première.

A l'occasion de la réforme du Lycée, nos manuels ont été retravaillés dans notre atelier pédagogique pour un accompagnement optimal à la compréhension. Sur la base des programmes officiels, nous avons choisi de créer de nombreuses rubriques :

- **Suggestions de lecture** pour s'ouvrir à la découverte de livres de choix sur la matière ou le sujet
- **Réfléchissons ensemble** pour guider l'élève dans la réflexion
- **L'essentiel** et **Le temps du bilan** pour souligner les points de cours à mémoriser au cours de l'année
- **À vous de jouer** pour mettre en pratique le raisonnement vu dans le cours et s'accaparer les ressorts de l'analyse, de la logique, de l'argumentation, et de la justification
- **Pour aller plus loin** pour visionner des sites ou des documentaires ludiques de qualité
- Et enfin ... la rubrique **Les Clés du Bac by Cours Pi** qui vise à vous donner, et ce dès la seconde, toutes les cartes pour réussir votre examen : notions essentielles, méthodologie pas à pas, exercices types et fiches étape de résolution !

MATHÉMATIQUES SECONDE

Module 4 - Géométrie

L'AUTEURE

Sylvie LAMY

« Faire des maths c'est jouer aux legos. Il s'agit d'assembler des briques pour solutionner des problèmes ». Diplômée de l'Ecole Polytechnique et agrégée de Mathématiques, elle poursuit aujourd'hui son parcours professionnel à l'Institut Géographique National et au Ministère des Transports comme chargée de mission sur les projets spatiaux. Passionée par les sciences physiques, son approche pédagogique réside dans la transmission du raisonnement scientifique. Elle attend de ses éléves de comprendre et d'expliciter leur démarche dans la résolution des problèmes.

PRÉSENTATION

Ce **cours** est divisé en 3 chapitres, chacun comprenant :

- Le **cours**, conforme aux programmes de l'Education Nationale
- Des **exercices d'application et d'entraînement**
- Les **corrigés** de ces exercices
- Des **devoirs** soumis à correction (et ***se trouvant hors manuel***). Votre professeur vous renverra le corrigé-type de chaque devoir après correction de ce dernier.

Pour une manipulation plus facile, les corrigés-types des exercices d'application et d'entraînement sont regroupés en fin de manuel.

CONSEILS A L'ÉLÈVE

Vous disposez d'un support de Cours complet : **prenez le temps** de bien le lire, de le comprendre mais surtout de l'**assimiler**. Vous disposez pour cela d'exemples donnés dans le cours et d' exercices types corrigés.
Vous pouvez rester un peu plus longtemps sur une unité mais travaillez régulièrement.

LES FOURNITURES

Vous devez posséder :

- une **calculatrice graphique pour l'enseignement scientifique au Lycée comportant un mode examen (requis pour l'épreuve du baccalauréat).**
- un **tableur** comme Excel de Microsoft (payant) ou Calc d'Open Office (gratuit et à télécharger sur http://fr.openoffice.org/). En effet, certains exercices seront faits de préférence en utilisant un de ces logiciels, mais vous pourrez également utiliser la calculatrice).

LES DEVOIRS

Les devoirs constituent le moyen d'évaluer l'acquisition de vos *savoirs* (« Ai-je assimilé les notions correspondantes ? ») et de vos *savoir-faire* (« Est-ce que je sais expliquer, justifier, conclure ? »).

Placés à des endroits clés des apprentissages, ils permettent la vérification de la bonne assimilation des enseignements.

Aux *Cours Pi*, vous serez accompagnés par un professeur selon chaque matière tout au long de votre année d'étude. Référez-vous à votre « Carnet de Route » pour l'identifier et découvrir son parcours.
Avant de vous lancer dans un devoir, assurez-vous d'avoir **bien compris les consignes**.
Si vous repérez des difficultés lors de sa réalisation, n'hésitez pas à le mettre de côté et à revenir sur les leçons posant problème. **Le devoir n'est pas un examen**, il a pour objectif de s'assurer que, même quelques jours ou semaines après son étude, une notion est toujours comprise.
Aux *Cours Pi*, chaque élève travaille à son rythme, parce que chaque élève est différent et que ce mode d'enseignement permet le « sur-mesure ».
Nous vous engageons à respecter le moment indiqué pour faire les devoirs. Vous les identifierez par le bandeau suivant :

Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le devoir n°1

Il est **important de tenir compte des remarques, appréciations et conseils du professeur-correcteur**. Pour cela, il est **très important d'envoyer les devoirs au fur et à mesure** et non groupés. **C'est ainsi que vous progresserez !**

Donc, dès qu'un devoir est rédigé, envoyez-le aux *Cours Pi* par le biais que vous avez choisi :

1) Par **soumission en ligne** via votre espace personnel sur **PoulPi**, pour un envoi **gratuit**, **sécurisé** et plus **rapide**.
2) Par **voie postale** à *Cours Pi*, 9 rue Rebuffy, 34 000 Montpellier
   *Vous prendrez alors soin de joindre une **grande enveloppe libellée à vos nom et adresse**, et **affranchie au tarif en vigueur** pour qu'il vous soit retourné par votre professeur*

N.B. : *quel que soit le mode d'envoi choisi, vous veillerez à **toujours joindre l'énoncé du devoir** ; plusieurs énoncés étant disponibles pour le même devoir.*
N.B. : *si vous avez opté pour un envoi par voie postale et que vous avez à disposition un scanner, nous vous engageons à conserver une copie numérique du devoir envoyé. Les pertes de courrier par la Poste française sont très rares, mais sont toujours source de grand mécontentement pour l'élève voulant constater les fruits de son travail.*

SOUTIEN ET DISPONIBILITÉ

VOTRE RESPONSABLE PÉDAGOGIQUE

Professeur des écoles, professeur de français, professeur de maths, professeur de langues : notre Direction Pédagogique est constituée de spécialistes capables de dissiper toute incompréhension.

Au-delà de cet accompagnement ponctuel, notre Etablissement a positionné ses Responsables pédagogiques comme des « super profs » capables de co-construire avec vous une scolarité sur-mesure.
En somme, le Responsable pédagogique est votre premier point de contact identifié, à même de vous guider et de répondre à vos différents questionnements.

Votre Responsable pédagogique est la personne en charge du suivi de la scolarité des élèves.
Il est tout naturellement votre premier référent : une question, un doute, une incompréhension ? Votre Responsable pédagogique est là pour vous écouter et vous orienter. Autant que nécessaire et sans aucun surcoût.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?	Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.
QUEL EST SON RÔLE ?	Orienter les parents et les élèves. Proposer la mise en place d'un accompagnement individualisé de l'élève. Faire évoluer les outils pédagogiques. Encadrer et coordonner les différents professeurs.

VOS PROFESSEURS CORRECTEURS

Notre Etablissement a choisi de s'entourer de professeurs diplômés et expérimentés, parce qu'eux seuls ont une parfaite connaissance de ce qu'est un élève et parce qu'eux seuls maîtrisent les attendus de leur discipline. En lien direct avec votre Responsable pédagogique, ils prendront en compte les spécificités de l'élève dans leur correction. Volontairement bienveillants, leur correction sera néanmoins juste, pour mieux progresser.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?	Une question sur sa correction ? • faites un mail ou téléphonez à votre correcteur et demandez-lui d'être recontacté en lui laissant un message avec votre nom, celui de votre enfant et votre numéro. • autrement pour une réponse en temps réel, appelez votre Responsable pédagogique.

LE BUREAU DE LA SCOLARITÉ

Placé sous la direction d'Elena COZZANI, le Bureau de la Scolarité vous orientera et vous guidera dans vos démarches administratives. En connaissance parfaite du fonctionnement de l'Etablissement, ces référents administratifs sauront solutionner vos problématiques et, au besoin, vous rediriger vers le bon interlocuteur.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?	Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi. 04.67.34.03.00 scolarite@cours-pi.com

LE SOMMAIRE

Mathématiques – Module 4 – Géométrie

SUGGESTIONS CULTURELLES

ESSAIS

- **Les maths c'est magique !** *Johnny Ball*
- **17 Équations qui ont changé le monde** *Ian Stewart*
- **Alex au pays des chiffres** *Alex Bellos*
- **Le grand roman des maths : de la préhistoire à nos jours** *Mickael Launay*
- **La symphonie des nombres premiers** *Marcus du Sautoy*
- **Dans la jungle des nombres premiers.** *John Derbyshire*
- **Histoire universelle des chiffres : L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul** *Georges Ifrah*
- **Le démon des maths.** *Hans Magnus Enzensberger*
- **A propos de rien : une histoire du zéro** *Robert kaplan*

BANDES-DESSINÉES

- **Logicomix** *Doxiádis / Papadátos / Papadimitríou*
- **Les maths en BD 1 et 2** *Larry Gonick*
- **Les statistiques en BD** *Larry Gonick*

DOCUMENTAIRES AUDIOVISUELS

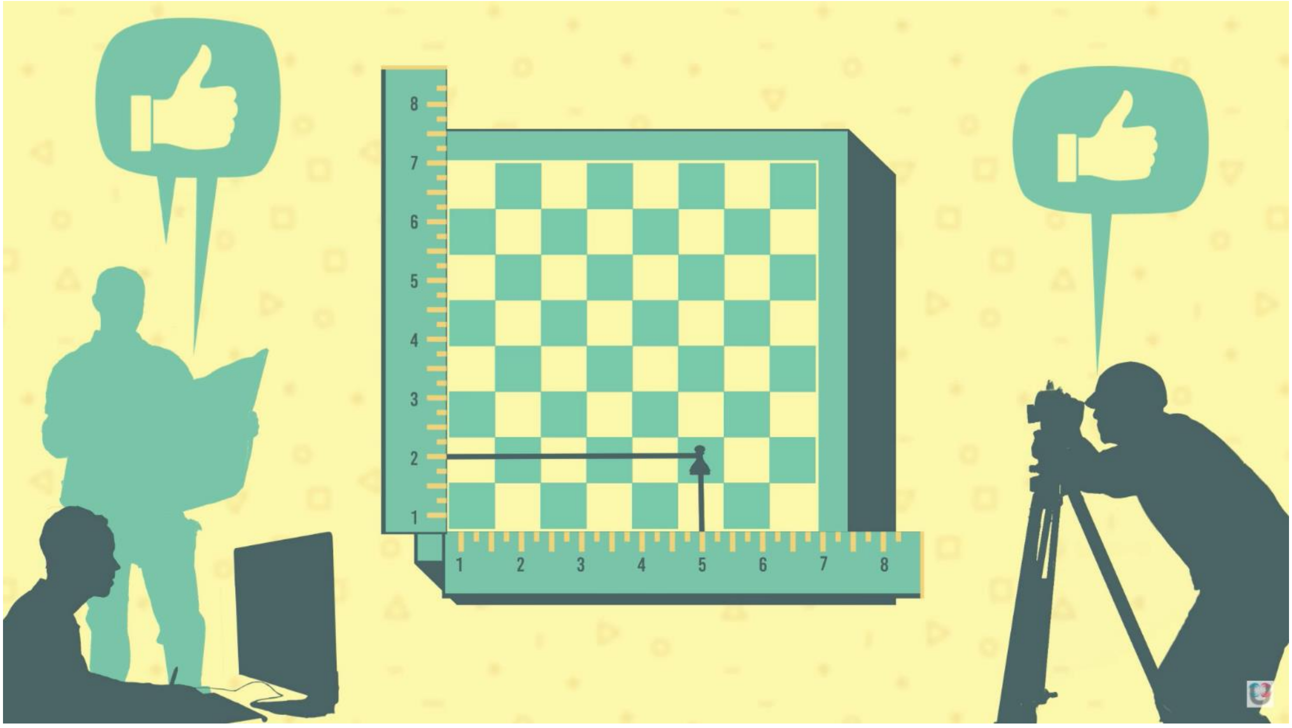
- **L'extraordinaire aventure du chiffre 1** *Terry Jones*
- **Le mystère des nombres premiers** *Marcus du Sautoy*

