COURS PI

L'école sur-mesure

de la Maternelle au Bac, Établissement d'enseignement privé à distance, déclaré auprès du Rectorat de Paris

Terminale - Module 1 - Suites et fonctions réelles

Mathématiques

v.5.1

- **Guide de méthodologie** *pour appréhender notre pédagogie*
- **Leçons détaillées** *pour apprendre les notions en jeu*
- **Exemples et illustrations** *pour comprendre par soi-même*
- **Prolongement numérique** *pour être acteur et aller + loin*
- **Exercices d'application** *pour s'entraîner encore et encore*
- **Corrigés des exercices** *pour vérifier ses acquis*

www.cours-pi.com

Paris & Montpellier

EN ROUTE VERS LE BACCALAURÉAT

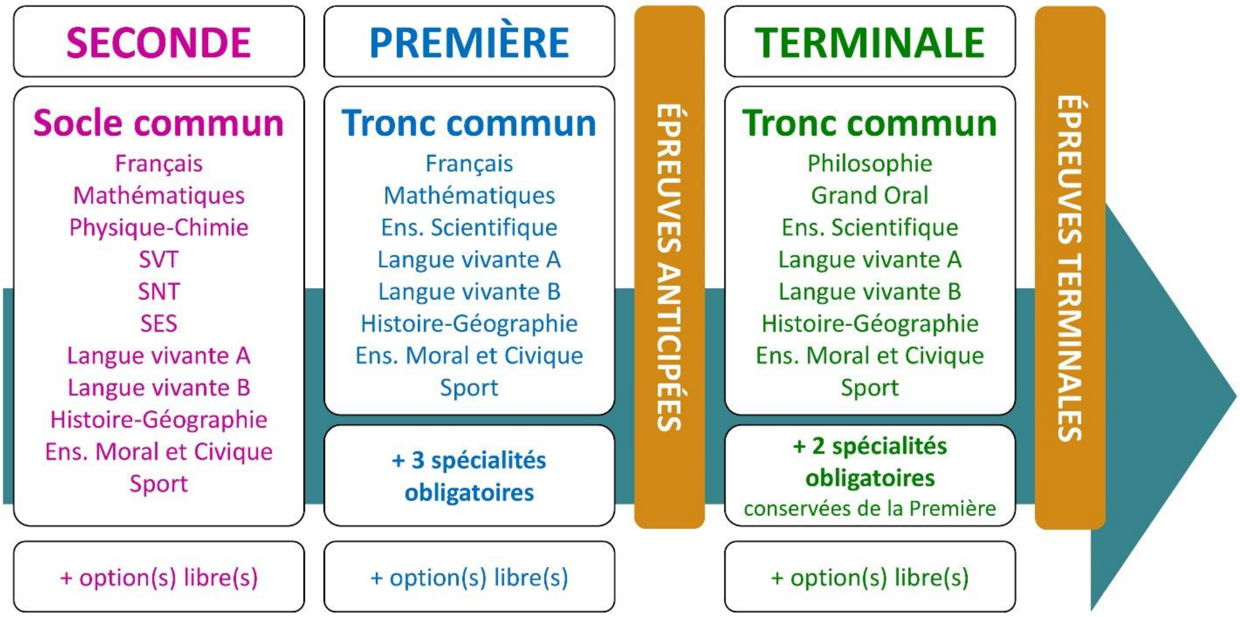
Comme vous le savez, **la réforme du Baccalauréat** est entrée en vigueur progressivement jusqu'à l'année 2021, date de délivrance des premiers diplômes de la nouvelle formule.

Dans le cadre de ce nouveau Baccalauréat, **notre Etablissement**, toujours attentif aux conséquences des réformes pour les élèves, s'est emparé de la question avec force **énergie** et **conviction** pendant plusieurs mois, animé par le souci constant de la réussite de nos lycéens dans leurs apprentissages d'une part, et par la **pérennité** de leur parcours d'autre part. Notre Etablissement a questionné la réforme, mobilisé l'ensemble de son atelier pédagogique, et déployé tout **son savoir-faire** afin de vous proposer un enseignement tourné continuellement vers l'**excellence**, ainsi qu'une scolarité tournée vers la **réussite**.

- Les **Cours Pi** s'engagent pour faire du parcours de chacun de ses élèves un **tremplin vers l'avenir**.
- Les **Cours Pi** s'engagent pour ne pas faire de ce nouveau Bac un diplôme au rabais.
- Les **Cours Pi** vous offrent **écoute** et **conseil** pour coconstruire une **scolarité sur-mesure**.

LE BAC DANS LES GRANDES LIGNES

Ce nouveau Lycée, c'est un enseignement à la carte organisé à partir d'un large tronc commun en classe de Seconde et évoluant vers un parcours des plus spécialisés année après année.



CE QUI A CHANGÉ

- Il n'y a plus de séries à proprement parler.
- Les élèves choisissent des spécialités : trois disciplines en classe de Première ; puis n'en conservent que deux en Terminale.
- Une nouvelle épreuve en fin de Terminale : le Grand Oral.
- Pour les lycéens en présentiel l'examen est un mix de contrôle continu et d'examen final laissant envisager un diplôme à plusieurs vitesses.
- Pour nos élèves, qui passeront les épreuves sur table, le Baccalauréat conserve sa valeur.

CE QUI N'A PAS CHANGÉ

- Le Bac reste un examen accessible aux candidats libres avec examen final.
- Le système actuel de mentions est maintenu.
- Les épreuves anticipées de français, écrit et oral, tout comme celle de spécialité abandonnée se dérouleront comme aujourd'hui en fin de Première.

A l’occasion de la réforme du Lycée, nos manuels ont été retravaillés dans notre atelier pédagogique pour un accompagnement optimal à la compréhension. Sur la base des programmes officiels, nous avons choisi de créer de nombreuses rubriques :

- **Suggestions de lecture** pour s’ouvrir à la découverte de livres de choix sur la matière ou le sujet
- **Réfléchissons ensemble** pour guider l'élève dans la réflexion
- **L’essentiel** pour souligner les points de cours à mémoriser au cours de l’année
- **À vous de jouer** pour mettre en pratique le raisonnement vu dans le cours et s’accaparer les ressorts de l’analyse, de la logique, de l’argumentation, et de la justification
- **Pour aller plus loin** pour visionner des sites ou des documentaires ludiques de qualité
- Et enfin ... la rubrique **Les Clés du Bac by Cours Pi** qui vise à vous donner, et ce dès la seconde, toutes les cartes pour réussir votre examen : notions essentielles, méthodologie pas à pas, exercices types et fiches étape de résolution !

MATHÉMATIQUES TERMINALE

Module 1 – Suites et fonctions réelles

L’AUTEUR

Jason LAPEYRONNIE
« N'abandonnez pas à la première page difficile. Explorez, découvrez, soyez curieux ! ».
Professeur agrégé de mathématiques et passionné de la discipline, il s'investit, en dehors de l'enseignement, dans la vulgarisation et la diffusion au grand public des mathématiques sur de nombreux supports (YouTube, blog, édition, membre du Café des sciences...).

PRÉSENTATION

Ce **cours** est divisé en chapitres, chacun comprenant :

- Le **cours**, conforme aux programmes de l’Education Nationale
- Des **exercices d’application et d’entraînement**
- Les **corrigés** de ces exercices
- Des **devoirs** soumis à correction (et ***se trouvant hors manuel***). Votre professeur vous renverra le corrigé-type de chaque devoir après correction de ce dernier.

Pour une manipulation plus facile, les corrigés-types des exercices d’application et d’entraînement sont regroupés en fin de manuel.

CONSEILS A L’ÉLÈVE

Vous disposez d’un support de Cours complet : **prenez le temps** de bien le lire, de le comprendre mais surtout de l’**assimiler**. Vous disposez pour cela d’exemples donnés dans le cours et d’exercices types corrigés. Vous pouvez rester un peu plus longtemps sur une unité mais <u>travaillez régulièrement</u>.

LES FOURNITURES

Vous devez posséder :

- une **calculatrice graphique pour l'enseignement scientifique au Lycée comportant un mode examen (requis pour l'épreuve du baccalauréat).**
- un **tableur** comme Excel de Microsoft (payant) ou Calc d'Open Office (gratuit et à télécharger sur http ://fr.openoffice.org/). En effet, certains exercices seront faits de préférence en utilisant un de ces logiciels, mais vous pourrez également utiliser la calculatrice).

LES DEVOIRS

Les devoirs constituent le moyen d'évaluer l'acquisition de vos *savoirs* (« Ai-je assimilé les notions correspondantes ? ») et de vos *savoir-faire* (« Est-ce que je sais expliquer, justifier, conclure ? »).

Placés à des endroits clés des apprentissages, ils permettent la vérification de la bonne assimilation des enseignements.

Aux *Cours Pi*, vous serez accompagnés par un professeur selon chaque matière tout au long de votre année d'étude. Référez-vous à votre « Carnet de Route » pour l'identifier et découvrir son parcours.
Avant de vous lancer dans un devoir, assurez-vous d'avoir **bien compris les consignes**.
Si vous repérez des difficultés lors de sa réalisation, n'hésitez pas à le mettre de côté et à revenir sur les leçons posant problème. **Le devoir n'est pas un examen**, il a pour objectif de s'assurer que, même quelques jours ou semaines après son étude, une notion est toujours comprise.
Aux *Cours Pi*, chaque élève travaille à son rythme, parce que chaque élève est différent et que ce mode d'enseignement permet le « sur-mesure ».
Nous vous engageons à respecter le moment indiqué pour faire les devoirs. Vous les identifierez par le bandeau suivant :

Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le devoir n°1

Il est **important de tenir compte des remarques, appréciations et conseils du professeur-correcteur**. Pour cela, il est **très important d'envoyer les devoirs au fur et à mesure** et non groupés. **C'est ainsi que vous progresserez !**

Donc, dès qu'un devoir est rédigé, envoyez-le aux *Cours Pi* par le biais que vous avez choisi :

1) Par **soumission en ligne** via votre espace personnel sur **PoulPi**, pour un envoi **gratuit**, **sécurisé** et plus **rapide**.
2) Par **voie postale** à *Cours Pi*, 9 rue Rebuffy, 34 000 Montpellier
   *Vous prendrez alors soin de joindre une **grande enveloppe libellée à vos nom et adresse**, et **affranchie au tarif en vigueur** pour qu'il vous soit retourné par votre professeur*

N.B. : *quel que soit le mode d'envoi choisi, vous veillerez à **toujours joindre l'énoncé du devoir** ; plusieurs énoncés étant disponibles pour le même devoir.*
N.B. : *si vous avez opté pour un envoi par voie postale et que vous avez à disposition un scanner, nous vous engageons à conserver une copie numérique du devoir envoyé. Les pertes de courrier par la Poste française sont très rares, mais sont toujours source de grand mécontentement pour l'élève voulant constater les fruits de son travail.*

SOUTIEN ET DISPONIBILITÉ

VOTRE RESPONSABLE PÉDAGOGIQUE

Professeur des écoles, professeur de français, professeur de maths, professeur de langues : notre Direction Pédagogique est constituée de spécialistes capables de dissiper toute incompréhension.

Au-delà de cet accompagnement ponctuel, notre Etablissement a positionné ses Responsables pédagogiques comme des « super profs » capables de co-construire avec vous une scolarité sur-mesure.
En somme, le Responsable pédagogique est votre premier point de contact identifié, à même de vous guider et de répondre à vos différents questionnements.

Votre Responsable pédagogique est la personne en charge du suivi de la scolarité des élèves.
Il est tout naturellement votre premier référent : une question, un doute, une incompréhension ? Votre Responsable pédagogique est là pour vous écouter et vous orienter. Autant que nécessaire et sans aucun surcoût.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?	Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.
QUEL EST SON RÔLE ?	Orienter les parents et les élèves. Proposer la mise en place d'un accompagnement individualisé de l'élève. Faire évoluer les outils pédagogiques. Encadrer et coordonner les différents professeurs.

VOS PROFESSEURS CORRECTEURS

Notre Etablissement a choisi de s'entourer de professeurs diplômés et expérimentés, parce qu'eux seuls ont une parfaite connaissance de ce qu'est un élève et parce qu'eux seuls maîtrisent les attendus de leur discipline. En lien direct avec votre Responsable pédagogique, ils prendront en compte les spécificités de l'élève dans leur correction. Volontairement bienveillants, leur correction sera néanmoins juste, pour mieux progresser.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?	Une question sur sa correction ? • faites un mail ou téléphonez à votre correcteur et demandez-lui d'être recontacté en lui laissant un message avec votre nom, celui de votre enfant et votre numéro. • autrement pour une réponse en temps réel, appelez votre Responsable pédagogique.