SITES INTERNET

- **www.images.maths.cnrs.fr**
- **www.micmaths.com**
- **www.villemin.gerard.free.fr**
- **www.therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr**
- **www.dimensions-math.org**

Le Cours

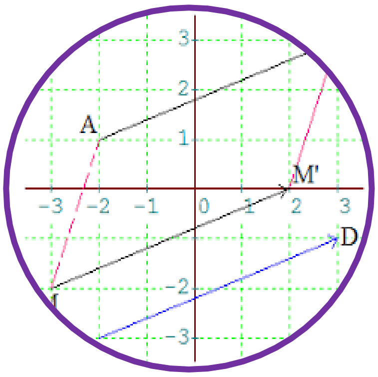
INTRODUCTION



Le vecteur, cette notion vue en troisième avec une flèche qui permet le déplacement d'un point à un autre…
Le vecteur, cette notion souvent confondue avec une longueur…
Enfin, le vecteur, cet outil que vous aurez à manipuler en physique qui va vous permettre de caractériser une force comme votre poids…

Il s'agit d'une version récente du développement des mathématiques. Les vecteurs sont apparus au début du 19ème siècle. Cette partie des mathématiques s'est même développée sous l'impulsion du travail des peintres de la renaissance italienne et de leur chef d'œuvre basés sur les projections en trois dimensions.

Les vecteurs sont des puissants outils mathématiques sur lesquels se sont penchés les plus grands scientifiques comme Chasles, Descartes mais aussi Newton, Kepler et Einstein…



Les vecteurs sont des outils puissants en géométrie. Vous verrez que des démonstrations complexes deviennent des jeux d'enfants quand on les utilise. Vous aurez également l'occasion de les rencontrer en physique, car on représente les forces par des vecteurs (même s'il y a une nuance entre vecteur mathématique et vecteur physique).

La notion de vecteur a été abordée au collège dans l'étude des translations. Ce chapitre pose les bases du calcul vectoriel avec la définition d'un vecteur, son approche calculatoire (addition, multiplication par un réel, relation de Chasles…) et la notion de colinéarité.

COMPÉTENCES VISÉES

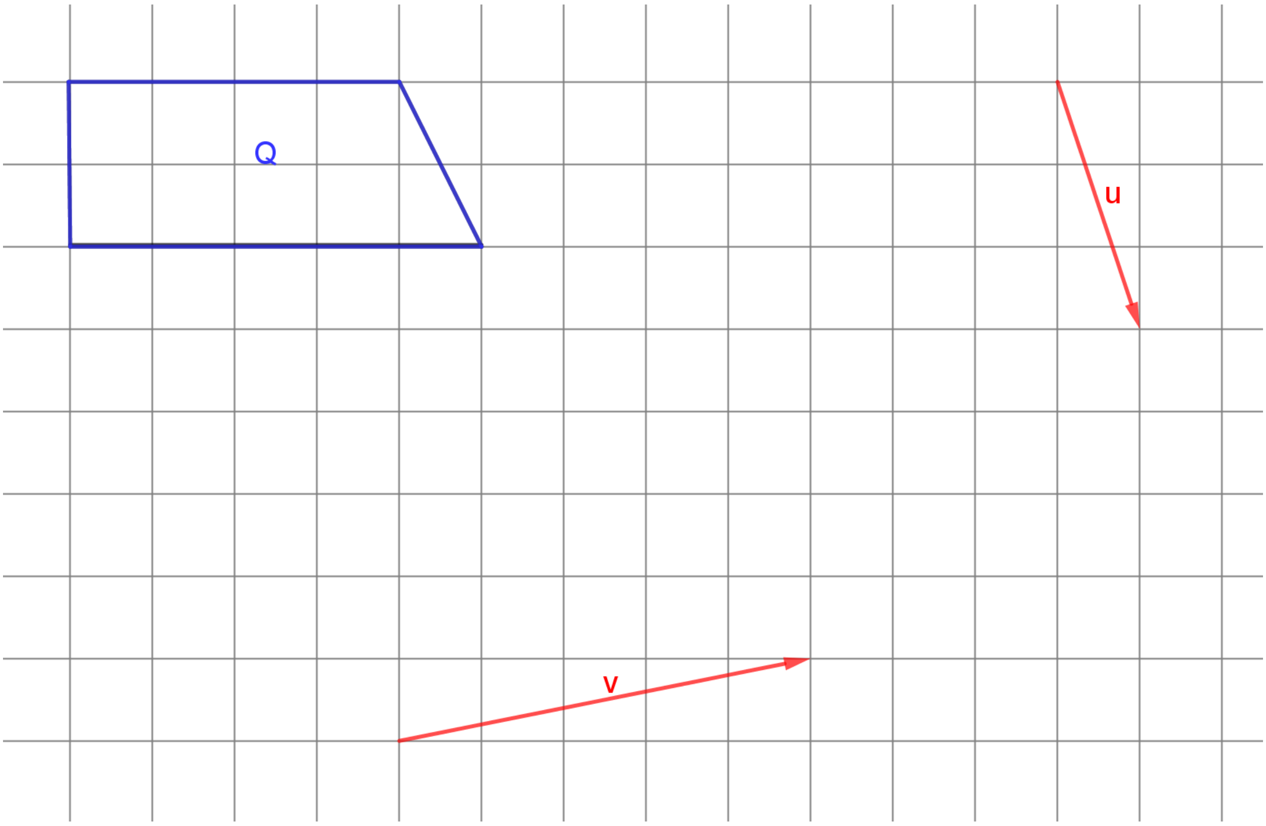
- Représenter géométriquement des vecteurs.
- Construire géométriquement la somme de deux vecteurs.
- Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.

ACTIVITÉ 1

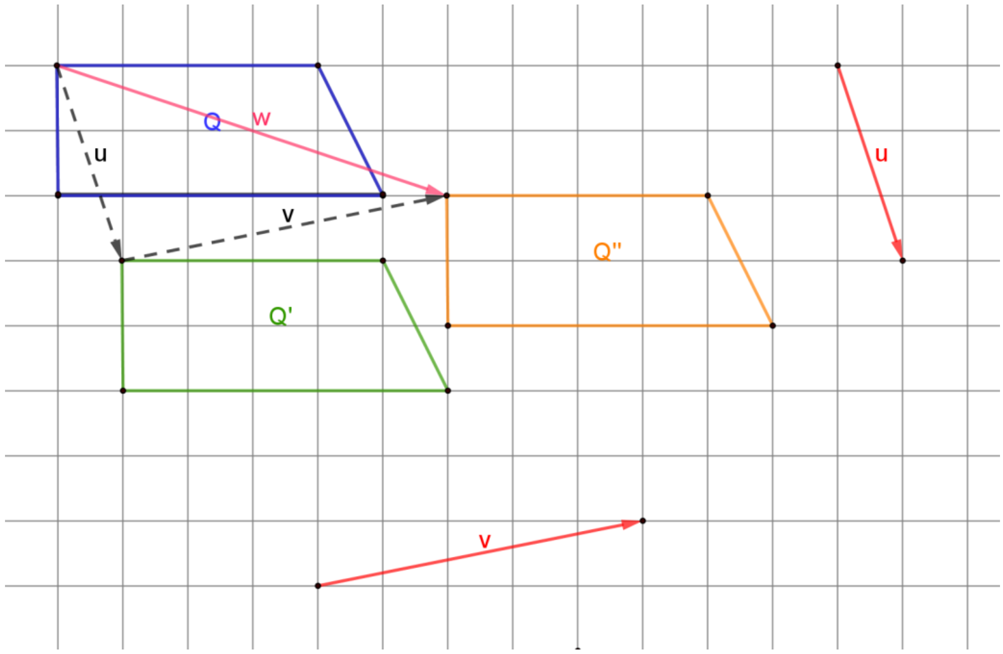
Représentez l'image Q' du quadrilatère Q par la translation de vecteur $\vec{u}$.
Représentez l'image Q'' du quadrilatère Q' par la translation de vecteur $\vec{v}$.
Représentez le vecteur $\vec{w}$ tel que Q'' est l'image de Q par la translation de vecteur $\vec{w}$.

$\vec{w}$ est la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$



CORRECTION DE L'ACTIVITÉ



01 VECTEURS DU PLAN

Notion de vecteur

L'ESSENTIEL

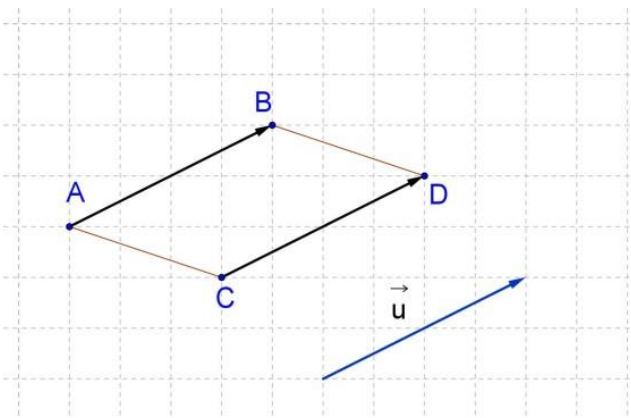
Soit A et B deux points distincts. La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$représentent alors un unique vecteur $\vec{u}$: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, si et seulement si ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati (attention à l'ordre des points !).

Exemple



La translation de vecteur $\vec{u}$ transforme A en B et C en D.

On a : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

ABDC est un parallélogramme.

L'ESSENTIEL

Le vecteur opposé de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est le vecteur $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$

Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul. Il se note : $\vec{0}$

L'ESSENTIEL

Soit un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ non nul :

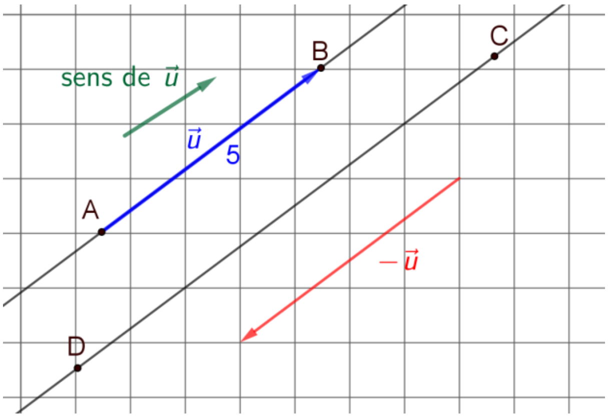
- La norme de $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ est la distance AB (ou la distance entre deux points quelconques représentant le vecteur).
- La direction de $\vec{u}$ est toute droite portant $\vec{u}$ donc par exemple la droite (AB).
- Le sens de $\overrightarrow{AB}$ est de A vers B.

Cas du vecteur nul :

- $\|\vec{0}\| = 0$

Le vecteur nul n'a ni direction, ni sens.

Exemple



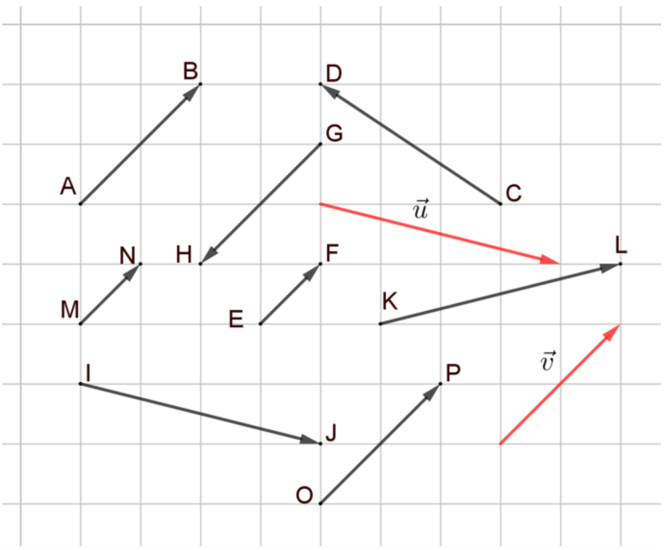
$\|\vec{u}\|$=AB=5

(AB) ou (CD) est la direction de $\vec{u}$.

$\vec{u}$ et $-\vec{u}$ sont de sens contraires.

À VOUS DE JOUER 1

Complétez



$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{\dots\dots}$

$\overrightarrow{AB}$ est un représentant de $\vec{\dots}$ et $\overrightarrow{IJ}$ est un représentant de $\vec{\dots}$.

La .... de $\vec{u}$ vaut IJ.

$\|\vec{v}\| = $ AB $= \dots\dots$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O\dots}$

ABPO est donc un ....

On a donc également : $\overrightarrow{O\dots} = \overrightarrow{\dots\dots}$. (On tracera les vecteurs.)

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont .... $\overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{\dots\dots} = -\vec{\dots}$

02 VECTEURS DU PLAN

Somme de vecteurs, relation de Chasles

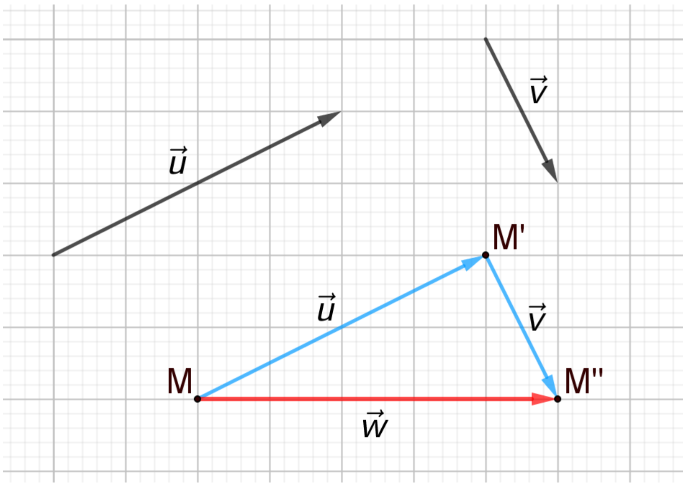
ADDITION DE VECTEURS

L'ESSENTIEL

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur qui s'écrit : $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

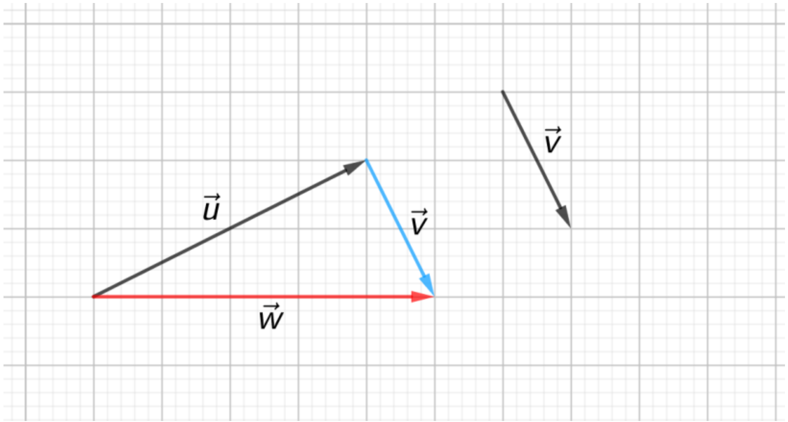
$\vec{w}$ correspond à la translation résultant de l'enchainement de la translation de vecteur $\vec{u}$ et de la translation de vecteur $\vec{v}$.
Par convention : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$:

Exemple

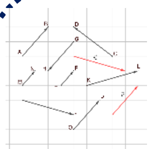


On fait subir à M les translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Cela revient à lui faire subir une unique translation de vecteur $\vec{w}$.

Comment construire la somme de 2 vecteurs ?
On part du premier vecteur, et on reporte le second à partir de la pointe du premier.



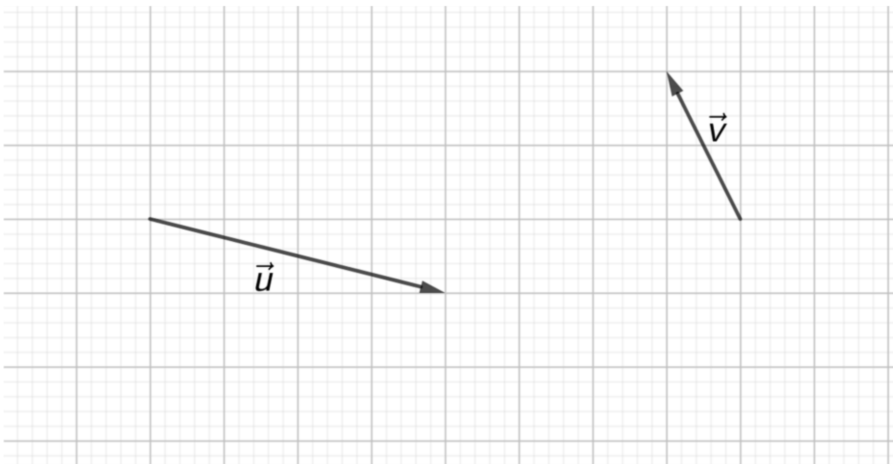
Remarque : savoir construire des sommes de vecteurs est utile en physique !



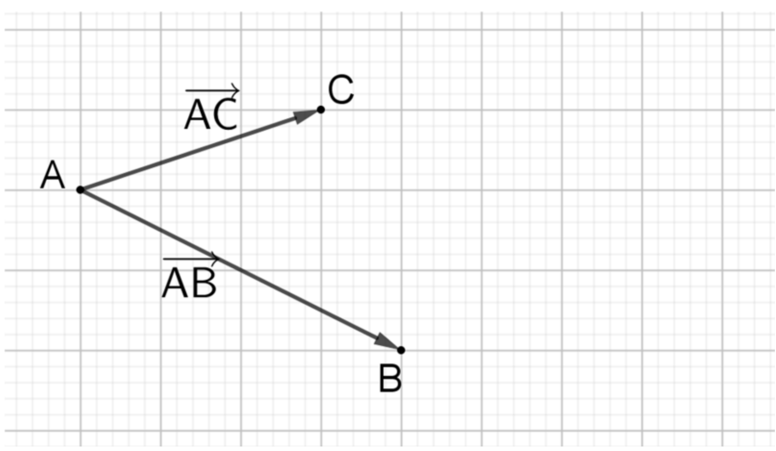
À VOUS DE JOUER 2

Complétez

1) Construisez $-\vec{v}$ puis $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{w}'=\vec{u}-\vec{v}$



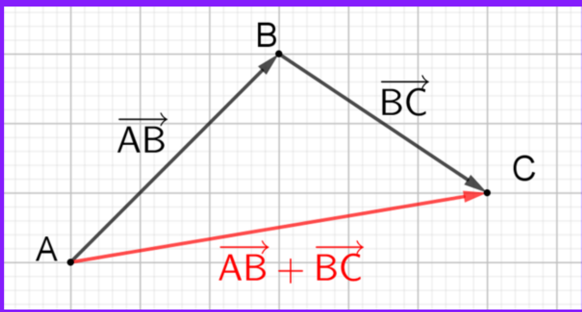
2) Complétez.
On veut construire le point D tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
On reporte le vecteur $\overrightarrow{AC}$ à partir du point …. .