LE BUREAU DE LA SCOLARITÉ

Placé sous la direction d'Elena COZZANI, le Bureau de la Scolarité vous orientera et vous guidera dans vos démarches administratives. En connaissance parfaite du fonctionnement de l'Etablissement, ces référents administratifs sauront solutionner vos problématiques et, au besoin, vous rediriger vers le bon interlocuteur.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?	Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi. 04.67.34.03.00 scolarite@cours-pi.com

LE SOMMAIRE

COMPÉTENCES VISÉES

- Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite.
- Comprendre et utiliser la notion de limite infinie ou de limite finie d'une suite.
- Connaître les limites de suites usuelles.
- Établir la convergence ou la divergence vers +1 ou d'une suite, notamment en utilisant les règles d'opération sur les limites.

COMPÉTENCES VISÉES

- Établir la convergence ou la divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$ d'une suite, notamment en utilisant les règles d'opération sur les limites.
- Déterminer la limite d'une suite géométrique selon sa raison.
- Majorer, minorer, encadrer une suite par une autre suite connue.
- Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.

COMPÉTENCES VISÉES

- Déterminer dans des cas simples la limite d'une suite ou d'une fonction en un point, en +∞ ou -∞, en utilisant les limites usuelles, les croissances comparées, les opérations sur les limites, des majorations, minorations ou encadrements, la factorisation du terme prépondérant dans une somme.
- Faire le lien entre l'existence d'une asymptote parallèle à un axe et celle de la limite correspondante.

COMPÉTENCES VISÉES

- Étudier les solutions d'une équation du type f(x)=k : existence, unicité, encadrement.
- Pour une fonction continue f d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$).

SUGGESTIONS CULTURELLES

ESSAIS

- **La grande aventure des nombres et du calcul** *Jason Lapeyronnie*
- **Les maths c'est magique !** *Johnny Ball*
- **17 Équations qui ont changé le monde** *Ian Stewart*
- **Alex au pays des chiffres** *Alex Bellos*
- **Le grand roman des maths :de la préhistoire à nos jours** *Mickael Launay*
- **Histoire universelle des chiffres : L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul** *Georges Ifrah*
- **Le démon des maths.** *Hans Magnus Enzensberger*
- **A propos de rien : une histoire du zéro** *Robert Kaplan*

BANDES-DESSINÉES

- **Logicomix** *Doxiádis / Papadátos / Papadimitríou*
- **Les maths en BD 1 et 2** *Larry Gonick*

DOCUMENTAIRES AUDIOVISUELS

- **L'extraordinaire aventure du chiffre 1** *Terry Jones*
- **Le grand mystère des mathématiques** *Richard Reisz*

SITES INTERNET

- **www.automaths.blog** *le site de votre professeur Jason Lapeyronnie*
- **La chaîne YouTube Automaths** *la chaîne de votre professeur Jason Lapeyronnie*

Le Cours

INTRODUCTION

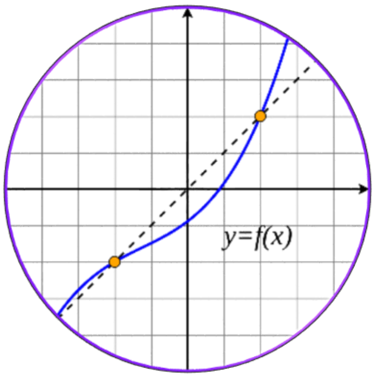
L'analyse est une part importante des mathématiques. Au cours de votre scolarité, notamment lycéenne, vous avez pu l'aborder par l'intermédiaire des fonctions.

Vous avec appris à appréhender différents concepts sous-jacents à ces fonctions. En classe de seconde, l'accent a été mis sur l'étude de variations et de signe, de manière algébrique ou graphique. En classe de première en- suite, vous avez découvert la notion de dérivabilité et son lien avec l'étude des variations d'une fonction. Votre répertoire de fonctions de référence s'est également enrichi de nouvelles fonctions : exponentielle, fonctions trigonométriques, fonction polynômes...

Vous avez également découvert les suites et prolongé les notions que vous connaissiez des fonctions à ce nouvel outil mathématique. Dans ce cadre, vous avez alors découvert la notion de limite, que nous allons désormais approfondir.

Lorsque l'on modélise une situation par une fonction ou une suite, on s'intéresse à son comportement global. Par exemple, si l'on modélise une population, on aimerait savoir si elle augmente ou diminue, et à quelle vitesse. Toutefois, il est intéressant de connaître l'état ”final” de cette population. Deviendra-t-elle sans contrôle ? Ou au contraire, se dirigera-t-elle vers un état d'équilibre, sans jamais franchir un certain seuil ?

Les limites permettent notamment de répondre à cette question.



L'étude des suites a été abordée en classe de Première Générale et se poursuit naturellement en Terminale. De nombreux phénomènes peuvent être modélisés à l'aide de suite : croissance d'une population en fonction du nombre de générations, capital sur un compte en banque après un certain nombre de mois...

Nous nous intéresserons dans cette première partie à la notion de limite d'une suite. Rencontrée de manière intuitive en classe de Première, le concept de limite sera ici approfondi et abordé de manière plus formelle.

COMPÉTENCES VISÉES

- Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite.
- Comprendre et utiliser la notion de limite infinie ou de limite finie d'une suite.
- Connaître les limites de suites usuelles.
- Etablir la convergence ou la divergence vers +1 ou d'une suite, notamment en utilisant les règles d'opération sur les limites.

PRÉ-REQUIS

- Notion de suite étudiée en Première Générale : génération par une formule explicite, par récurrence, sens de variation.
- Fonctions de références : variations, signe, allure de la courbe représentative.
- Calcul algébrique : résolution d'équation du premier ou second degré, calcul avec des puissance.

Première approche

L'ANECDOTE

Le mathématicien belge Pierre François Verhulst (1804 - 1849) est connu pour un modèle d'évolution d'une population biologique que nous allons présenter ici. Ce modèle est discret : plutôt que d'évaluer la population à un temps donné, on l'évalue génération par génération. Verhulst souhaitait traduire deux phénomènes :

- Plus une population est importante, plus sa capacité de reproduction l'est également. De fait, la population à la génération suivante doit être "proportionnelle" à la population de la génération actuelle.
- Lorsque la population est trop importante cependant, de la compétition s'instaure du fait de manque de ressources disponibles, ce qui pénalisera la population à la génération suivante.

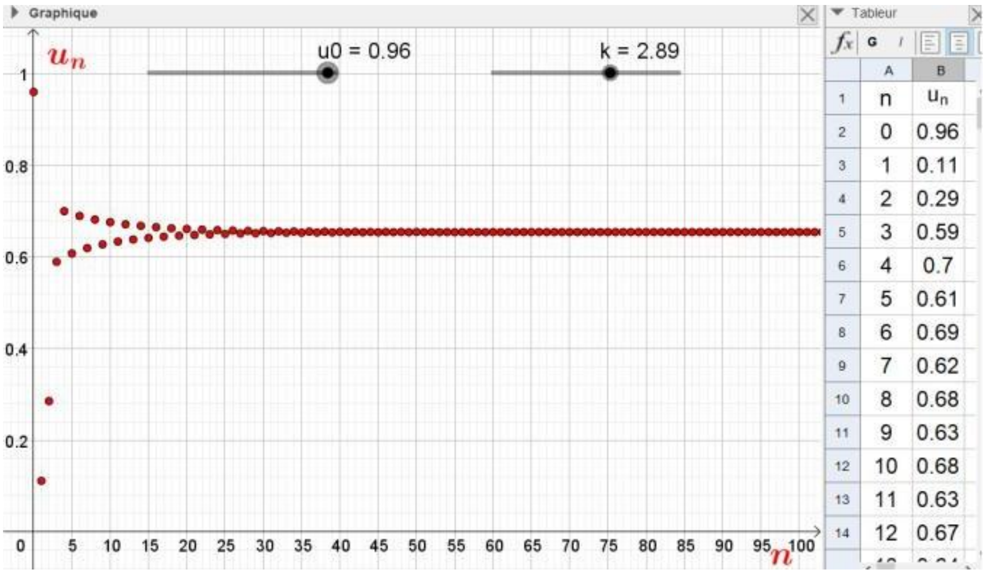
Cette suite est l'un des premiers systèmes chaotiques connus. Suivant les valeurs des paramètres initiaux, son comportement peut être radicalement différent. Une petite différence sur les conditions initiales peut entraîner de grands changements à long terme. C'est ce que l'on appelle "l'effet papillon".

ACTIVITÉ 1.1

Soit k un réel compris entre 1 et 4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,6$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = k\, u_n(1 - u_n)$

La représentation graphique interactive de la suite est disponible à l'adresse suivante :
https://www.geogebra.org/m/kec8nywn#material/qvrpujjv

Utilisez les curseurs pour faire varier les valeurs de u_0 et k et observez le comportement de la suite.



1. Lorsque $k = 1$ et peu importe la valeur donnée à u_0, vers quelle valeur semble se rapprocher les termes de la suite (u_n) ? On dit que cette valeur est la limite de la suite (u_n)

2. Mettre la valeur de k à 1,66. Quelle semble être la limite de la suite (u_n) dans ce cas, peu importe la valeur de u_0 ?

3. Mettre la valeur de k à 3,1. Que semble-t-il se passer ici ? Peut-on dire que la suite admet une limite ?

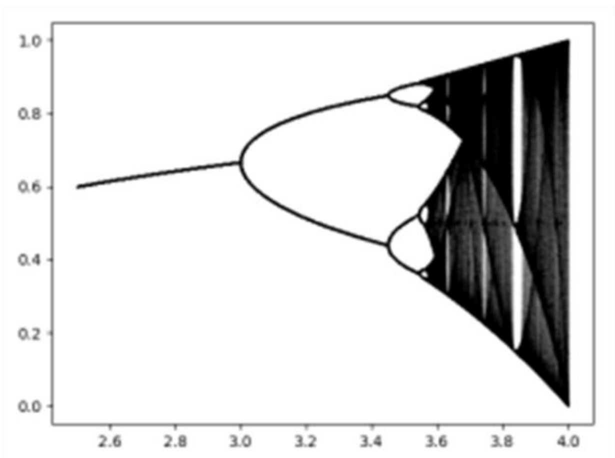
4. Mettre alors la valeur de k à 3,5 pour observer le comportement de la suite. Entre combien de valeurs la suite semble-t-elle osciller ?

5. Mettre alors la valeur de k à 3,6. A-t-on des valeurs vers laquelle la suite semble se stabiliser ? Le comportement de la suite est-il similaire si l'on augmente légèrement la valeur de k ?

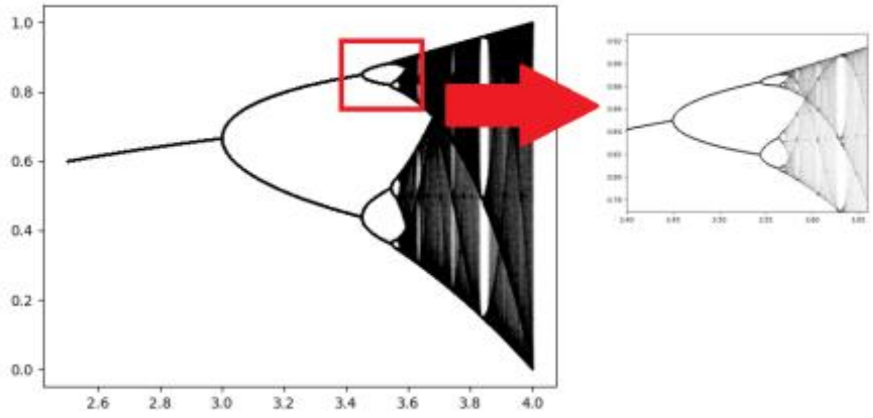
6. Faire varier la valeur de k jusqu'à trouver une valeur où la suite semble osciller entre 3 valeurs.

L'ANECDOTE

Si l'on essaye de représenter sur un graphique les valeurs entre lesquelles la suite oscille en fonction du paramètre k, on obtient la figure suivante :



Il s'agit du diagramme de Feigenbaum. Ce diagramme déjà surprenant par sa forme est également auto- similaire : si l'on zoome à certains endroits du diagramme, on s'aperçoit que le diagramme contient des copies de lui-même.



SOLUTIONS DE L'ACTIVITE 1.1

1. Lorsque $k = 1$, les valeurs semblent se rapprocher de 0. On dit que 0 est la limite de la suite (u_n)
2. Lorsque $k = 1.66$, la limite de la suite (u_n) semble être environ 0,4.
3. Lorsque $k = 3, 1$, la suite semble osciller entre deux valeurs. On ne peut vraiment dire qu'elle admet une limite.
4. Lorsque $k = 3, 5$, les termes de la suite (u_n) semble cette fois osciller entre 4 valeurs.
5. Lorsque $k = 3, 6$, il ne semble y avoir aucune valeur autour de laquelle la suite se stabilise. Son comportement est chaotique.
6. La suite semble osciller entre 3 valeurs pour $k = 3, 85$.

01

SUITES RÉELLES

Raisonnement par récurrence

L'ESSENTIEL

Lorsque l'on souhaite démontrer une proposition mathématique qui dépend d'un entier n, il est parfois possible de démontrer cette proposition par récurrence.