L'ESSENTIEL

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ on obtient une relation appelée relation de Chasles :

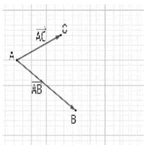
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Exemple

Simplifier l'écriture de $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$



À VOUS DE JOUER 3

Simplifiez l'écriture de $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{\dots\dots} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{\dots\dots} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\dots\dots} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\dots\dots}$

03

VECTEURS DU PLAN

Produit d'un vecteur par un réel

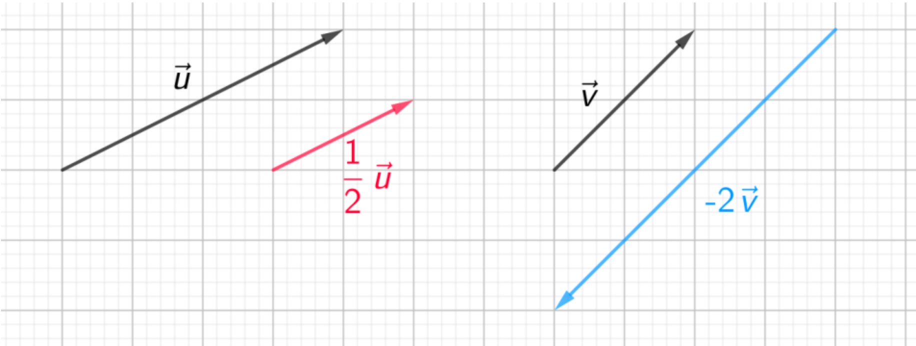
L'ESSENTIEL

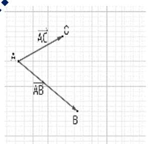
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul.
Le vecteur $k\vec{u}$ est alors le vecteur de caractéristiques :

- direction : la même que $\vec{u}$
- sens :
  - Si $k > 0$, le même sens que le sens de $\vec{u}$.
  - Si $k < 0$, le sens opposé au sens de $\vec{u}$.
- de norme $|k| \times \|\vec{u}\|$.

Si $k = 0$, pour tout vecteur $\vec{u}, k\vec{u} = \vec{0}$.
Si $\vec{u} = \vec{0}$, pour tout nombre k, $k\vec{u} = \vec{0}$.

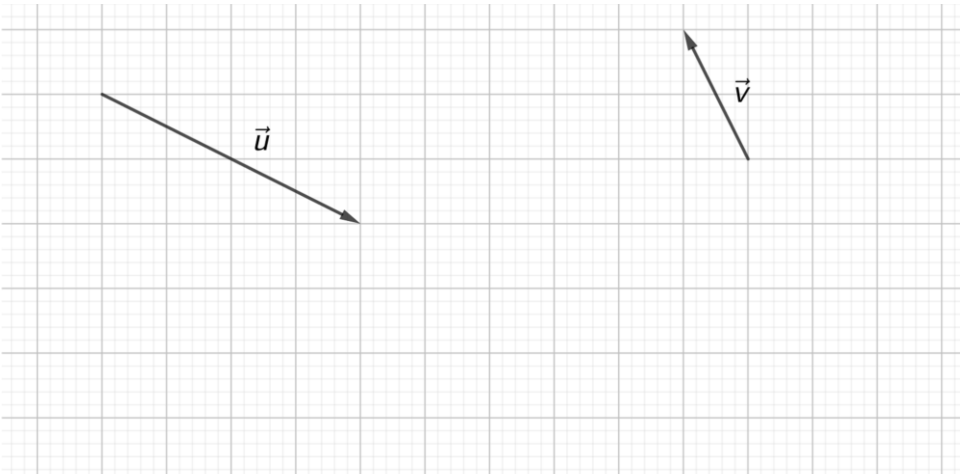
Exemple

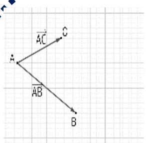




À VOUS DE JOUER 4

Construisez $\frac{3}{2}\vec{u}$ et $-2\vec{v}$





À VOUS DE JOUER 5

Cochez les bonnes réponses.

Remarque : on considère un point C tel que $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$

- Si $k > 0$, $C \in [AB)$
- Si $k < 0$, $C \notin [AB)$
- $0 \leq k \leq 1$, $C \in [AB]$

	$C \in [AB]$	$C \in [AB)$
$\overrightarrow{AC} = -3\,\overrightarrow{AB}$	☐	☐
$\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$	☐	☐
$\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$	☐	☐
$\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$	☐	☐

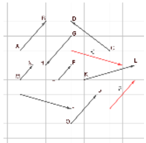
L'ESSENTIEL
Propriétés :

$$k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u}+k\vec{v}$$
$$(k+k')\vec{u} = k\vec{u}+k'\vec{u}$$

Ces règles s'apparentent à celles du calcul littéral, mais attention : on ne peut pas multiplier des vecteurs entre eux.

Exemple

$2(\vec{u}+\vec{v})=2\vec{u}+2\vec{v}$ $\quad 2(\vec{u}-\vec{v})=2\vec{u}-2\vec{v}$ $\quad 2\vec{u}-4\vec{u}=-2\vec{u}$ $\quad 2\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{u}=\frac{3}{2}\vec{u}$



À VOUS DE JOUER 6
Complétez

Développez : $3(\vec{u}-\vec{v})+5\vec{v} = \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots = \cdots\vec{u}+\cdots\vec{v}$

Factorisez : $3\vec{u}-12\vec{v} = \cdots(\vec{u}-\cdots\vec{v})$ $\quad \frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}=\frac{1}{2}(\dots\dots\dots\dots)$

04 VECTEURS DU PLAN
Colinéarité

L'ESSENTIEL
Deux vecteurs sont colinéaires si l'un est le produit de l'autre par un réel.

➢ **Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur :**

En effet, pour tout vecteur $\vec{u}$: $\vec{0}=0\times\vec{u}$

Exemple

Montrer que $\vec{u}=4\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

$4\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}$

$\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Application au parallélisme

L'ESSENTIEL
Propriété :

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Justification

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires alors les droites (AB) et (CD) ont la même direction. Elles sont donc parallèles.
Nous admettrons la réciproque.

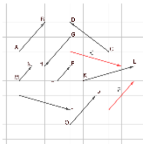
L'ESSENTIEL

Propriétés :

trois points distincts A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Justification

« A, B , C alignés » équivaut à « (AB) et (AC) confondues » donc parallèles. Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Réciproquement, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors (AB) et (AC) sont parallèles. Comme A appartient aux 2 droites, (AB) et (AC) sont confondues. A, B et C sont donc alignés.



À VOUS DE JOUER 7

Complétez

$\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{BC}$: On peut en déduire que les ……………………………………………………………………

$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BD}$: On peut en déduire que les ……………………………………………………………………

LE TEMPS DU BILAN

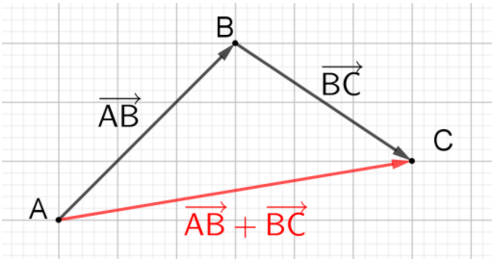
- Soit A et B deux points distincts.
  La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$
  Le vecteur opposé de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est le vecteur $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$
  Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul. Il se note : $\vec{0}$

- Soit un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ non nul .
  La norme de $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ est la distance AB (ou la distance entre deux points quelconques représentant le vecteur).
  La direction de $\vec{u}$ est toute droite portant $\vec{u}$ donc par exemple la droite (AB).
  Le sens de $\overrightarrow{AB}$ est de A vers B.

  $\|\vec{0}\| = 0$
  Le vecteur nul n'a ni direction, ni sens.

- Relation de Chasles

  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



- Propriétés :

  $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
  $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$

- Deux vecteurs sont colinéaires si l'un est le produit de l'autre par un réel.
  $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
  3 points distincts A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

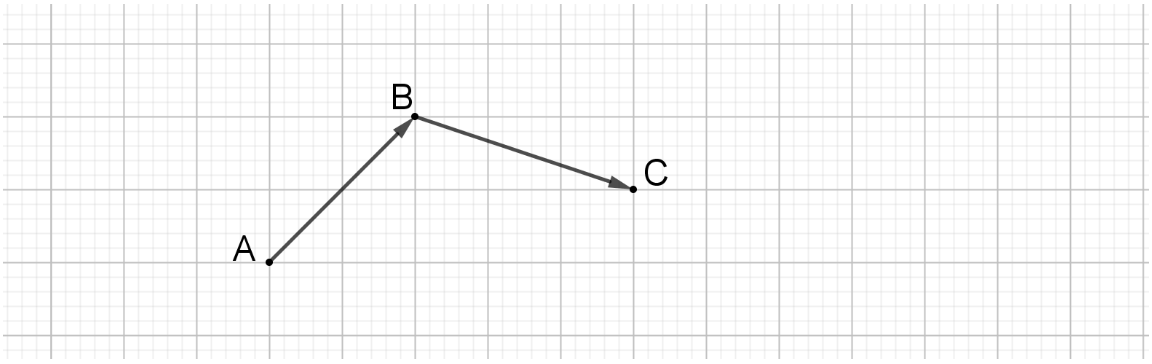
.

Abordons maintenant une série d'exercices, afin de vérifier vos connaissances.
Les exercices ont été classés dans un ordre d'approfondissement croissant.
Les réponses aux exercices se trouvent en fin de manuel.

EXERCICE 01

Construisez $\vec{u}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$

Que constatez-vous ? Pouvait-on s'attendre à ce résultat ?



EXERCICE 02

Tracez un triangle ABC.

Construisez E tel que $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BA}$.

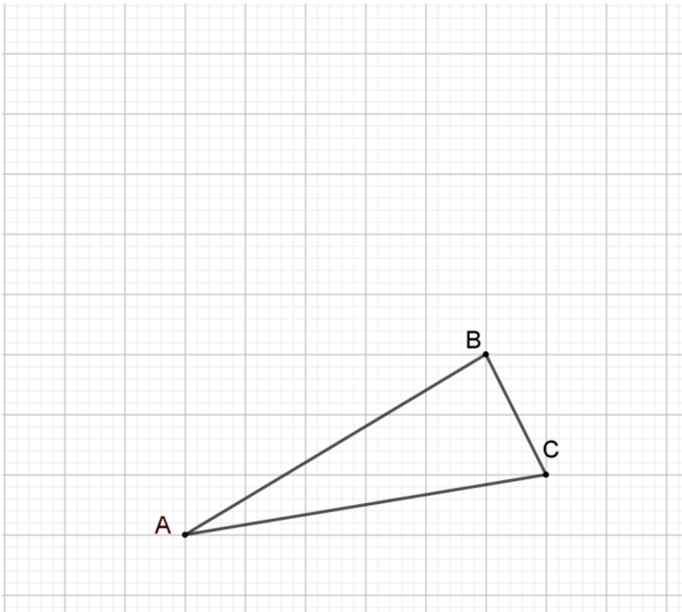
Construisez F tel que $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{BC}$.

Montrez que AEBF est un parallélogramme.

EXERCICE 03

ABC est un triangle.

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{CB}$



1) Placez I, J et K la figure.

2) Montrez que IJK sont alignés
   Indication : on pourra exprimer $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

EXERCICE 04

Soient 4 points A, B, C et D tels que : $5\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{AD}$

1) Montrez que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2) Quelle est la nature de ABDC ?