Pour tout entier n, on note $\mathcal{P}(n)$la proposition qui nous intéresse. La démonstration par récurrence comporte trois étapes :

- Initialisation : On montre qu'il existe un entier n0 pour lequel $\mathcal{P}(n_0)$est vraie ;
- Hérédité : on montre que, s'il existe un certain entier n pour lequel $\mathcal{P}(n)$est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$l'est également ;
- Conclusion : on en conclut que pour entier $n \geqslant n_0$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

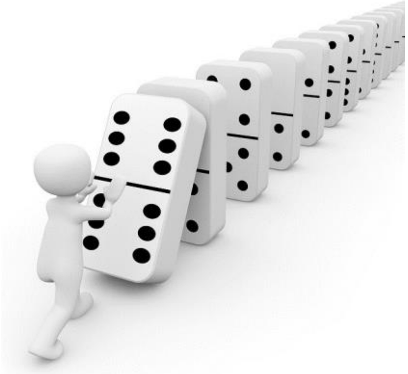
L'ANECDOTE

L'anecdote : Le principe du raisonnement par récurrence rappelle les dominos que l'on aligne et que l'on fait tomber, les uns à la suite des autres.

On positionne les dominos de telle sorte que, dès que l'un tombe, il entraîne le suivant dans sa chute. C'est l'hérédité. Seulement, encore faut-il faire effectivement tomber le premier domino, sans quoi rien ne se passe : c'est l'initialisation.

Si ces deux conditions sont remplies, on est certain qu'à la fin, tous les dominos seront tombés : c'est notre conclusion.

Une différence notoire toutefois est que les entiers, contrairement aux dominos, sont en nombre infini
C'est ce qui fait tout l'intérêt et toute la puissance de ce raisonnement. Comme le disait le mathématicien Henri Poincaré (1854 - 1912), le raisonnement par récurrence est un "instrument qui permet de passer du fini à l'infini.



Exemple

On rappelle que la somme $1+2+3+\cdots+n$ de tous les entiers de 1 à n peut également s'écrire $\sum_{k=1}^{n} k$.

Pour tout entier n, on note alors $\mathcal{P}(n)$ la proposition $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Cette proposition dÉpend d'un entier n, nous allons la dÉmontrer par récurrence.

- Commençons par montrer que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

  D'une part, $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{0\times(0+1)}{2} = 0$.

  D'autre part, $\sum_{k=1}^{0} = 0$ car la somme ne contient aucun terme.

  On a donc bien, pour $n=0$, que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

- Supposons qu'il existe un entier n tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie et montrons que cela entraîne que $\mathcal{P}(n+1)$ est également vraie.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

Or, puisque $\mathcal{P}(n)$ est vraie,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Nous avons ainsi

$$\sum_{k=1}^{redn+1} k = \frac{(redn+1)(redn+1+1)}{2}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie

- Nous avons montré que $\mathcal{P}(0)$ était vraie puisque, s'il existe un entier n tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ l'est également. D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout entier n.

À VOUS DE JOUER 1

Complétez.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier relatif n, $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$. Montrons par récurrence que, pour tout entier n, la proposition $\mathcal{P}(n)$: $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$ est vraie.

- **Initialisation** : $\mathcal{P}(0)$ est vraie : en effet, $u_0 = \ldots..$, on a donc …
- **Hérédité** : Supposons qu'il existe n tel que …. Montrons que ….

Par hypothÈse de récurrence, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$. Ainsi, … $\leqslant u_n + 1 \leqslant$…

De plus, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est …. sur $[0; +\infty[$.

Ainsi, … $\geqslant \frac{1}{u_n+1} \geqslant \cdots$, c'est-À -dire … $\geqslant \cdots \geqslant \cdots$. Nous avons montré que … est vraie.

- Ainsi, …. et …. d'après le principe de récurrence, pour tout entier n, …

02 SUITES RÉELLES

Suite majorée, minorée, bornée

L'ESSENTIEL

L'essentiel : Soit (*un*) une suite réelle.

- On dit que (*un*) est majorée s'il existe un réel *M* tel que, pour tout entier naturel *n*, $u_n \leqslant M$
- On dit que (*un*) est minorée s'il existe un réel *m* tel que, pour tout entier naturel *n*, $u_n \geqslant m$
- On dit que (*un*) est bornée si (*un*) est à la fois majorée et minorée.

Remarque

Les majorants et minorants sont indépendants de n ! Bien que pour tout $n > 0$, on ait $n \leqslant n^2$, on ne peut pas dire que la suite (u_n) définie par $u_n = n$ est majorée.

Exemple

Pour tout n, on pose $u_n = \cos(n)$.
La suite (u_n) est bornée puisque, pour tout entier n, $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Exemple

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = n^2 + 1$.
La suite (v_n) est minorée puisque pour tout n, $v_n \geqslant 1$.
En revanche, elle n'est pas majorée.

Exemple

Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = (-1)^n\, n$.
La suite (w_n) n'est ni majorée, ni minorée.

À VOUS DE JOUER 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite est majorée, minorée, bornée.

- (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n - 3$

- (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \cos(n) + \sin(n)$

- (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = -3n^2 + 12n + 8$

Remarque

Lorsque la suite est définie par récurrence, une majoration ou une minoration peut être démontrée par récurrence, comme cela a été le cas dans le **A vous de jouer 1**.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0.5u_n + 2$.
Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition "$u_n \geqslant 4$".

- On a bien $u_0 \geqslant 4$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
- Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à -dire $u_n \geqslant 4$.

Ainsi, $0.5u_n \geqslant 2$ et $0.5u_n + 2 \geqslant 4$, c'est-à -dire $u_{n+1} \geqslant 4$. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie et s'il existe un entier n tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ l'est également.

D'après le principe de récurrence, on en conclut que pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

À VOUS DE JOUER 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{10}\ u_n + 8$. En vous inspirant de l'exemple précédent, montrez que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 10$.

Logique
Pour montrer qu'une suite n'est pas majorée, il faut montrer que pour tout réel A, il existe un entier N tel que $u_N \geqslant A$. Ainsi, peu importe le réel A, on trouvera un terme de la suite plus grand que celui-ci.

03 SUITES RÉELLES
Limite d'une suite

LIMITE INFINIE

L'ESSENTIEL

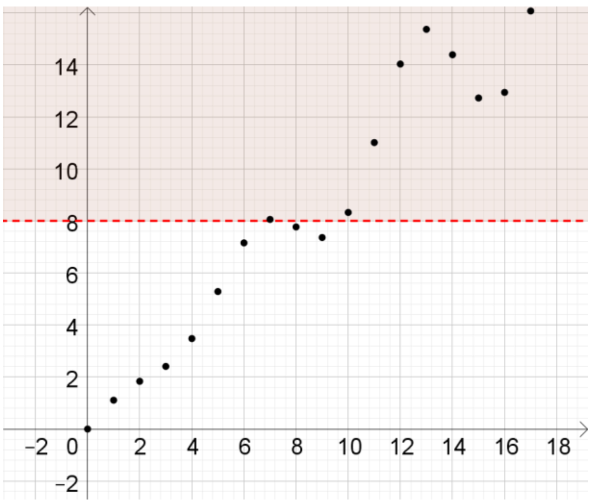
Soit (u_n) une suite réelle.

- On dit que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A l'intervalle $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

- On dit que u_n tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A l'intervalle $]-\infty; A[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

L'idée : la première définition traduit le fait que la suite dépasse n'importe quel seuil donné sans jamais repasser en dessous par la suite. Attention, cela ne signifie pas que les termes de la suite sont de plus en plus grands ; une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.

Illustration : on a représenté graphiquement une certaine suite (u_n) ci-dessous. On se fixe un seuil $A = 8$.



On remarque que $u_7 \geqslant 8$. Cependant, les termes suivants sont inférieurs à 8 : pour qu'une suite tende vers $+\infty$, il faut que **tous les termes** à partir d'un certain rang soient au-dessus du seuil A. On voit ainsi que, pour tout $n \geqslant 10$, on a bien $u_n \geqslant 8$.
Le raisonnement que nous venons de tenir pour $A = 8$ tient pour toutes les valeurs de A, aussi grandes soient-elles : la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
Naturellement, plus la valeur de A est grande, plus la valeur à partir de laquelle tous les termes de la suite sont tous plus grands que A sera lointaine.

Il faut par ailleurs remarquer qu'une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante : cette suite ici représentée en est un exemple.

Exemple
Pour tout n, on pose $u_n = n^2$. La suite (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
En effet, fixons un réel A.
- Si $A < 0$, alors pour tout n, $u_n > A$.
- Si $A \geqslant 0$, alors pour tout n supérieur ou égal à $\sqrt{A}$, $u_n = n^2 \geqslant \sqrt{A}^2 = A$, par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}+$.

Dans tous les cas, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (u_n) sont au-dessus de A, peu importe le réel A choisi : la suite (u_n) tend donc vers $+\infty$.

À VOUS DE JOUER 4

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \sqrt{n}$ et $v_n = -n^3$.
En vous inspirant de l'exemple précédent, déterminez les limites des suites (u_n) et (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarque

Il y a une différence entre une suite qui tend vers $+\infty$ et une suite non majorée.
Pour tout n, posons $u_n = (1 + (-1)^n)\, n$.
La suite (u_n) n'est pas majorée : elle a des termes arbitrairement grands.
Cependant, elle ne tend pas non plus vers $+\infty$ puisqu'un terme sur deux de cette suite vaut 0.
Elle ne reste donc pas supérieure à n'importe quel réel donné à partir d'un certain rang.

À VOUS DE JOUER 5

Pour tout entier naturel n, on note $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est premier} \\ n^2 & \text{sinon} \end{cases}$.

A-t-on $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$?

....

....

....

....

....

....

....

LIMITE FINIE : SUITE CONVERGENTE

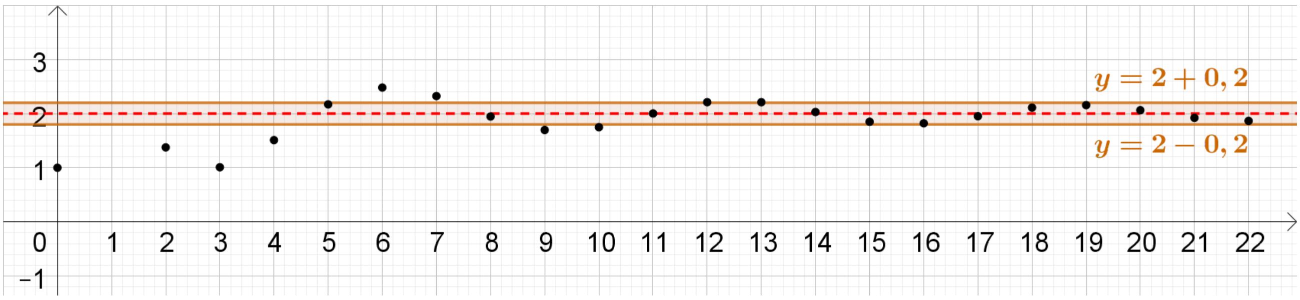
L'ESSENTIEL

Soit (u_n) une suite réelle et l un réel. On dit que u_n tend vers l - où que l est la limite de la suite (u_n) - lorsque n tend vers $+\infty$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, dès que $n \geqslant N$, on a $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.
Si une telle limite existe, alors elle est unique. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

Une suite qui admet une limite finie dit convergente. Dans le cas contraire, on parle de suite divergente : cela regroupe les suites qui ont une limite infinie mais aussi les suites qui n'admettent pas de limite.

Illustration : On a représenté graphiquement une certaine suite (u_n) ci-dessous.



La suite (u_n) semble tendre vers 2. Par exemple, si on prend $\varepsilon = 0{,}2$, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon[$ à partir du rang 14. Ce raisonnement vaudra pour n'importe quelle valeur de ε, aussi petite soit-elle.

L'ANECDOTE

Bien que la définition formelle de suite convergente ne date que de 400 ans environ, les premières notions de suite convergente apparaissent déjà dans les Eléments d'Euclide, écrits 2000 ans encore plus tôt. Euclide écrit ainsi :

« Etant données deux grandeurs inégales, si, de la plus grande on retranche plus que la moitié, et que du reste on retranche plus que la moitié et si l'on continue toujours ainsi, nous aboutirons à une grandeur inférieure à la plus petite des grandeurs données ».

Autrement dit, si l'on considère une suite (u_n) vérifiant, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{2}$, alors cette suite est plus petite que tout réel $\epsilon > 0$ à partir d'un certain rang.
En d'autre termes, cette suite tend vers 0.