EXERCICE 05

Soit ABC un triangle et M un point intérieur du triangle.
On définit les points D, E et F par $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CA}$ $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}$

1) Montrez que la position de D, E, F est indépendante du point M choisi.

2) Faites une figure.

3) Construisez $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}$ et $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$. Que peut-on remarquer ? Le prouver.

EXERCICES

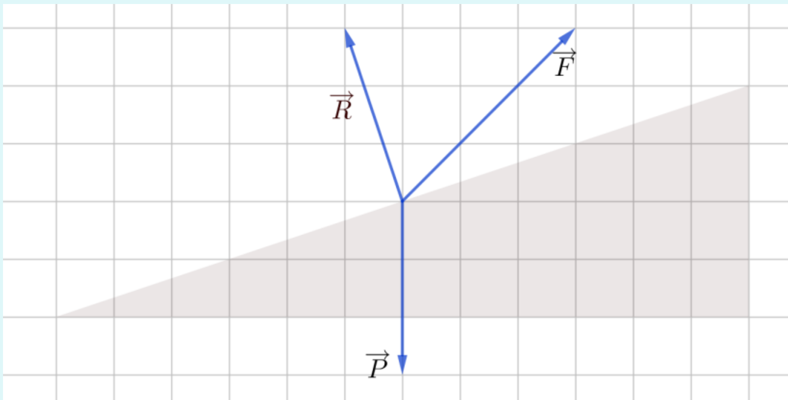
GÉNÉRALITÉS SUR LES VECTEURS

Les vecteurs sont utilisés en mathématiques, mais également en physique.
En mathématiques, ils seront utilisés souvent dans le cadre de géométrie repérée (voir chapitre suivant), pour des démonstrations. En première, ils seront revus avec le produit scalaire.
Ils seront ensuite généralisés à la dimension 3 (vecteurs dans l'espace), voire en supérieur à une dimension quelconque. Mais les règles de calcul ne changent pas. Il est donc important de les assimiler dès maintenant.
En physique, ils apparaissent pour modéliser des forces, des champs vectoriels, des vecteurs vitesses où accélération, même s'ils ont un sens un peu différent. Vous pourrez être amenés par exemple à construire la force résultante de plusieurs forces.

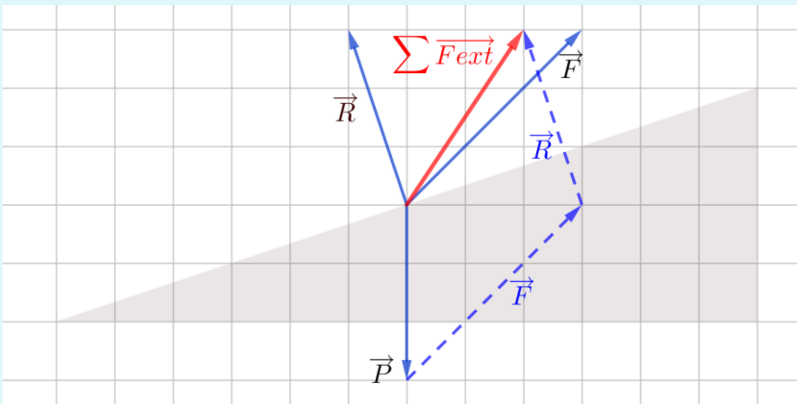
Compétences :
-construction d'un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs ;
-utilisation de la relation de Chasles ;
-utilisation de la relation entre colinéarité de vecteurs et parallélisme de droites ou alignement de points.

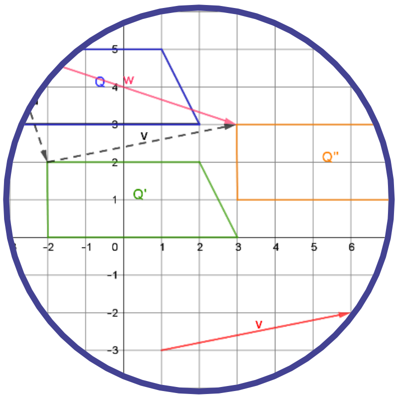
Exemple issu de la physique

Un solide sur un plan incliné est soumis à 3 forces : son poids $\vec{P}$, la réaction du support $\vec{R}$, une force $\vec{F}$.
Déterminer la force résultante : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$



Une question classique : on part d'un des vecteurs, puis on reporte successivement les 2 autres.





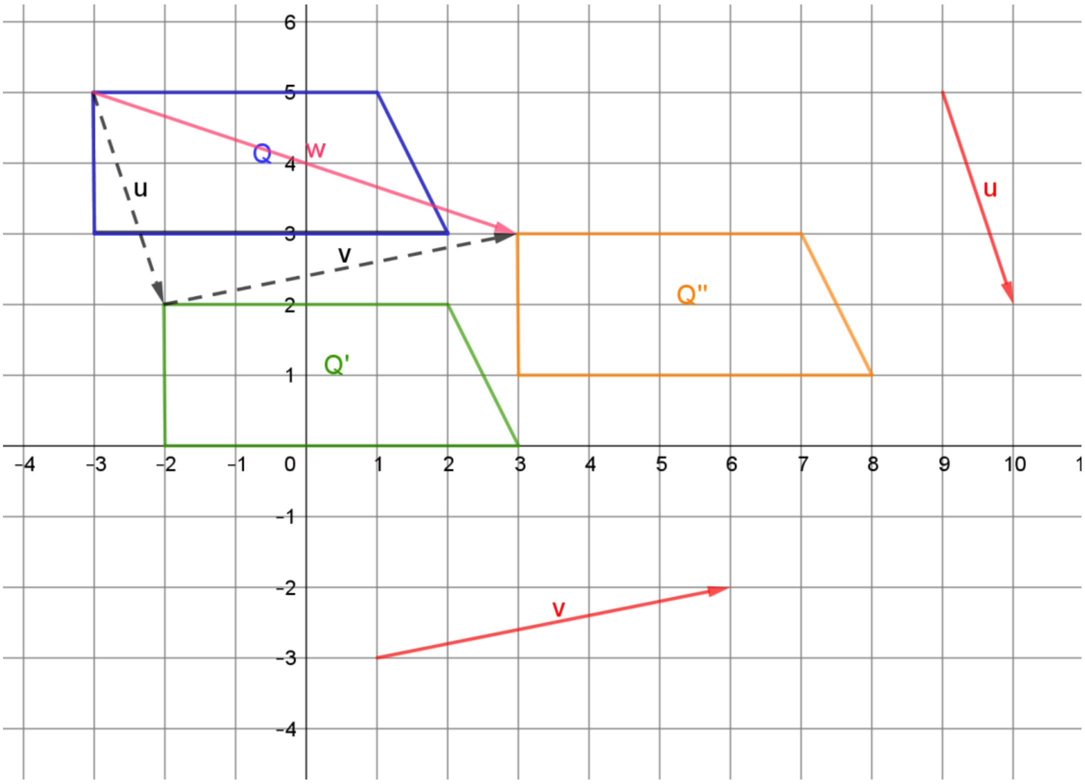
Le chapitre précédent a introduit les vecteurs. Nous allons maintenant utiliser des repères : les coordonnées des points dans un repère sont déjà connues. La nouveauté viendra de l'utilisation des coordonnées des vecteurs.

Certains problèmes se résolvent parfois plus rapidement en utilisant des coordonnées. Par ailleurs, cela permet de calculer certaines grandeurs comme la distance entre 2 points, ou d'avoir des moyens performants de tester la colinéarité avec le déterminant.

COMPÉTENCES VISÉES

- Représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées. Lire les coordonnées d'un vecteur.
- Calculer la distance entre deux points.
- Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.

Première approche
Déterminer des coordonnées



Les coordonnées du vecteurs $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Cela signifie qu'on se déplace de +1 sur l'axe des abscisses et de -3 sur l'axe des ordonnées.

1) Déterminez les coordonnées de $\vec{v}$: $\vec{v}\begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$

2) Déterminez les coordonnées de $\vec{w}$: $\vec{w}\begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$

3) Quelles sont les relations entre les coordonnées de $\vec{w}$ et les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

....

....

....

....

....

....

SOLUTIONS

Coordonnées de $\vec{v}$: $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

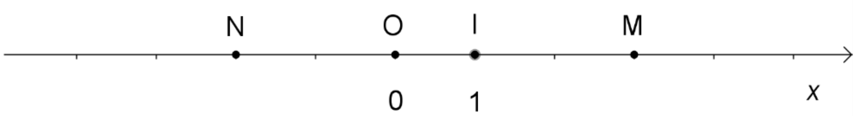
1) Coordonnées de $\vec{w}$: $\vec{w}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$

2) $6=5+1$ et $-2=-3+1$
La première coordonnée de $\vec{w}$ est la somme des premières coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
La seconde coordonnée de $\vec{w}$ est la somme des secondes coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

01 REPÈRES DU PLAN ET COORDONNÉES

Repères et coordonnées des points dans le plan

Rappel sur la droite des réels : sur une droite munie d'un repère (O,I), avec OI=1, tout point M peut être repéré par un nombre (réel) appelé **abscisse** de M.



Exemples
M a pour abscisse 3 et N a pour abscisse −2.

L'ESSENTIEL

Dans le plan, trois points O,I,J non alignés déterminent un repère du plan noté (O,I,J).

- Le point O est l'origine du repère.
- L'axe des abscisses est la droite graduée munie du repère (O,I). OI est donc l'unité de longueur sur l'axe des abscisses.
- L'axe des ordonnées est la droite graduée munie du repère (O,J).
  - Le repère est orthogonal si (OI)⊥ (OJ).
  - Le repère est normé si OI= OJ=1.
  - Un repère est orthonormé si il est orthogonal et normé : (OI)⊥ (OJ) et OI= OJ=1.

- En géométrie, on utilise généralement des repères orthonormés. **C'est obligatoire dans le cas de calculs de distances (voir ci-dessous)**. Mais on peut utiliser d'autres repères.
  Dans le cas de courbes (études de fonctions), on utilise des repères généralement orthogonaux ((OI)⊥ (OJ)), mais pas forcément normés.