Exemple

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \frac{2n+1}{4n+5}$.
Pour se faire une idée de la limite, il est possible de calculer quelques termes de la suite.
Ainsi, $u_0 = \frac{1}{5}$, $u_{10} = \frac{21}{45} \simeq 0.467$, $u_{100} = \frac{201}{405} \simeq 0.496...$
Il semble que la suite soit convergente et que sa limite vaille $\frac{1}{2}$.
Pour le prouver formellement, repassons pas la définition : pour n'importe que $\varepsilon > 0$, il faut trouver un rang N à partir duquel, pour tout $n > N$, on ait $u_n \in \left]\frac{1}{2} - \varepsilon; \frac{1}{2} + \varepsilon\right[$.
Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{2n+1}{4n+5} - \frac{1}{2} = \frac{4n+2}{2(2n+5)} - \frac{4n+5}{2(2n+5)} = \frac{-3}{2(2n+5)}$$

Fixons alors $\varepsilon > 0$ et remarquons que $u_n \in \left]\frac{1}{2} - \varepsilon; \frac{1}{2} + \varepsilon\right[$ est équivalent à $u_n - \frac{1}{2} \in] - \varepsilon; \varepsilon[$, ou encore $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$. Or,

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{2(2n+5)} < \varepsilon \Leftrightarrow 2n + 5 > \frac{2}{3\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{3\varepsilon} - \frac{5}{2}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, dès que $n > \frac{1}{3\varepsilon} - \frac{5}{2}$, on a $u_n \in \left]\frac{1}{2} - \varepsilon; \frac{1}{2} + \varepsilon\right[$.
La suite (u_n) est bien convergente et sa limite vaut $\frac{1}{2}$.

À VOUS DE JOUER 6

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \frac{8n-5}{2n+3}$.
Conjecturez la convergence et la limite de la suite (u_n), puis démontrer formellement cette conjecture.

....

....

....

....

....

....

Remarque

Nous verrons très bientôt des résultats qui nous permettront de passer outre cet aspect formel. Même si une telle démonstration de la convergence d'une suite n'est que rarement demandé en classe de terminale, comprendre les bases de ce raisonnement constituera un avantage certain dans les études supérieurs.

L'ESSENTIEL

Si une suite est convergente, elle est bornée. Par contraposée, si une suite n'est pas bornée, elle ne peut être convergente.

Remarque La réciproque est fausse : toute suite bornée n'est pas convergente. Par exemple, pour tout n, prenons $u_n = (-1)^n$. La suite (u_n) est bornée puisque, pour tout n, $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$. En revanche, elle n'est pas convergente : ses termes de rangs pairs valent tous 1 et ses termes de rangs impairs valent tous -1. Une limite étant unique, la suite (u_n) ne peut être convergente.

LIMITES DE SUITES USUELLES

L'ESSENTIEL

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- Plus généralement, pour tout $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$.
- Pour tout $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$
- Les suites $(\cos(n))$ et $(\sin(n))$ n'admettent pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

À VOUS DE JOUER 7

Montrez que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

À VOUS DE JOUER 8

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$.

- La suite (u_n) peut-elle tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$?

- Pour tout entier naturel k, que vaut u_{2k+1} ? Que vaut u_{4k} ?

- La suite (u_n) peut-elle être convergente ?

04 SUITES RÉELLES

Opérations sur les limites

LIMITE DE LA SOMME

L'ESSENTIEL

On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) et deux réels l_1 et l_2.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	l_1	l_1	l_1	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	l_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n)$	$l_1 + l_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Exemple

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \frac{4n+1}{n}$.

On a alors, pour tout n, $u_n = 4 + \frac{1}{n}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 = 4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4 + 0 = 4$

Remarque

Les cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ n'obéissent à aucune règle précise : il faut les traiter séparément.

Exemple

Pour tout n, on pose $u_n = n$ et $v_n = 1 - n$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Or, pour tout entier n, $u_n + v_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = 1$

À VOUS DE JOUER 9

Dans chacun des cas suivants, défini pour tout entier naturel n, déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n).

- $u_n = n^2 + \sqrt{n}$
- $u_n = \dfrac{1}{n} - n^3$
- $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + n$
- $u_n = \dfrac{6n^2 + n + 1}{n}$ pour $n > 0$

LIMITE DU PRODUIT

L'ESSENTIEL

On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) et deux réels l_1 et l_2.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l_1	$l_1 > 0$	$l_1 < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l_2	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\, v_n)$	$l_1\, l_2$	$+\infty$ ou $-\infty$ (signe inchangé)	$-\infty$ ou $+\infty$ (signe changé)	$+\infty$ ou $-\infty$ (signe inchangé)	$-\infty$ ou $+\infty$ (signe changé)

Exemple

Pour tout n, on pose $u_n = \left(\frac{3}{n} - 4\right) \times (n^2 + 2\sqrt{n})$.

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{n} - 4\right) = -4$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 + \sqrt{n}\right) = +\infty$.
- Finalement, d'après les règles de calcul de limite d'un produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

À VOUS DE JOUER 10

Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n) définie comme suit :

- $u_n = (2n + 1)\left(\frac{1}{n} + 2\right)$
- $u_n = \left(3 + \frac{2}{n}\right)\left(\frac{5}{n^2} - 2\right)$
- $u_n = \sqrt{n} - n^2\sqrt{n}$

Remarque
Encore une fois, certains cas ne peuvent être généralisés.

Exemple
Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \frac{2}{n}$, $v_n = n$ et $w_n = n^2$.
- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n\, v_n = 2$. ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\, v_n) = 2$.
- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n\, w_n = 2n$. ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\, v_n) = +\infty$.

On voit sur cet exemple que le produit d'une limite infinie et d'une limite qui vaut 0 peut aboutir à plusieurs résultats différents.

À VOUS DE JOUER 11

Donnez deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\, v_n) = 0$.

....

....

....

....

....

LIMITE DU QUOTIENT

L'ESSENTIEL

On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) telle que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On considère deux réels deux réels l_1 et l_2.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l_1	l_1	$l_1 \neq 0$	$l_1 \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l_2 \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 par valeurs supérieures	0 par valeurs inférieures	l_2
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$	$\frac{l_1}{l_2}$	0	$+\infty$ si $l_1 > 0$, $-\infty$ sinon	$-\infty$ si $l_1 > 0$, $+\infty$ sinon	$+\infty$ ou $-\infty$ (règle des signes)

Exemple

Pour tout entier n on pose $u_n = \frac{1+\frac{2}{n}}{3+n}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (3 + n) = +\infty$.
- Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Remarque
Là encore, certains cas ne figurent pas dans le tableau et doivent faire l'objet d'étude plus poussée.

À VOUS DE JOUER 12

Dans chaque cas, déterminez la limite de la suite (u_n) définie comme suit pour tout $n > 0$.

- $u_n = \dfrac{e^n}{1 + \frac{1}{n}}$
- $u_n = \dfrac{6 + \frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n} - 1}$
- $u_n = \dfrac{1 + \frac{3}{n}}{\frac{1}{n^2}}$
- $u_n = \dfrac{5 + \frac{2}{n^2}}{n^3 + \frac{1}{n}}$

FORMES INDÉTERMINÉES

L'ESSENTIEL

Il est parfois impossible de conclure sur la limite de la somme ou du produit de deux suites à l'aide de règles de calcul. Ces cas produisent ce que l'on appelle des formes indéterminées et sont les suivants : "$\infty - \infty$", "$0 \times \infty$", "$\frac{0}{0}$" et "$\frac{\infty}{\infty}$".
Plusieurs techniques permettent de lever ces indéterminations.

Exemple

Factorisation par le terme de plus haut degré.
Pour tout n, on pose $u_n = 4n^2 + 2n + 3$ et $v_n = 3n^2 + 7n - 1$.
On cherche à déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n}$.
Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$. On se retrouve dans le cas d'une limite "$\frac{\infty}{\infty}$".

Il est toutefois possible de factoriser u_n et v_n par leur terme de plus haut degré (ici, n^2).
Pour tout entier $n > 0$,

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{4n^2 + 2n + 3}{3n^2 + 7n - 1} = \frac{n^2\left(4 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(3 + \frac{7}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{4 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{3 + \frac{7}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

Or,

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(4 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right) = 4$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{7}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 3$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{4}{3}$

À VOUS DE JOUER 13

En factorisant par le terme dominant, déterminez la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

- $u_n = \frac{3n^3+2n-5}{2-4n^3}$
- $u_n = \frac{n^2+1}{n+3}$
- $u_n = \frac{1-6n^4}{5n^6+2n^2+1}$
- $u_n = \frac{\ln(n^2)+1}{\ln(n)+3}$ pour $n > 0$

L'ESSENTIEL

Lorsque l'on est en présence d'une différence de racines carrées $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, on peut multiplier et diviser par la quantité conjuguée $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

On admettra de plus que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, avec $a \geqslant 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

Exemple

Pour tout entier naturel n, on note $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$.

Il s'agit de la différence de deux termes qui tendent vers $+\infty$, il n'est pas possible de conclure directement sur sa limite.

Or,

$$u_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) \times \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

Le numérateur vaut 2 et le dénominateur tend vers $+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque

Il est parfois nécessaire de combiner les deux approches vues ci-dessus.

On pourra par exemple utilise le fait que, pour tout $n > 0$, $\sqrt{n+1} = \sqrt{n} \times \sqrt{1+\frac{1}{n}}$.

À VOUS DE JOUER 14

Déterminez la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

- $u_n = \sqrt{n-3}-\sqrt{n+8}$
- $u_n = \sqrt{n+2}+\sqrt{2n+5}$
- $u_n = \sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-n-1}$ pour $n > 1$
- $u_n = n\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}\right)$

Abordons maintenant une série d'exercices, afin de vérifier vos connaissances.
Les exercices ont été classés dans un ordre d'approfondissement croissant.
Les réponses aux exercices se trouvent en fin de manuel.

EXERCICE 01 S'entraîner au raisonnement par récurrence

On souhaite montrer que, pour tout entier n non nul, $n! \leqslant n^n$, où $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$. On notera $\mathcal{P}(n)$ cette proposition.

1. $\mathcal{P}(1)$ est-elle vraie ?

....

....

2. On suppose qu'il existe un entier strictement positif n tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrez que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

....

....

....

....

....

....

3. Conclure.

....

....

EXERCICE 02 Raisonnement par récurrence : dérivée d'une puissance

A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrez que, pour tout entier naturel non nul n, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$, définie sur $\mathbb{R}$, est également dérivable, de dérivée $f'_n : x \mapsto n\, x^{n-1}$

....

....

....

....

....

....

....

....

EXERCICE 03 Suite récurrente linéaire d'ordre 2 : un cas particulier

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$.
Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ ma proposition $u_n = 1 + 4^n$.

1) Montrez que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

2) On suppose qu'il existe un entier n tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathbb{P}(n+1)$ sont vraies. Montrez que $\mathcal{P}(n+2)$ est également vraie. On parle de récurrence double.

3) Conclure.

EXERCICE 04 Suite récurrente linéaire d'ordre 2 : cas général

Soit a et b deux réels, tous les deux non nuls.
On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$.
L'équation $(E)\ :\ x^2 = ax + b$ est appelée équation caractéristique de la suite (u_n).

Partie 1

Supposons que l'équation (E) admette deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2.

1) On suppose qu'il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout entier n, $u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$.
En prenant $n = 0$ et $n = 1$, exprimer λ et μ en fonction de u_0, u_1, x_1 et x_2.

EXERCICES

2) Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition $u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$, où λ et μ ont les valeurs trouvées à la question précédente.

(a) Montrez que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

(b) On suppose qu'il existe un entier n tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathbb{P}(n+1)$ sont vraies.
Montrez que $\mathcal{P}(n+2)$ est également vraie.

(c) Conclure.

Partie 2

On suppose que l'équation (E) possède une unique solution réelle x_0.

3) On suppose qu'il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout entier n, $u_n = \lambda\, x_0^n + \mu\, n\, x_0^n$.
En considérant les cas $n = 0$ et $n = 1$, exprimez λ et μ en fonction de u_0, u_1 et x_0.

4) En reprenant le schéma de la partie 1, montrez par récurrence double que, pour tout entier naturel n, $u_n = \lambda\, x_0^n + \mu\, n\, x_0^n$

© *Cours Pi*

EXERCICES

Partie 3

5) On suppose qu'il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout entier n, $u_n = \lambda\, x_0^n + \mu\, n\, x_0^n$.
En considérant les cas $n = 0$ et $n = 1$, exprimez λ et μ en fonction de u_0, u_1 et x_0.

6) En reprenant le schéma de la partie 1, montrez par récurrence double que, pour tout entier naturel n, $u_n = \lambda\, x_0^n + \mu\, n\, x_0^n$

EXERCICE 05 Borner une suite

Dans chacun des cas suivants, montrez que la suite (u_n) est bornée et donnez un majorant et un minorant.

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = \cos(n) + 3$

2. Pour tout entier naturel n, $u_n = (-1)^n \sin(n) + 3\cos(n)$.

3. Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{n}{n+1}$

4. Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{n^2+(-1)^n}{2n^2+2}$

EXERCICE 06 Démontrer par récurrence qu'une suite est bornée

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n+3}{2}$.
Montrez que, pour tout entier naturel n, $3 \leqslant u_n \leqslant 5$.

2. On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 0.3$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 4v_n(1 - v_n)$. Montrez par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$. On pourra par exemple étudier la fonction $x \mapsto 4x(1 - x)$ sur $[0,1]$.

EXERCICE 07 Montrez qu'une limite est infinie

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 5$.

1. Montrez que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant -5$.

2. On considère un réel $A \geqslant -5$. Résoudre l'inéquation $u_n \geqslant A$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$.

3. Que peut-on en conclure sur la limite de la suite (u_n) ?

EXERCICE 08 Montrez qu'une limite est infinie (2)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 4 - 3n$.

1. Soit A un réel. Résoudre l'équation $u_n \leqslant A$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$.

2. Que peut-on en conclure sur la limite de la suite (u_n) ?

EXERCICE 09 Montrez qu'une suite est convergente

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3n+6}{n+1}$.

1. En calculant certains termes de la suite, la suite semble-t-elle convergente ? Quelle serait sa limite ?

2. Montrez que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 = \frac{3}{n+1}$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Résoudre l'inéquation $|u_n - 3| < \varepsilon$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$.

4. Conclure sur la convergence de la suite (u_n).

5. A partir de quel rang a-t-on toujours $u_n \in]2{,}99; 3{,}01[$?

EXERCICE 10 Vrai ou faux ?

Dans chacun des cas suivants, dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la démontrez. Sinon, donnez un contre-exemple. (u_n) et (v_n) sont des suites réelles.

1. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n + v_n)$ diverge.

2. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n\ v_n)$ diverge.

3. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n + v_n)$ diverge.

4. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n\ v_n)$ diverge.

5. Si (u_n) est une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

EXERCICE 11 Utiliser les opérations sur les limites

Dans chacun des cas suivants, déterminez, si elle existe, la limite de la suite (u_n).

- Pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 + n$

- Pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{3}{n^2}\right)$

- Pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \frac{3+\sqrt{n}}{1+\frac{2}{n}}$

- Pour tout entier naturel n, $u_n = -2n^2 - \frac{5}{n+1}$

EXERCICE 12 Lever les formes indéterminées

Dans chacun des cas suivants, déterminez, si elle existe, la limite de la suite (u_n).

- Pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 - n$

- Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{5n+2}{3n-1}$

• Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{-3n^2+2n-1}{6n-7}$

• Pour tout entier naturel n, $u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}$

• Pour tout entier naturel n, $u_n = \sqrt{2n} - \sqrt{n}$

EXERCICE 13 Une suite définie par une somme

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

1. Montrez que pour tout entier naturel non nul k, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

2. En déduire une expression simplifiée de u_n. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

EXERCICE 14 Une suite définie par un produit

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$

2. En déduire une expression simplifiée de u_n. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

EXERCICE 15 Exercices théoriques

1. On considère une suite (u_n) telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Montrez que $\lim_{n\to+\infty} (-u_n) = -\infty$.

2. On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n, $u_n\, u_{n+1} < 0$.
On suppose que la suite (u_n) est convergente. Montrez que sa limite est 0.

EXERCICE 16 Type bac

Bac S Centres étrangers 2019, exercice 2, partie A

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_1 et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par la relation

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

1. Vérifiez, en détaillant le calcul, que si $u_1 = 0$, alors $u_4 = -17$.

2. Recopiez et complétez l'algorithme ci-dessous pour qu'en saisissant préalablement dans U une valeur de u_1, il calcule les termes de la suite (u_n) de u_2 à u_{13}

```
Pour N allant de 1 à 12
    U ←
Fin Pour
```

----

3. On a exécuté cet algorithme pour $u_1 = 0{,}7$ et pour $u_1 = 0{,}8$. Voici les valeurs obtenues

Pour $u_1 = 0,7$	Pour $u_1 = 0,8$
0,4	0,6
0,2	0,8
-0,2	2,2
-2	10
-13	59
-92	412
-737	3295
-6634	29654
-66341	296539
-729752	3261928
-8757025	39143135
-113841326	508860754

Quelle semble être la limite de cette suite si $u1$=0,7 ? Et si $u1$ Quelle semble être la limite de cette suite si $u_1 = 0{,}7$? Et si $u_1 = 0{,}8$?

SUITES RÉELLES

Sujet Commenté : Bac S Amérique sud 2018, exercice 5, mathématiques obligatoires.

Soit k un réel strictement positif.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = k$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{k u_n}$$

On admet que tous les termes de la suite (u_n) existent et sont strictement positifs.

Bien que l'existence et la stricte positivité soit admise dans cet exercice, il est tout à fait possible de les démontrer à l'aide d'une récurrence double (voir exercices 3 et 4).

Question 1 : exprimer u_2, u_3 et u_4 en fonction de k.

- $u_2 = \frac{u_1^2}{ku_0} = \frac{k^2}{k\times 1} = k$
- $u_3 = \frac{u_2^2}{ku_1} = \frac{k^2}{k\times 1} = 1$
- $u_4 = \frac{u_3^2}{ku_2} = \frac{1}{k\times k} = \frac{1}{k^2}$

Question 2 : à€ l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes de la suite (u_n) pour deux valeurs de k. La valeur du réel k est entrée dans la cellule E2.

	A	B	C	D	E
1	n	$u(n)$			
2	0	1		$k=$	2,7182818
3	1	2,7182818			
4	2	2,7182818			
5	3	1			
6	4	0,1353353			
7	5	0,0067379			
8	6	0,0001234			
9	7	8,315E-07			
10	8	2,061E-09			
11	9	1,88E-12			
12	10	6,305E-16			
13	11	7,781E-20			
14	12	3,533E-24			
15	13	5,9E-29			
16	14	3,625E-34			

	A	B	C	D	E
1	n	$u(n)$			
2	0	1		$k=$	0,9
3	1	0,9			
4	2	0,9			
5	3	1			
6	4	1,2345679			
7	5	1,6935088			
8	6	2,5811748			
9	7	4,3712422			
10	8	8,2252633			
11	9	17,196982			
12	10	39,949576			
13	11	103,11684			
14	12	295,7362			
15	13	942,40349			
16	14	3336,7738			

a - Quelle formule, saisie dans la cellule B4, permet par recopie vers le bas de calculer tous les termes de la suite (u_n)

La cellule B4 ici correspond au calcul de u_2. Il faut alors se référer à la relation de récurrence qui permet de construire la suite : $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{ku_n}$. On a alors $u_2 = \frac{u_1^2}{ku_0}$.

u_1 se situe à la case B3 et u_1 à la case B2. En faisant glisser la formule entrée en B4, les valeurs de la suite (u_n) doivent également glisser pour pouvoir générer les termes suivants de la suite. En revanche, la valeur de k n'évolue pas : elle est fixée dans une case, E2, et il faudra utiliser le symbole $ pour y faire référence. On n'oubliera pas, par ailleurs, le signe = pour indiquer qu'il s'agit d'un calcul.
Finalement, la formule à entrer dans la case B4 est =B3*B3/(E2*B2). Attention aux parenthèses au dénominateur. Ne pas les mettre ferait exécuter le calcul suivant au tableur : $u_2 = \frac{u_1}{k} \times u_0$

b - Conjecturer, dans chaque cas, la limite de la suite (u_n).

Dans le premier cas, la suite semble tendre vers zéro (on rappelle quand dans le tableur, l'indication E-34 signifie $\times 10^{-34}$. Dans le second, elle semble tendre vers $+\infty$.
Attention à ne pas se lancer dans une étude plus poussée de la suite : il s'agit d'une conjecture sur la limite, pas d'un calcul ni d'une étude de variations. Il faut se limiter à ce que demande la question : en faire davantage ne rapportera pas plus de points mais fera perdre du temps à coup sà»r.

Dans la suite, on suppose que $k = e$. On a donc $u_0 = 1$, $u_1 = e$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{e\, u_n}$.
Question 3 : on définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$
a - Montrer que la suite (v_n) est arithmétique, de raison -1 et de premier terme $v_0 = 1$

Une astuce classique lorsque l'on étudie une suite d'apparence compliquée est d'utiliser une autre suite qui s'exprime en fonction de la première. Une telle suite est dite "auxiliaire".
Commençons par montrer que $v_0 = 1$. On a en effet $v_0 = \ln(u_{0+1}) - \ln(u_0) = \ln(e) - \ ln(1) = 0$.
Montrons maintenant qu'elle est arithmétique, de raison -1. Cela signifie qu'il faut montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n - 1$ ou, de manière équivalente, que $v_{n+1} - v_n = -1$. Soit donc n un entier naturel.

$$v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+2}) - \ln(u_{n+1}) - (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) = \ln(u_{n+2}) - 2\ln(u_{n+1}) + \ln(u_n)$$

Attention aux parenthèses lorsque l'on fait la différence de deux termes de la suite. Il faut maintenant se référer à la nature de la suite (u_n) : on sait que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{e\, u_n}$. Il suffit alors de remplacer u_{n+2} par cette valeur dans notre calcul. Ainsi,

$$v_{n+1} - v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}^2}{e\, u_n}\right) - 2\ln(u_{n+1}) + \ln(u_n)$$

On utilise alors les règles de calcul avec le logarithme. Pour tout a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$. De plus, pour tout entier relatif n, $\ln(a^n) = n\ln(a)$. Alors,

$$v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}^2) - \ln(e) - \ln(u_n) - 2\ln(u_{n+1}) + \ln(u_n) = 2\ln(u^{n+1}) - 1 - 2\ln(u_{n+1}) = -1$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -1$. La suite (v_n) est bien arithmétique, de raison -1.

En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

On rappelle que, pour une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison r, on a, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + rn$.
Ici, on a donc, pour tout entier naturel n, $v_n = 1 - n$.
Lorsque l'on a une expression simple comme celle-ci, il ne faut pas hésiter à tester des valeurs pour s'assurer que l'on n'a pas fait d'erreur d'inattention. On a bien $v_0 = 1 - 0 = 1$. D'après cette relation, on a $v_1 = 1 - 1 = 0$. D'après la formule, $v_1 = \ln(u_2) - \ln(u_1) = \ln(e) - \ln(e) = 1 - 1 = 0$. Ces vérifications rapides vous permettront d'éviter certaines coquilles.

Question 4 : on définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (S_n) par $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.
a - Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $S_n = \frac{n(n-3)}{2}$

Deux options s'offrent à vous. Puisque l'on a la résultat attendu, il est possible de le démontrer par récurrence. Néanmoins, on rappelle que la suite (v_n) est arithmétique et que l'on sait calculer la somme des termes d'une telle suite. Pour tout entier naturel n,

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = n \times \frac{v_0 + v_{n-1}}{2} = \text{Nombredetermes} \times \frac{\text{Premierterme} + \text{Dernierterme}}{2}$$

Attention à bien noter que la somme s'arrêt au terme de rang $n-1$. Il y a donc $n - 1 + 1 = n$ termes dans cette somme. Ainsi

$$S_n = n \times \frac{1 + (1 - (n-1))}{2} = \frac{n(3-n)}{2}$$

b - Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = \ln(u_n)$.

La définition de la suite (S_n) dans la question 4 fait intervenir v_n alors que la réponse ici fait intervenir u_n.
Il faut donc utiliser, pour cette question, la relation qui lie (u_n) à (v_n) : pour tout entier naturel n,
$v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. Ainsi, pour tout entier naturel n,
$S_n = v_{n-1} + v_{n-2} + \cdots + v_1 + v_0 = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1}) + \ln(u_{n-1}) - \ln(u_{n-2}) + \cdots + \ln(u_2) - \ln(u_1) + \ln(u_1) - \ln(u_0)$
Les logarithmes s'éliminent les uns avec les autres (on parle de somme télescopique). Il ne reste finalement que $S_n = \ln(u_n) - \ln(u_0) = \ln(u_n) - \ln(1) = \ln(u_n)$.

Question 5 : exprimer u_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (u_n).

Il faut utiliser les deux écritures de S_n. Pour tout entier naturel n, $S_n = \frac{3(3-n)}{2}$ et $S_n = \ln(u_n)$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, $\ln(u_n) = \frac{n(3-n)}{2}$ et $u_n = \exp\left(\frac{n(3-n)}{2}\right)$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (3-n) = -\infty$.
Par produit, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(3-n)}{2} = -\infty$.
Pour conclure, nous admettrons le point suivant, qui sera démontré dans un prochain chapitre : si une suite (v_n) tend vers $-\infty$, alors la suite $(\exp(v_n))$ tend vers 0. On a ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

méthodos clés bac

Rédiger une récurrence

La démonstration par récurrence est un classique lors des exercices du bac. Selon les cas, il sera précisé ou non que la démonstration demandée doit se faire par récurrence. Dans le cas où on demande de démontrer un résultat pour tout entier naturel *n*, il est ainsi probable que la démonstration par récurrence mènera à la solution.
Il faut alors bien respecter les différentes étapes de cette démonstration. Prenons l'exemple suivant, issue du programme de première générale : soit (*un*) une suite géométrique de raison $q \neq 0$. Alors, pour tout entier naturel *n*, $u_n = u_0 \times q^n$
• D'abord, il est impératif de bien repérer la propriété que l'on souhaite démontrer. Ici, pour tout entier naturel *n*, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est $u_n = u_0 \times q^n$
• Il faut alors initialiser la démonstration par récurrence. Cette initialisation est presque toujours sous-entendue dans l'énoncé : ici, on souhaite démontrer une propriété pour tout entier naturel *n* (sous-entendu, $n \geqslant 0$).
Ainsi, l'initialisation sera pour *n* = 0.
• L'hérédité commence toujours de la même manière : "supposons qu'il existe un entier naturel *n* pour lequel $\mathcal{P}(n)$ est vraie". Elle doit aboutir à la conclusion $\mathcal{P}(n+1)$est vraie. Il ne faut pas hésiter à écrire les deux propositions au brouillon. $\mathcal{P}(n)$ est $u_n = u_0 \times q^n$, $\mathcal{P}(n+1)$est la proposition $u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}$.