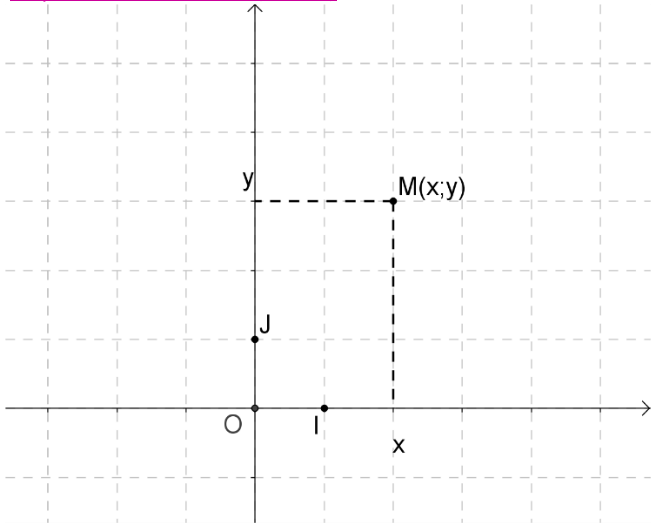
L'ESSENTIEL

Dans un repère (O,I,J), tout point M du plan est repéré par un couple unique de réels $(x; y)$.

- $(x; y)$ sont les coordonnées de M dans ce repère
- x est l'abscisse de M, y est l'ordonnée de M.

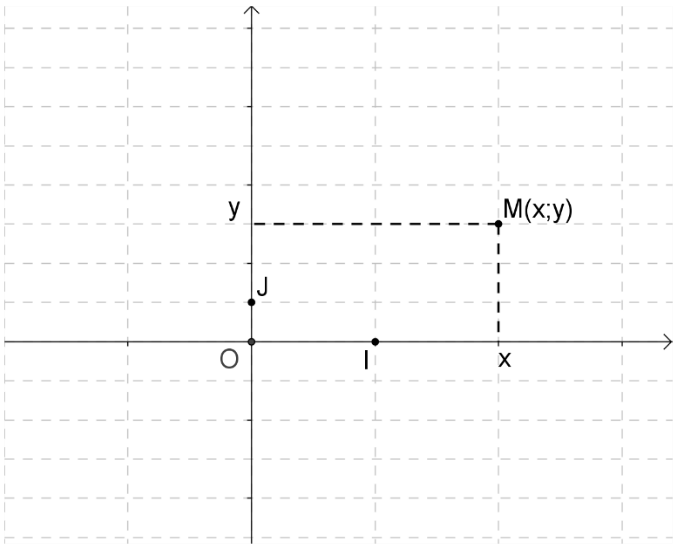
- **Remarque importante :** dans un repère (O, I, J) :
  - ✓ **O a pour coordonnées : O (0,0)**
  - ✓ **I a pour coordonnées : I (1,0)**
  - ✓ **J a pour coordonnées : J (0,1)**

✓ Repère orthonormé (O, I, J)



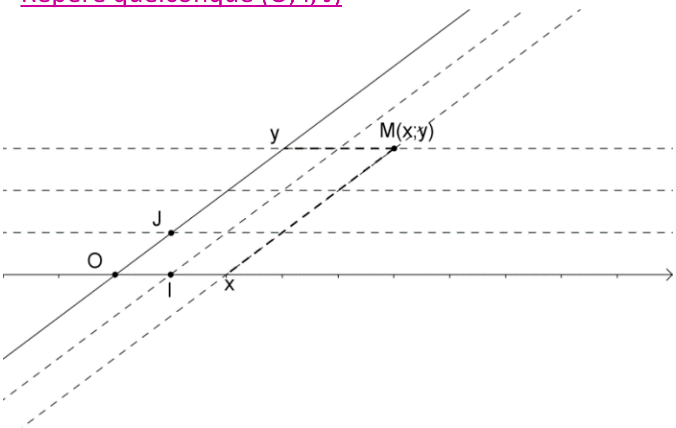
Dans cet exemple :
M a pour coordonnées (2;3)

✓ Repère orthogonal (O, I, J)



Dans cet exemple :
M a pour coordonnées (2;3)

✓ Repère quelconque (O, I, J)



Dans cet exemple :
M a pour coordonnées (2;3)

➢ Il arrive fréquemment qu'on ne mette pas les points I et J d'un repère, mais qu'on note simplement l'unité 1 sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées (comme on le fait sur les droites graduées).

Coordonnées d'un vecteur

BASE DE PLAN

L'ESSENTIEL

Soit (O,I,J) un repère du plan.
On pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$
$(\vec{i}, \vec{j})$ définit alors une base du plan.
Le repère (O,I,J) se note également $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

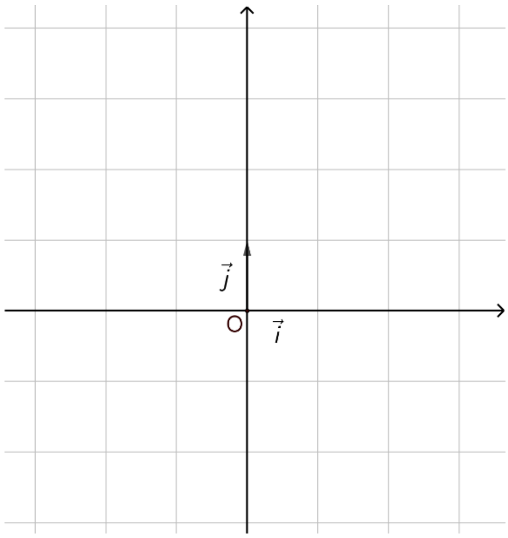
- Attention à ne pas confondre base et repère.

L'ESSENTIEL

Un couple de vecteurs $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée si :

- les directions de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires ;
- et si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

Exemple



Repère orthonormé

- Le repère (O, I, J) est orthonormé si $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est une base orthonormée.

BASE DE PLAN

L'ESSENTIEL

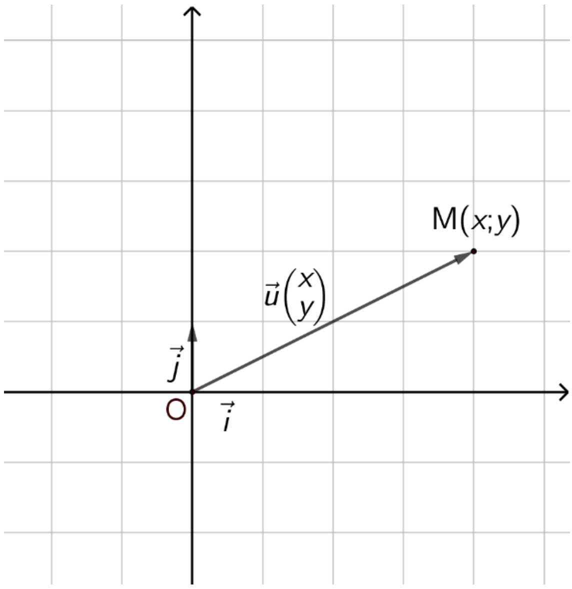
Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont les coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que :

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM}$$

- Pour distinguer les coordonnées des vecteurs de celles des points, on utilisera généralement pour un vecteur une notation verticale de ses coordonnées.

$$point : M(x; y) \qquad vecteur : \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ alors } \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$



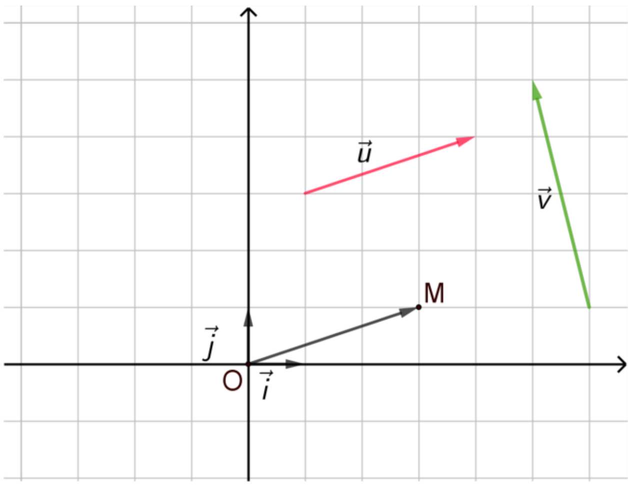
Remarque

Les coordonnées d'un <u>vecteur</u> ne dépendent pas du point O. Elles sont les mêmes dans les repères $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $(O', \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

En revanche, les coordonnées d'un <u>point</u> dépendent de l'origine du repère : elles sont différentes dans les repères $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $(O', \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

À VOUS DE JOUER 8

Complétez



M a pour coordonnées M(......;......).

$\vec{u} = \overrightarrow{......}$ donc $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} ...... \\ ...... \end{pmatrix}$.

$\vec{u} = ...\vec{i} + ...\vec{j}$

Construire M' tel que : $\vec{v} = \overrightarrow{OM'}$.

M' a pour coordonnées M'(......;......).

$\vec{v} = \overrightarrow{......}$ donc $\vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{v}\begin{pmatrix} ...... \\ ...... \end{pmatrix}$.

L'ESSENTIEL

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ **et** $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ **sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées :** $x = x'$ et $y = y'$

03 REPÈRES DU PLAN ET COORDONNÉES

Opérations sur les vecteurs

On considère que les coordonnées sont données dans la base $(\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

SOMME DE VECTEURS

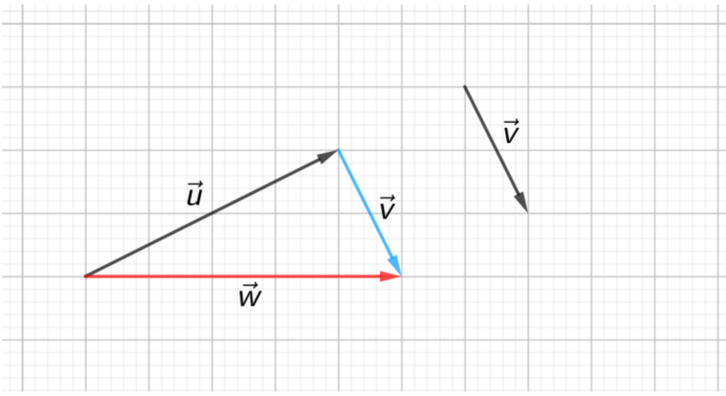
L'ESSENTIEL

Coordonnées de la somme de deux vecteurs :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ **et** $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ **alors** $\vec{u}+\vec{v}\ \begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$

Exemple

$\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{w}=\vec{u}+\vec{v} \quad \begin{pmatrix}4+1\\2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ donc $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$



Remarque : dans ce repère on n'a pas fait figurer l'origine. Le côté d'un carreau vaut 1.

À VOUS DE JOUER 9

Complétez

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

$\vec{w}=\vec{u}+\vec{v} \quad \vec{w}\begin{pmatrix}\ldots+\ldots\\\ldots+\ldots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ldots\\\ldots\end{pmatrix}$ donc $\vec{w}\begin{pmatrix}\ldots\\\ldots\end{pmatrix}$

$\vec{z}=\vec{u}-\vec{v} \quad \vec{z}\begin{pmatrix}\ldots-\ldots\\\ldots-\ldots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ldots\\\ldots\end{pmatrix}$ donc $\vec{z}\begin{pmatrix}\ldots\\\ldots\end{pmatrix}$

L'ESSENTIEL

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur et k un réel.