• Ne pas oublier de conclure : cela signale au correcteur que votre démonstration est terminée.
Dans le cas de la proposition ici considérée, la démonstration par récurrence est la suivante :
• Initialisation : $u_0 = u_0 \times q^0$, $\mathcal{P}(0)$est donc vraie.
• Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel *n* pour lequel $\mathcal{P}(n)$est vraie. On a donc $u_n = u_0 \times q^n$
Or, puisque la suite (*un*) est géométrique de raison $q u_{n+1} = q \times u_n$.
Ainsi, $u_{n+1} = q \times u_n = q \times u_0 \times q^n$par hypothèse de récurrence.
Finalement, $u_{n+1} = q^{n+1} \times u_0$.
Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$est vraie.
• On a montré que $\mathcal{P}(0)$ est vraie et s'il existe un entier naturel *n* tel que $\mathcal{P}(n)$est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$l'est également. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

APPLICATION 1
Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

• Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + rn$.

• Pour tout entier naturel n, $10^n - 1$ est un multiple de 9.

• Pour tout entier naturel non nul n, la somme des n premiers nombres impairs vaut n^2

Connaître ses limites usuelles

Pour ce chapitre, il est important de connaître les limites de suites usuelles. D'autres seront apportées dans le chapitre suivant : il s'agit des suites géométriques étudiées en classe de Première.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- Plus généralement, pour tout α>0, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$,
- Pour tout α>0, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/n^\alpha = 0$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$
- Les suites $(\cos(n))$ et $(\sin(n))$ n'admettent pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Les règles de calcul sur les limites sont logiques et intuitives. Par exemple, ajouter quelque chose de constant à l'infini ne change pas : autrement dit $\infty + l = \infty$. Il faut toutefois se rappeler des formes indéterminées qui sont au nombre de 4 :

$$\infty - \infty \quad 0 \times \infty \quad \frac{0}{0} \quad \frac{0}{\infty}$$

En cas de doute, n'hésitez pas à utiliser des suite connues :
• Est-ce que "$\frac{0}{\infty} = 0$" ? Essayons avec certaines suites : $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ tendent vers 0, (n), (n^2) et (n^3) tendent vers $+\infty$. En prenant le quotient d'une des premières par une des dernières, on obtient une suite qui tend vers 0, il ne semble pas y avoir de contre-exemple notable - ce qui ne signifie pas que vous avez forcément raison, mais que votre intuition résiste bien aux exemples.
• Est-ce que "$\frac{\infty}{\infty} = 0$" ? Là encore, on peut essayer avec certaines suites : (n), (n^2) ou (n^3). Or, $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ qui tend vers 0. $\frac{n^3}{n^2} = n$ qui tend vers $+\infty$, $\frac{n}{n} = 1$ qui tend vers 1. Il ne semble pas y avoir de résultat notable dans ce cas : on évitera donc d'utiliser ce résultat faux sur sa copie !
Au brouillon, vous pouvez découper l'expression u_n et indiquer la limite de chaque terme séparément avant de conclure sur la limite. Ici par exemple, on voit que l'on a une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$

$$+\infty \quad +\infty \quad 1 \longrightarrow +\infty$$

$$u_n = \frac{\overset{\uparrow}{n^2} + \overset{\uparrow}{2n} + \overset{\uparrow}{1}}{\underset{\downarrow}{n^3} - \underset{\downarrow}{4} - \underset{\downarrow}{\frac{3}{n^2}}}$$

$$+\infty \quad -4 \quad 0 \longrightarrow +\infty$$

En cas de forme indéterminée, factoriser par le terme dominant (ou terme de plus haut degré) est souvent utile. Ainsi, dans ce cas,

$$u_n = \boxed{\frac{n^2}{n^3}} \times \boxed{\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{4}{n^3}-\frac{3}{n^5}}} \longrightarrow 1$$

$$= \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

La limite de u_n est donc $0 \times 1 = 0$.

APPLICATION 2

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(4n^3 + 2n^2 + 5 + \frac{1}{n^2}\right)$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-5n^3 + 2n^2 + 4n - \frac{5}{n}\right)$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{n^4+n^3+2n-\frac{4}{n}}{-n^3-5n+\frac{6}{n^4}}\right)$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n^7+2n^5-4n^3+2-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^6}}{3n^7+4n^3-5n^2+\frac{2}{n^3}} \right)$

Suites auxiliaires

Pour étudier certaines suites d'apparence complexe, il est courant d'utiliser des suites dites auxiliaires. Pour une suite (u_n) définie par récurrence, on utilise ainsi une suite (v_n) définie à partir des termes de la suite (u_n). Ainsi,

- par définition de la suite (v_n), v_{n+1} s'exprime en fonction de u_{n+1}
- d'après les données de l'énoncé, u_{n+1} s'exprime en fonction de u_n
- en reprenant la définition de la suite (v_n), on exprime cette fois u_n en fonction de v_n.

On construit ainsi une "chaîne" $v_{n+1} \to u_{n+1} \to u_n \to v_n$, qui permet *in fine* d'exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. L'expression ainsi obtenue est plus simple à étudier que celle qui relie u_{n+1} à u_n. Cette méthode est notamment utilisée pour les suites dites arithmético-géométriques (du type $u_{n+1} = au_n + b$).

Exemple

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 8$.
Pour tout entier naturel n, on pose alors $v_n = u_n - 4$. Ainsi , pour tout entier naturel n,

- $v_{n+1} = u_{n+1} - 4$
- $u_{n+1} = 3u_n - 8$. Ainsi, $v_{n+1} = 3u_n - 8 - 4 = 3u_n - 12$
- Puisque $v_n = u_n - 4$, alors $u_n = v_n + 4$. Ainsi, $v_{n+1} = 3u_n - 12 = 3(v_n + 4) - 12 = 3v_n + 12 - 12 = 3v_n$
- On trouve alors $v_{n+1} = 3v_n$. En particulier, la suite (v_n) est géométrique de raison 3, une suite que l'on sait facilement étudier.

En effet, on a alors que, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$. Or $v_0 = u_0 - 4 = 5 - 4 = 1$ et $q = 3$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = 3^n$. Par ailleurs, puisque pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 4$, on a donc $u_n = 3^n + 4$.

APPLICATION 3

Dans chacun des cas suivants exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, puis v_n en fonction de n et enfin u_n en fonction de n.

• $u_0=4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=6u_n+15$ et $v_n=u_n+3$

• $u_0=12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=14u_n+6$ et $v_n=u_n-8$

• $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=13u_n+n-1$ et $v_n=4u_n-6n+15$

• **(Polynésie 2013)** $u_0=12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=3u_n1+2u_n$ et $v_n=u_n1-u_n$.

CORRECTION APPLICATION 1

Notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition $u_n = u_0 + rn$

• $u_0 = u_0 + 0 \times r$. $\mathbb{P}(0)$ est donc vraie.

• Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Ainsi, $u_n = u_0 + rn$. Or, $u_{n+1} = u_n + r = u_0 + rn + r = u_0 + (n+1)r$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

• Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie et s'il existe un entier naturel n tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, on a donc bien $u_n = u_0 + rn$.

Notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition "$10^n - 1$ est un multiple de 9".

• $10^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ qui est un multiple de 9. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie.

$$10^{n+1} - 1 = 10 \times 10^n - 1 = 10 \times (10^n - 1 + 1) - 1 = 10 \times (10^n - 1) + 9$$

Or, $10^n - 1$ est un multiple de 9 et la somme de multiple de 9 est également un multiple de 9. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

• Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie et s'il existe un entier naturel n tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Le $n - ième$ nombre impair vaut $2n - 1$.

Notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition "$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$".

• $\mathcal{P}(1)$ est vraie, on a $1 = 1$.

• Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie.

On a donc $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1 = n^2$. Ainsi,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2(n+1) - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

CORRECTION APPLICATION 2

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^3 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 = 5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. En sommant ces limites, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(4n^3 + 2n^2 + 5 + \frac{1}{n^2}\right) = +\infty)$.

On remarque que l'on a une forme indéterminée de type $\infty - \infty$. Factorisons donc par le terme de plus haut degré.

Pour tout entier naturel non nul n, $-5n^3 + 2n^2 + 4n - \frac{5}{n} = n^3\left(-5 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^4}\right)$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 = -5$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n^4} = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-5 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^4}\right) = -5$.

Puis, par produit, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-5n^3 + 2n^2 + 4n - \frac{5}{n}\right) = -\infty$.

On a une forme indéterminée de type $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise donc le numérateur et le dénominateur par les termes de plus haut degré. Pour tout entier naturel non nul n,

$$\frac{n^4+n^3+2n-\frac{4}{n}}{-n^3-5n+\frac{6}{n^4}}=\frac{n^4}{n^3}\times\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}-\frac{4}{n^5}}{-1-\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^7}}=n\times\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}-\frac{4}{n^5}}{-1-\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^7}}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$ et, en appliquant les règles sur les calculs de limite, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}-\frac{4}{n^5}}{-1-\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^7}}=-1$.

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^4+n^3+2n-\frac{4}{n}}{-n^3-5n+\frac{6}{n^4}}\right)=-\infty$.

On a une forme indéterminée de type $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise donc le numérateur et le dénominateur par les termes de plus haut degré. Pour tout entier naturel non nul n,

$$(\frac{n^7+2n^5-4n^3+2-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^6}}{3n^7+4n^3-5n^2+\frac{2}{n^3}}=\frac{n^7}{n^7}\times\frac{1+\frac{2}{n^5}-\frac{4}{n^4}+\frac{2}{n^7}-\frac{4}{n^8}+\frac{5}{n^{13}}}{3+\frac{4}{n^4}-\frac{5}{n^5}+\frac{2}{n^{10}}}=\frac{1+\frac{2}{n^5}-\frac{4}{n^4}+\frac{2}{n^7}-\frac{4}{n^8}+\frac{5}{n^{13}}}{3+\frac{4}{n^4}-\frac{5}{n^5}+\frac{2}{n^{10}}}$$

En appliquant les règles d'opération sur les limites, on obtient $\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{n^5}-\frac{4}{n^4}+\frac{2}{n^7}-\frac{4}{n^8}+\frac{5}{n^{13}}}{3+\frac{4}{n^4}-\frac{5}{n^5}+\frac{2}{n^{10}}}=\frac{1}{3}$

CORRECTION APPLICATION 3

Pour tout entier naturel n,
- $v_{n+1}=u_{n+1}+3$
- $u_{n+1}=6u_n+15$ d'où $v_{n+1}=6u_n+18$
- $u_n=v_n-3$ d'où $v_{n+1}=6v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison 3 et $v_0=u_0+3=7$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n=7\times 3^n$ et $u_n=7\times 3^n-3$.

Pour tout entier naturel n,
- $v_{n+1}=u_{n+1}-8$
- $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+6$ d'où $v_{n+1}=\frac{1}{4}u_n-2$
- $u_n=v_n+8$ d'où $v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et $v_0=u_0-8=4$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n=4\times\frac{1}{4^n}=\frac{1}{4^{n-1}}$ et $u_n=\frac{1}{4^{n-1}}+8$.

Pour tout entier naturel n,
- $v_{n+1}=4u_{n+1}-6(n+1)+15=4u_{n+1}-6n+9$
- $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-1$ d'où $v_{n+1}=\frac{4}{3}u_n+4n-4-6n+9=\frac{1}{3}u_n-2n+5$
- $u_n=\frac{1}{4}(v_n+6n-15)$ d'où $v_{n+1}=\frac{4}{3}\times\frac{1}{4}(v_n+6n-15)-2n+5=\frac{1}{3}v_n$

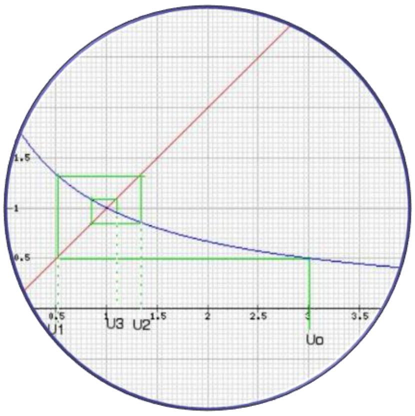
La suite (v_n) est géométrique, de raison $\frac{1}{3}$ et $v_0=4u_0-6\times 0+15=19$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n=19\times\frac{1}{3^n}$ et $u_n=\frac{19}{4\times 3^n}+\frac{3}{2}n-\frac{15}{4}$

Pour tout entier naturel n,
- $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}$
- $u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+2u_n}$ d'où $v_{n+1}=\frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\frac{3u_n}{1+2u_n}}=\frac{3u_n}{1+2u_n}\times\frac{1+2u_n}{1+2u_n-3u_n}=\frac{3u_n}{1-u_n}$
- $v_n=\frac{u_n}{1-u_n}$. Ainsi, $v_{n+1}=3v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison 3 et $v_0=\frac{u_0}{1-u_0}=1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n=3^n$.