Le vecteur $k\vec{u}$ est alors le vecteur de coordonnées : $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Exemple

Soit $\vec{u}=\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$; déterminer les coordonnées de $\vec{v}=2\vec{u}$ et $\vec{w}=-\frac{1}{2}\vec{u}$.

$\vec{v}\begin{pmatrix} 2\times 2 \\ 2\times(-4) \end{pmatrix}$ soit $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{w}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\times 2 \\ -\frac{1}{2}\times(-4) \end{pmatrix}$ soit $\vec{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

À VOUS DE JOUER 10

Complétez

Soit $\vec{u}=\begin{pmatrix} -5 \\ 20 \end{pmatrix}$; déterminer les coordonnées de $\vec{v}=-3\vec{u}$ et $\vec{w}=\frac{2}{5}\vec{u}$.

$\vec{v}\begin{pmatrix} -3\times\ldots\ldots \\ -3\times\ldots\ldots \end{pmatrix}$ soit $\vec{v}\begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$

$\vec{w}\begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$ soit $\vec{w}\begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$

04 REPÈRES DU PLAN ET COORDONNÉES

Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et calcul de la distance

On se place dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

COORDONNÉES D'UN VECTEUR $\overrightarrow{AB}$

L'ESSENTIEL

On considère deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

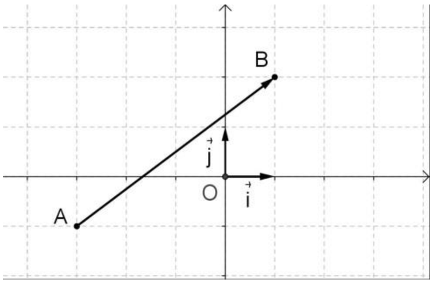
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ont pour expression :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Justification

$A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et $B(x_B; y_B)$



Exemple :

Les points A et B ont pour coordonnées :

$A(-3;-1)$ et $B(1;2)$

$x_B - x_A = 1-(-3)=4$

$y_B - y_A = 2-(-1)=3$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

À VOUS DE JOUER 11

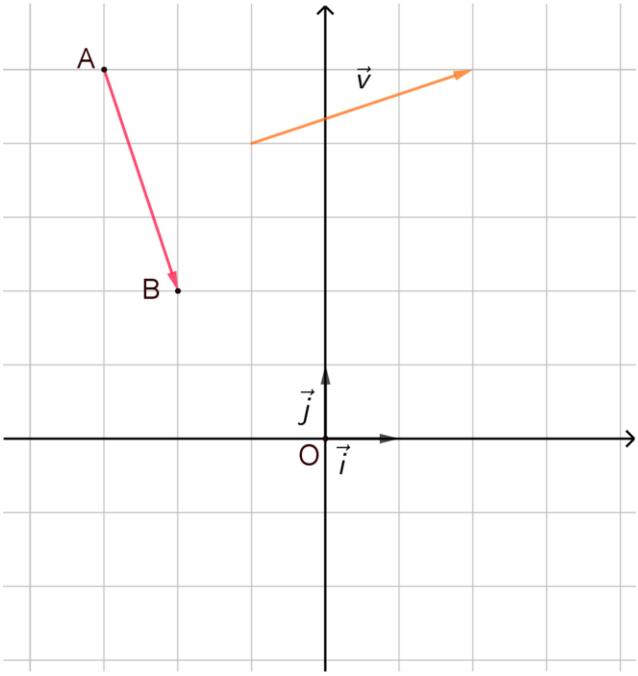
Complétez

On considère les points $A(3;2)$ $B(0;-2)$ $C(-1;4)$. Déterminer $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\ldots\ldots-\ldots\ldots\\\ldots\ldots-\ldots\ldots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ldots\ldots\\\ldots\ldots\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\ldots\ldots\ldots\ldots\\\ldots\ldots\ldots\ldots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ldots\ldots\\\ldots\ldots\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\ldots\ldots\ldots\ldots\\\ldots\ldots\ldots\ldots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ldots\ldots\\\ldots\ldots\end{pmatrix}$

À VOUS DE JOUER 12

Complétez



a)

A a pour coordonnées A(……;……); B a pour coordonnées B(……;……).

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\ldots\ldots-\ldots\ldots\\\ldots\ldots-\ldots\ldots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ldots\ldots\\\ldots\ldots\end{pmatrix}$.

b) Placez les points $C(2;3)$ et $D(-3;-1)$.

$\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}\ldots\ldots-\ldots\ldots\\\ldots\ldots-\ldots\ldots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ldots\ldots\\\ldots\ldots\end{pmatrix}$.

c) Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$; on veut placer E(x;y) tel que $\overrightarrow{BE}=\vec{v}$.

Pour construire E, on détermine l'image de B par la ……………………………. de vecteur $\vec{v}$.
On veut déterminer les coordonnées de E par le calcul.

$\overrightarrow{BE}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}x-\ldots\ldots\\y-\ldots\ldots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ldots\ldots\ldots\ldots\\\ldots\ldots\ldots\ldots\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BE}=\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\ldots\ldots\ldots\ldots\\\ldots\ldots\ldots\ldots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\ldots\ldots\\y=\ldots\ldots\end{cases}$ donc E(……;……)

NORME D'UN VECTEUR ET DISTANCE ENTRE 2 POINTS

On se place dans un repère orthonormé

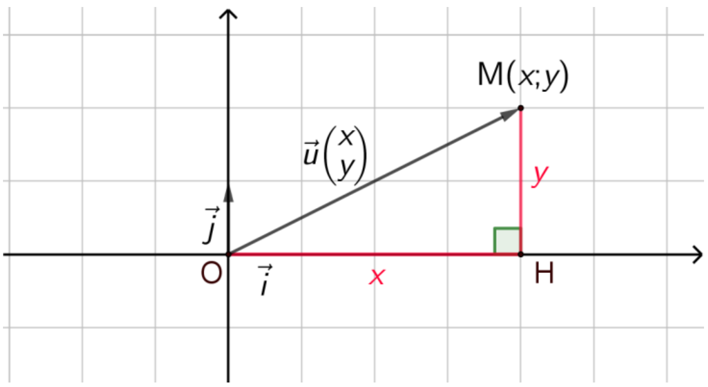
L'ESSENTIEL

Soit un vecteur de coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans une base orthonormée.

La norme de $\vec{u}$ vaut : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

➢ **Cette propriété n'est valable que dans une base orthonormée.**

Justification



Le repère étant orthonormé, OMH est un triangle rectangle en H. Donc

$OM^2=OH^2+HM^2=x^2+y^2$

$\|\vec{u}\|=OM=\sqrt{x^2+y^2}$

Exemple

$\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ $\quad\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ $\|\vec{v}\|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

Remarque : on peut utiliser $\|k\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$ pour simplifier certains calculs.

Exemple

$\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ $\quad\vec{u}=2\vec{v}$ avec $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

donc $\|\vec{u}\|=2\|\vec{v}\|=2\sqrt{2^2+1^2}=2\sqrt{5}$

À VOUS DE JOUER 13

Complétez

$\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ $\|\vec{u}\| = \sqrt{\ldots\ldots^2 + \ldots\ldots^2} = \sqrt{\ldots\ldots}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-8\\8\end{pmatrix}$ $\vec{u} = \ldots\ldots\vec{v}$ avec $\vec{v}\begin{pmatrix}\ldots\ldots\\1\end{pmatrix}$ $\|\vec{u}\| = \ldots\ \|\vec{v}\| = \ldots\ \sqrt{\ldots\ldots^2 + 1^2} = \ldots\ldots\ldots$

L'ESSENTIEL

Conséquence :

La distance AB a pour expression : $\mathrm{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Justification : $\mathbf{AB} = \|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Remarque : c'est une expression fondamentale, qui peut être utilisée directement (sans vecteur) dès qu'on a un repère orthonormé.

Exemple

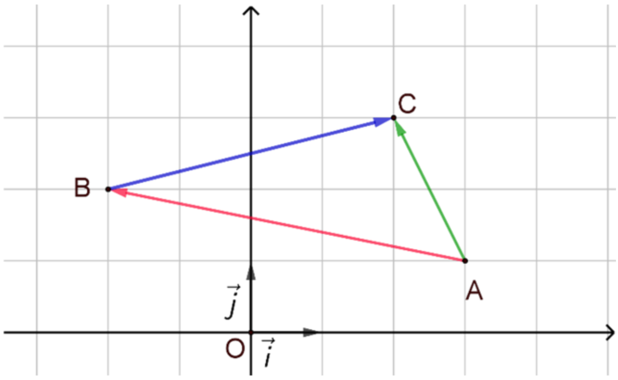
Les points A et B ont pour coordonnées : $A(-3;-1)$ et $B(1;2)$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

$AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

À VOUS DE JOUER 14

Complétez

1. A(3;7) B(6;11) $AB = \sqrt{(\ldots - \ldots)^2 + (\ldots - \ldots)^2} = \sqrt{\ldots^2 + \ldots^2} = \sqrt{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$



2.

A a pour coordonnées A(……;……);

B a pour coordonnées B(……;……);

C a pour coordonnées C(……;……);.

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\ldots\ldots - \ldots\ldots\\\ldots\ldots - \ldots\ldots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\ldots\ldots\\\ldots\ldots\end{pmatrix}$ et $AB = \sqrt{\ldots\ldots^2 + \ldots\ldots^2} = \sqrt{\ldots\ldots}$

$\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}\ldots\ldots - \ldots\ldots\\\ldots\ldots - \ldots\ldots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\ldots\ldots\\\ldots\ldots\end{pmatrix}$ et $BC = \sqrt{\ldots\ldots^2 + \ldots\ldots^2} = \sqrt{\ldots\ldots}$

$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\ldots\ldots - \ldots\ldots\\\ldots\ldots - \ldots\ldots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\ldots\ldots\\\ldots\ldots\end{pmatrix}$ et $AC = \sqrt{\ldots\ldots^2 + \ldots\ldots^2} = \sqrt{\ldots\ldots}$

REPÈRES DU PLAN ET COORDONNÉES

05

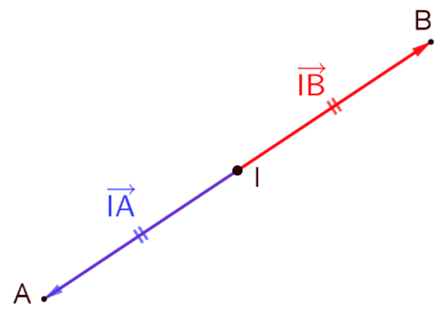
Milieu d'un segment

L'ESSENTIEL

On considère un segment [AB].