Par ailleurs, puisque $v_n=\frac{u_n}{1-u_n}$, on a $(1-u_n)v_n=u_n$ d'où $u_n(1+v_n)=v_n$ et $u_n=\frac{v_n}{1+v_n}=\frac{3^n}{1+3^n}$

CHAPITRE 2
COMPARAISON DES LIMITES DE SUITES



Au précédent chapitre, nous avons étudié le principe de limite d'une suite et quelques propriétés sur celles-ci. Dans ce deuxième chapitre, nous aborderons des théorèmes qui permettent d'étudier des suites d'apparence complexes en les encadrant par d'autres suites dont le comportement est connu.

COMPÉTENCES VISÉES

- Etablir la convergence ou la divergence vers +∞ ou -∞ d'une suite, notamment en utilisant les règles d'opération sur les limites.
- Déterminer la limite d'une suite géométrique selon sa raison.
- Majorer, minorer, encadrer une suite par une autre suite connue.
- Etudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.

PRÉ-REQUIS

- Notion de suite étudiée en Première Générale : génération par une formule explicite, par récurrence, sens de variation.
- Fonctions de références : variations, signe, allure de la courbe représentative.
- Calcul algébrique : résolution d'équation du premier ou second degré, calcul avec des puissance.

L'ANECDOTE

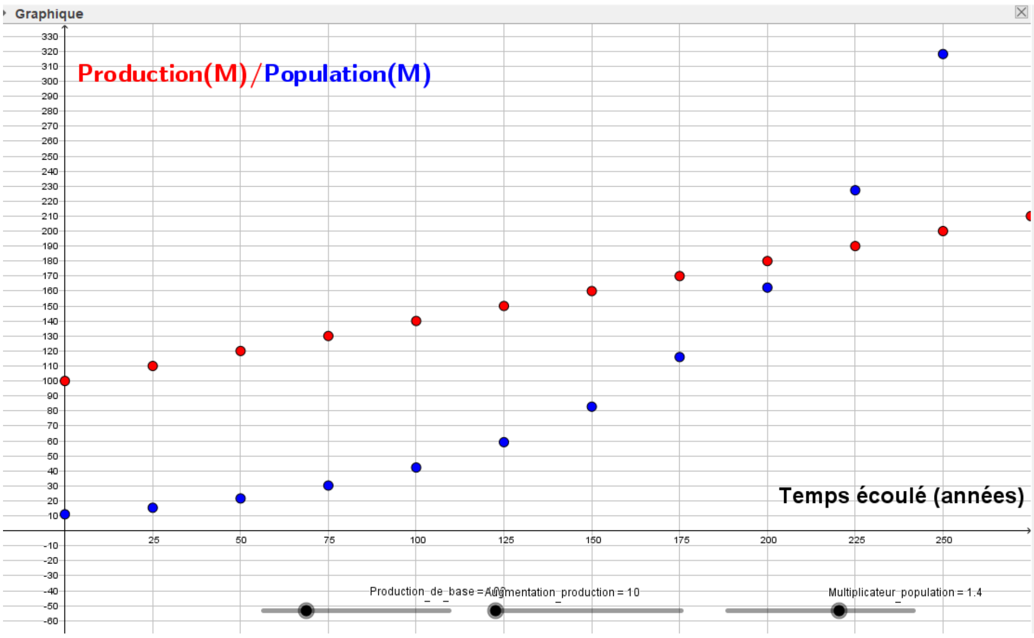
Thomas Malthus est un économiste britannique notamment connu pour son Essay on the principle of population. Dans cet essai, Malthus met en parallèle la croissance d'une population de Grande-Bretagne et l'augmentation de sa production alimentaire. D'après ses modèles, sans aucun contrôle, la population dépassera largement les capacités de production. Malthus en vient alors à faire des propositions radicales, notamment un contrôle de la natalité ou la suspension de l'aide aux personnes dans le besoin.

Le nom de Malthus a ainsi donné l'adjectif "malthusien" et est à l'origine de la doctrine du malthusianisme. D'ailleurs, la raison d'une suite géométrique servant à modéliser une population selon ce modèle portait le nom de paramètre malthusien.

Thomas Malthus (1766 - 1834)

Les simulations selon le modèle de Malthus peuvent être trouvées sur le livret Geogebra du module https://www.geogebra.org/m/kec8nywn#material/mbkxehcb

Vous pouvez notamment faire varier les paramètres du modèle pour comparer les différentes évolutions



Tableur

	A	B	C
1	Année	Pop	Prod
2	0	11	100
3	25	15.4	110
4	50	21.56	120
5	75	30.18	130
6	100	42.26	140
7	125	59.16	150
8	150	82.82	160
9	175	115.95	170
10	200	162.34	180
11	225	227.27	190
12	250	318.18	200
13	275	445.45	210
14	300	623.63	220
15	325	873.09	230
16	350	1222.32	240
17	375	1711.25	250
18	400	2395.75	260
19	425	3354.05	270
20			
21			
22			
23			

ACTIVITE 2.1

Dans son essai, Malthus estime que la production alimentaire en Grande-Bretagne augmente de manière constante tous les 25 ans.

1. Supposons qu'en 1798, la production permette de subvenir aux besoins de 30 millions de personnes et que tous les 25 ans, la production permet de subvenir aux besoins de 10 millions de personne supplémentaire. Combien de personnes pourront être nourries en 2023 ?

2. Quelle est la limite de la production lorsque les années augmentent ? Cela vous semble-t-il cohérent ?

Malthus estime que la population de Grande-Bretagne doublera tous les 25 ans. En 1798, celle-ci était de 11 millions d'habitants.

3. Quelle serait, selon ce modèle, la population de Grande-Bretagne en 2023 ?

4. En quelle année environ la population sera-t-elle trop nombreuse pour être approvisionnée

5. Que semble-t-il se passer pour la population lorsque son taux de multiplication est inférieur strictement à 1 ? Quelle semble être sa limite ?

6. En faisant varier les paramètres du modèle, expliquer cette phrase : la croissance d'une suite géométrique est supérieur à la croissance d'une suite arithmétique.

L'ANECDOTE

Il s'agit là d'une comparaison classique de limite : pour déterminer la limite d'une suite géométrique de raison $q > 1$, on peut montrer que celle-ci devient plus grande à partir d'un certain rang que n'importe quelle suite arithmétique de raison positive. Or, on sait que cette suite arithmétique tend vers $+\infty$, puisque son terme général est de la forme $u_0 + rn$ avec $r > 0$. Ainsi, la suite géométrique tend vers $+\infty$.
Ce résultat est utilisé dans de nombreux domaines : en finances lorsqu'il s'agit d'emprunt à intéràªts composés ou en épidémiologie lorsque l'on étudie la propagation d'une épidémie. Dans ce dernier cas, on s'intéresse par exemple au R, le taux de reproduction de base de la maladie. S'il est supérieur à 1, la maladie gagne du terrain de manière très rapide.

SOLUTIONS DE L'ACTIVITE 2.1

1. Entre 1798 et 2023, il se passe 225 ans, soit 11 périodes de 25 ans. La production a donc été augmenté de 110 millions et peut subvenir aux besoins de 140 millions de personnes.
2. La limite de la suite est $+\infty$, ce qui semble peu possible.
3. Selon ce modèle, la population en grande Bretagne serait de $11 \times 2^1 1 = 22528$ millions d'habitants !
4. La production devient insuffisante dès l'année 1873
5. Lorsque le taux de multiplication de la population est inférieur à 1, la population décroit et tend vers 0.
6. Peu importe les paramètres choisis, tant que le taux de multiplication est supérieur à 1, il arrive toujours un moment à partir duquel la production est insuffisante pour couvrir les besoins de la population.

01 COMPARAISON DES LIMITES DE SUITE

Théorèmes de comparaison

L'ESSENTIEL

On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Remarque

il n'y a rien de surprenant ici, si l'on fait preuve d'un brin de logique. Si une suite est plus grande qu'une suite qui devient plus grande que n'importe quel réel, alors elle devient elle-même plus grande que n'importe quel réel.

Démonstration

Traduisons le fait qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$:
il existe un entier N tel que, pour tout $n > N$, $u_n \leqslant v_n$.
Soit A un réel. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier N' tel que, pour tout $n > N'$, $u_n \geqslant A$.
Ainsi, si $n > N'$ et $n > N$, on a que $v_n \geqslant u_n \geqslant A$, c'est-à -dire $v_n \geqslant A$.
Finalement, $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Exemple

Pour tout n, on pose $v_n = n + \cos(n)$.
On sait que, pour tout n, $\cos(n) \geqslant -1$.
Ainsi, pour tout n, $v_n \geqslant n - 1$. Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty$.
Les termes de la suite (v_n) sont plus grands qu'une suite qui tend vers $+\infty$, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

L'ESSENTIEL

On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

Remarque

Il s'agit d'une version similaire au premier théorème de comparaison : une suite plus petite qu'une suite qui tend vers $-\infty$ tend également vers $-\infty$.

A VOUS DE JOUER 15

Démontrez ce résultat en vous inspirant de la démonstration du premier théorème de comparaison.

....

....

....

À VOUS DE JOUER 16

A l'aide d'une majoration ou d'une minoration par une autre suite, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

- $u_n = n + 3 \times (-1)^n$
- $u_n = n + \frac{\cos(n)}{n}$ pour $n > 0$
- $u_n = n\,(\sin(n) - 3)$
- $u_n = \sin(3n^2 + 1) - n^3$

02 COMPARAISON DES LIMITES DE SUITE

Théorèmes d'encadrement

L'ESSENTIEL

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que, à partir d'un certain rang,
$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Si les suites (u_n) et w_n sont convergentes et de même limite, alors la suite (v_n) est également convergente, de même limite que les deux autres.

Démonstration

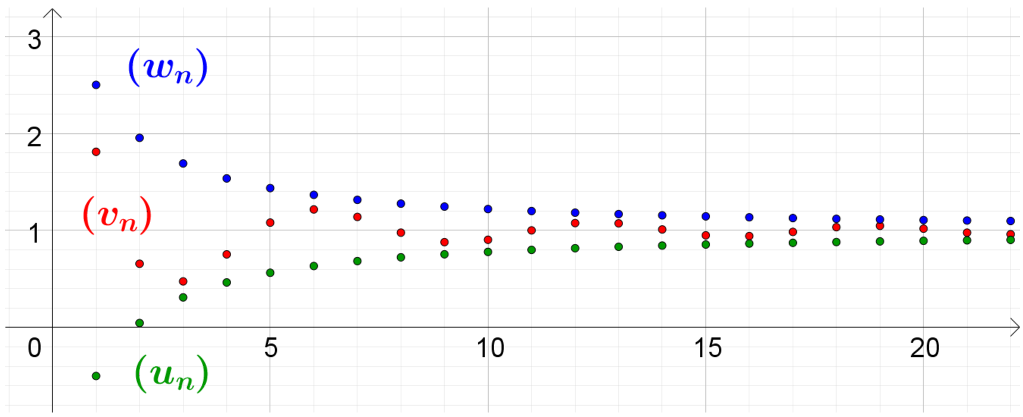
Notons N l'entier à partir duquel, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Notons l la limite commune des suites (u_n) et (w_n). Soit ε un réel strictement positif.

- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, il existe un entier N_u à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle $]l-\varepsilon\,;\,l+\varepsilon[$.
- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, il existe un entier N_w à partir duquel tous les termes de la suite (w_n) sont dans l'intervalle $]l-\varepsilon\,;\,l+\varepsilon[$.
- Notons $N_v = max(N, N_u, N_w)$. Pour tout $n \geqslant N_v$, on a alors $u_n \in]l-\varepsilon\,;\,l+\varepsilon[$.

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

Illustration

Sur l'exemple suivant, trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont représentées. Pour tout n, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si l'on sait que (u_n) et (w_n) sont convergentes de même limite, on en déduit la limite de la suite (v_n).



L'ANECDOTE

Ce théorème est également appelé "théorème des gendarmes". Les suites (w_n) et (u_n) jouent ici le rôle des gendarmes qui encerclent leur cible, la suite (v_n). Peu à peu, les gendarmes se dirigent vers la prison. La suite (v_n), encerclée, n'a d'autre choix que de les suivre.
D'autres noms plus ou moins évocateurs sont donnés à ce théorème : théorème des carabiniers ou théorème du sandwich par exemple.

Exemple

Pour tout $n > 0$, on pose $u_n = 3 + \frac{\cos(n)}{n}$.
On sait que, pour tout n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$. Ainsi, pour tout n, $3 - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \frac{1}{n}$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3 - \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3$.
Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, la suite (v_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$.