I est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

<u>Autre formulation</u> : I est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



Justification :

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AI}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

L'ESSENTIEL

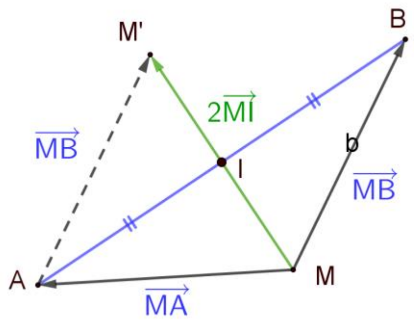
Propriété : on considère un segment [AB] et I son milieu. Pour tout point M, on a

$$\boldsymbol{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}}$$

Justification :

Comme I est le milieu de [AB] on a : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = 2\,\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 2\,\overrightarrow{MI}$$



Géométriquement, AMBM' est un parallélogramme
donc I milieu de [AB] est également milieu de [MM']

L'ESSENTIEL

Dans un repère donné, on considère deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $(x_I; y_I)$ avec :

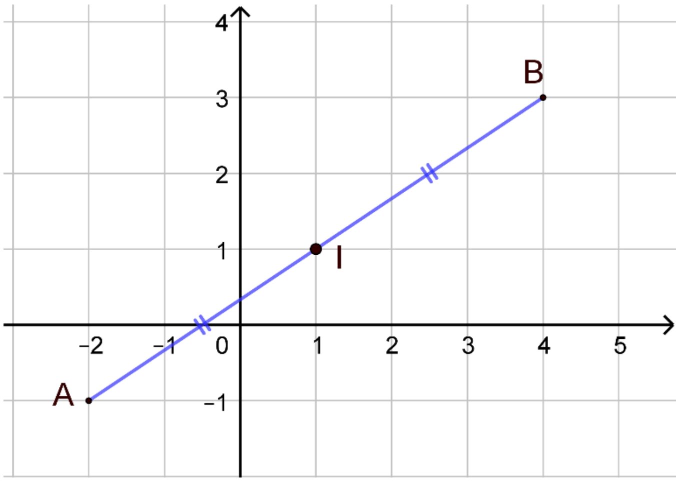
$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad et \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Justification :

On applique $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ au point O.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$ soit $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

On en déduit la relation sur les coordonnées.



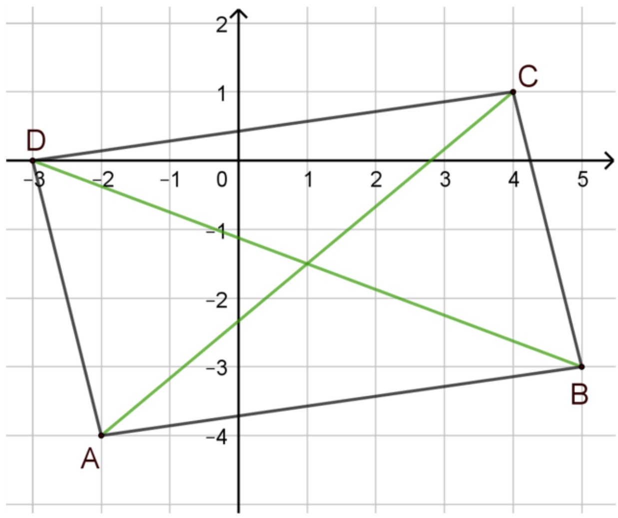
Exemple

Les points A et B ont pour coordonnées : $A(-2;-1)$ et $B(4;3)$

Le milieu I de [AB] a pour coordonnées $I\left(\frac{-2+4}{2};\frac{-1+3}{2}\right)$ soit I (1;1)

À VOUS DE JOUER 15

Complétez



a) A (... ... ;... ...) B (... ... ;... ...) C (... ... ;... ...) D (... ... ;... ...)

b)

Le milieu de $[AC]$ a pour coordonnées $\left(\frac{\dots\dots\dots\dots}{2};\frac{\dots\dots\dots\dots}{2}\right)$ soit $(\dots;\dots)$.

Le milieu de $[BD]$ a pour coordonnées $\left(\frac{\dots\dots\dots\dots}{2};\frac{\dots\dots\dots\dots}{2}\right)$ soit $(\dots;\dots)$.

[AC] et [BD} ont donc le ....

On peut en déduire que ABCD est un ....

c) On va montrer d'une autre manière que ABCD est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\dots\dots-\dots\dots\\\dots\dots-\dots\dots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dots\dots\\\dots\dots\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{DC}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}\dots\dots-\dots\dots\\\dots\dots-\dots\dots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dots\dots\\\dots\dots\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}$ ...... $\overrightarrow{DC}$ donc ABCD est ....

06 REPÈRES DU PLAN ET COORDONNÉES

Déterminant de 2 vecteurs

L'ESSENTIEL

Soit 2 vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

Le déterminant $\det(\vec{u},\vec{v})$ vaut : $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix} = xy' - yx'$

Propriétés du déterminant :

$\det(\vec{v},\vec{u})=-\det(\vec{u},\vec{v})$

$\det(\vec{u},\vec{u})=0$

$\det(\vec{u},\vec{0})=0$

Exemple: $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ $\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}-6 & 3\\-4 & 5\end{vmatrix}=-6\times5-3\times(-4)=-30+12=18$

L'ESSENTIEL

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$

Démonstration :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs colinéaires. On suppose qu'il existe k tel que : $\vec{u}=k\vec{v}$

On a donc : $x=kx'$ et $y=ky'$

Les coordonnées sont proportionnelles.

Leur produit en croix est donc nul. $xy'=yx'$ soit : $xy'-yx'=0$

Démonstration :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs tels que : $xy' - yx' = 0$

Si les deux vecteurs sont nuls, ils sont colinéaires.

On suppose que $\vec{v}$ n'est pas nul. L'une de ses coordonnées n'est pas nulle, par exemple x'.

On pose $k = \dfrac{x}{x'}$. On a donc : $x = kx'$.

$xy' - yx' = 0$ s'écrit : $y = \dfrac{xy'}{x'} = ky'$

On en déduit que $\vec{u} = k\vec{v}$. Donc les vecteurs sont colinéaires.

Exemple :

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 3\times(-4) - 2\times(-6) = -12 + 12 = 0$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 3\times(-5) - 2\times(-6) = -15 + 12 = 3$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Remarque : il n'est pas toujours nécessaire d'utiliser le déterminant pour montrer que des vecteurs sont colinéaires.

Dans l'exemple précédent $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car on peut remarquer que : $\vec{v} = -2\vec{u}$

À VOUS DE JOUER 16

Complétez

$\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots\dots$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ .... colinéaires.

$\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}$ $\det(\vec{u},\vec{v}) == \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots\dots$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ .... colinéaires.

LE TEMPS DU BILAN

- **Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ sont les coordonnées du point M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que :**

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM}$$

Pour distinguer les coordonnées des vecteurs de celles des points, on utilisera généralement pour un vecteur une notation verticale de ses coordonnées.

$$point : \ M(x;y) \qquad vecteur : \ \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\text{Si } \vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \text{alors } \vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

- Coordonnées de la somme de deux vecteurs :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$

Le vecteur $k\vec{u}$ est alors le vecteur de coordonnées : $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

Soit un vecteur de coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ <u>dans une base orthonormée</u>.

La norme de $\vec{u}$ vaut : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

- On considère deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ont pour expression :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$$

<u>dans une repère orthonormé :</u>

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2}$$

On considère un segment [AB].

I est le milieu de si et seulement si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

<u>Autre formulation</u> : I est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

- Soit 2 vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

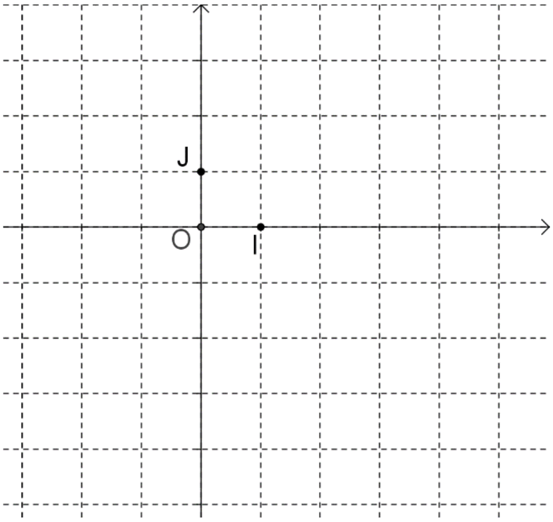
Le **déterminant** $\det(\vec{u},\vec{v})$ vaut : $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix} = xy' - yx'$

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ **et** $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$

Abordons maintenant une série d'exercices, afin de vérifier vos connaissances.
Les exercices ont été classés dans un ordre d'approfondissement croissant.
Les réponses aux exercices se trouvent en fin de manuel.

EXERCICE 06

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On considère les points $A(-2;0)$, $B(2;1)$ et $C(3;-3)$.



1) Placez les points A, B et C.
2) Calculez les coordonnées du milieu M de [AC]. Placez M.

----

3) On appelle D le point symétrique de B par rapport à M. Calculez les coordonnées de D. Placer D.

----

4) Démontrez que ABCD est un carré.

EXERCICE 07

ABCD est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{EG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{EF}$

On considère la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.

1) Déterminez les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG}$ dans cette base.

2) Déduisez que A, C et G sont alignés.

3) Pourquoi ne peut-on pas calculer AG à partir de $\overrightarrow{AG}$?

EXERCICE 08

Soient $\vec{z},\vec{t}$ deux vecteurs non colinéaires. On définit les vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ suivants :

$\vec{u}=\vec{z}+\sqrt{2}\,\vec{t}$ $\vec{v}=\sqrt{2}\,\vec{z}+2\vec{t}$ $\vec{w}=\vec{z}-\sqrt{2}\,\vec{t}$. Nous travaillerons dans la base $(\vec{z},\vec{t})$

1) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

2) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?

3) Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?

4) Déterminez *y* pour que $\vec{s}\begin{pmatrix}\sqrt{6}\\ y\end{pmatrix}$ soit colinéaire à $\vec{u}$.

EXERCICE 09

Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère les points : $A(2;-3)$, $B(8;1)$, $C(6;4)$.

1) Determinez les milieux et les longueurs des diagonales du quadrilatère OABC.

2) Déduisez la nature de OABC.

Vous pouvez maintenant faire et envoyer le devoir n°1