À VOUS DE JOUER 17

A l'aide d'un encadrement par deux suites convergentes, déterminez la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

- $u_n = \frac{3+\sin(n)}{n^3}$ pour $n > 0$
- $u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour $n > 0$

03 COMPARAISON DES LIMITES DE SUITE

Suites géométriques

INÉGALITE DE BERNOULLI

L'ESSENTIEL

Inégalité de Bernoulli

Soit a un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1+na$

Démonstration

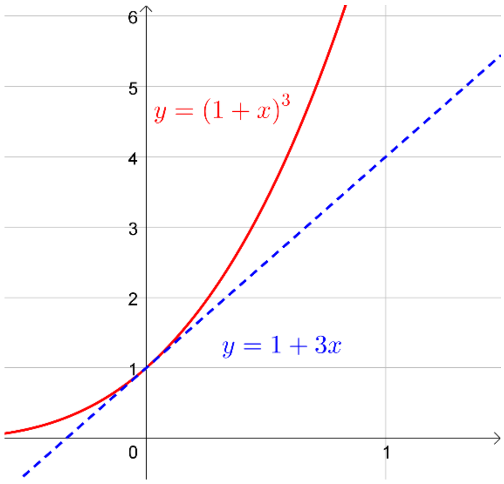
Nous allons démontrer cette propriété par récurrence.

Pour un entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition "$(1+a)^n \geqslant 1+na$".

- **Initialisation** : prenons $n=0$. $(1+a)^0 = 1$ et $1+0\times a = 1$. On a bien $(1+a)^0 \geqslant 1+0\times a$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

• Supposons qu'il existe un entier n tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a donc $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
En multipliant des deux côtés de l'inégalité par $(1+a)$, qui est strictement positif, on obtient $(1+a)^{n+1} \geqslant (1+na)(1+a)$.
Or, $(1+na)(1+a) = 1+na+a+na^2 = 1+(n+1)a+na^2 \geqslant 1+(n+1)a$.
Ainsi, $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
• Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Remarque
La droite d'équation $y = 1+nx$ n'est autre que la tangente à la courbe d'équation $y = (1+x)^n$ à l'abscisse 0. L'inégalité de Bernoulli dit donc que la courbe se trouve au-dessus de la tangente lorsque $x > 0$.

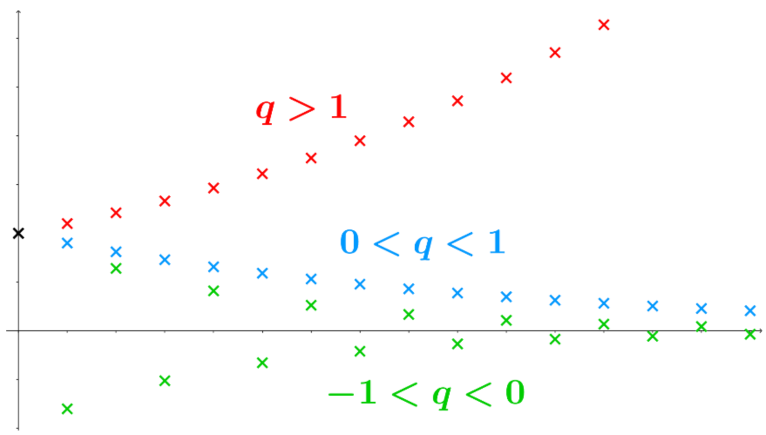


LIMITE D'UNE SUITE GEOMÉTRIQUE

L'ESSENTIEL
Soit q un réel

- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = u_0$
- Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q \leqslant -1$, la suite (q^n) n'admet pas de limite.

Illustration
Voici l'allure des représentations graphiques des suites (q^n), selon la valeur de q.



Démonstration : cas $q > 1$.
Dans ce cas, il existe un réel a strictement positif tel que $q = 1 + a$.
Ainsi, pour tout entier n, $q^n = (1 + a)^n$.
Or, d'après l'inégalité de Bernoulli, $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}(1 + na) = +\infty$.
Ainsi, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Démonstration : cas $-1 < q < 1$.
• Si $q = 0$, le résultat est immédiat puisque la suite est constante égale à 0 à partir du rang 1.
• Si $0 < q < 1$,notons $p = \frac{1}{q}$. On a alors $p > 1$ et $q^n = \frac{1}{p^n}$.
Ainsi, d'après le point précédent, $\lim\limits_{n\to+\infty} p^n = +\infty$ et, en prenant l'inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
• Si $-1 < q < 0$, alors, pour tout entier n, $0 < |q| < 1$.
Pour tout entier n, on a alors $-|q|^n < q^n < |q|^n$.
Or, d'après le cas précédent, $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(-|q|^n) = 0$.
D'après le théorème d'encadrement, on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

Démonstration : cas $q \leqslant -1$.
Dans ce cas, $q^2 \geqslant 1$. Soit k un entier relatif.
• D'une part, $q^{2k} = (q^2)^k$. Ainsi, $\lim\limits_{k\to+\infty} q^{2k} = +\infty$.
• D'autre part,$q^{2k+1} = q \times (q^2)^k$, qui est le produit d'un nombre négatif et du terme d'une suite qui tend vers $+\infty$.
Ainsi, $\lim\limits_{k\to+\infty} q^{2k+1} = -\infty$
• Les termes de rangs pairs tendent vers $+\infty$ et les termes de rangs impairs tendent vers $-\infty$: la suite (q^n) ne peut admettre de limite.

Exemple
On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $q = 4$.
Pour tout entier n, $u_n = -2 \times 4^n$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$.
Ainsi, en faisant la limite du produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exemple
Soit q un réel tel que $-1 < q < 1$.
Pour tout réel n, on note $u_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k$.
On sait que, pour tout n, $u_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Or, puisque $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-q}$

L'ANECDOTE

Mathématicien et philosophe grec de l'Antiquité, Zénon d'Élée (-490 - -430 av J.C) est à l'origine de plusieurs paradoxes dont l'un met en scène Achille, héros grec, et une tortue. Supposons qu'Achille et une tortue fasse une course.
Achille court 10 fois plus vite que la tortue, aussi lui laisse-t-il un bon kilomètre d'avance. La course débute et Achille parcourt le premier kilomètre. Seulement, pendant ce temps, la tortue a parcouru 100 mètres. Achille s'empresse alors de parcourir les 100 mètres, mais pendant ce temps, la tortue en parcourt 10 supplémentaires. Et ainsi de suite. Ce raisonnement aboutit à la conclusion contre-intuitive qu'Achille ne rattrapera jamais la tortue.
Essayons pourtant de calculer la distance parcouru par la tortue : celle ci parcourt 100 mètres, puis 10, puis 1, puis 0,1 et ainsi de suite. Ce sont les termes d'une suite géométrique de raison 0,1. La somme de ces termes après k étapes vaut alors $100 \times \frac{1-0{,}1^{k+1}}{1-0{,}1}$, soit $\frac{1000}{9} \times (1 - 0,1^k)$. Cependant, puisque $0 \leqslant 0{,}1 \leqslant 1$, la limite $\lim\limits_{k\to+\infty} 0{,}1^k$ est 0. Après une infinité d'étapes, la tortue aura donc parcouru $\frac{1000}{9}$ mètres : en un temps infini, la tortue a parcouru une distance finie. Ces pièges de l'infini nous permettent de mieux comprendre pourquoi les Grecs s'en méfiaient et refusaient de l'utiliser.

À VOUS DE JOUER 18

Déterminez, si elle existe, la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

- $u_n = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$
- (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 1.01$ et de premier terme $u_0 = 10^{-54}$
- $u_n = 3 + 6 \times \left(\frac{7}{8}\right)^n$
- $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$
- $u_n = 2^n\, e^{-n}$
- $u_n = 3^n - 2^n$

COMPARAISON DES LIMITES DE SUITE

04

Convergence de suites monotones

THÉORÈMES DE CONVERGENCE

L'ESSENTIEL

Soit (u_n) une suite croissante.

- Si la suite (u_n) est majorée par un réel L, alors la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant L$
- Si la suite (u_n) n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$.

Demonstration du second point

Supposons que la suite (u_n) ne soit pas majorée.
Alors, pour tout réel A, il existe un entier N tel que $u_N \geqslant A$.
Or, puisque la suite est croissante, ceci implique que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N \geqslant A$, c'est-à -dire $u_n \geqslant A$.
On a montré qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suites sont supérieurs à A, pour n'importe quel réel A. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 4$.

À VOUS DE JOUER 19

Montrez par récurrence que la suite (u_n) est croissante et que pour tout entier n, $u_n \leqslant 5$. On admettra ces deux points pour la suite de l'exemple.

Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée.
Elle est donc convergente : on note $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
Pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 4$.
Puisque la suite (u_n) est convergente, on peut passer à la limite dans cette égalité.
Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}u_n + 4\right)$
Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}u_n + 4\right) = \frac{1}{5}l + 4$.
Ainsi, l est solution de l'équation $l = \frac{1}{5}\, l + 4$. On a donc $l = 5$.

Remarque

il est important de montrer que la suite converge avant de passer à la limite.
En effet, prenons la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier n, $v_{n+1} = 2v_n + 3$.
D'après le même raisonnement, si (v_n) admet pour limite l, alors $l = 2l + 3$, soit $l = -3$… ce qui est absurde. On voit facilement que pour tout entier n, $v_n > 0$.
On a en fait $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$!

L'ESSENTIEL

Soit (u_n) une suite décroissante.

- Si la suite (u_n) est minorée par un réel l, alors la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \geqslant l$
- Si la suite (u_n) n'est pas minorée, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \; = -\infty$.

Démonstration

Il suffit de remarquer que si la suite (u_n) est décroissante, alors la suite $(-u_n)$ est croissante.
On se retrouve alors dans le cas précédent.

À VOUS DE JOUER 20

On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 6$ et, pour tout entier n, $w_{n+1} = \frac{1}{3}w_n + 1$.

- Montrez que pour tout entier naturel n, $w_n \geqslant \frac{3}{2}$

....

....

....

....

....

- Montrez que la suite (w_n) est décroissante.

....

....

....

....

....

• En déduire que la suite (w_n) est convergente et déterminer sa limite.

05 COMPARAISON DES LIMITES DE SUITE

Algorithmique : recherche d'un seuil

L'ESSENTIEL

Lorsqu'une suite est strictement monotone, il est courant de rechercher la valeur à partir de laquelle elle dépassera un certain seuil. Il est possible de résoudre un tel problème à l'aide d'une résolution d'équation ou d'un algorithme.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 9$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1$.

A VOUS DE JOUER 21

Démontrez que cette suite est strictement décroissante et que, pour tout entier n, $u_n \geqslant 2$.

Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite (u_n) ?

Dans la suite de cet exemple, on admettra que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.
D'après la définition de la limite, pour tout ε, il existe un entier N tel que, pour tout $n > N$, on a $u_n \in]2-\varepsilon ; 2+\varepsilon[$.
La suite (u_n) étant ici décroissante, il suffit de trouver le premier rang n pour lequel $u_n \leqslant 2+\varepsilon$: les termes suivants seront forcément compris entre 2, qui est la limite, et $2+\varepsilon$, puisque la suite est décroissante.

L'algorithme fonctionne ainsi :
• Si la valeur actuelle de u_n est inférieure à $2-\varepsilon$, alors on s'arrête ici et on renvoie la valeur du rang n.
• Sinon, on calcule la valeur suivante et on recommence tant que la condition $u_n \leqslant 2+\varepsilon$ n'est pas respectée.

Pseudo-algorithme

```
Variable d'entrée : ε
U = 9
N = 0
Tant que U > 2 + ε
   U = U/2 + 1
   N = N + 1
Fin Tant que
Renvoyer N
```

La valeur de n est stockée dans la variable N et celle de u_n est stockée dans la variable N. A chaque étape, le terme suivant de la suite est calculé : N est augmenté de 1 et on applique la relation de récurrence à u_n. Le programme renvoie alors la première valeur de n telle que u_n n'est pas strictement supérieur à $2+\varepsilon$.

Programme Python

```python
def seuil(epsilon):
    u=9
    n=0
    while u>2+epsilon:
        u=u/2+1
        n=n+1
    return n
```

Le fonctionnement de ce programme Python est en tout point similaire au programme décrit par le pseudo-algorithme plus haut.

À VOUS DE JOUER 22

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1000$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0.8u_n + 1000$.
• Montrez que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 5000$.
• Montrez que la suite (w_n) est décroissante.
• Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
• On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5000$.écrire un programme en Python qui prend en entrée un réel ε et qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > 5000-\varepsilon$.

....

....

....

....

06 COMPARAISON DES LIMITES DE SUITE

Approfondissement : suites adjacentes

L'ESSENTIEL

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

- La suite (u_n) est croissante.
- La suite (v_n) est décroissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

Exemple

Pour tout entier $n > 0$, on pose $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

- La suite (u_n) est croissante. En effet, pour tout entier n,

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

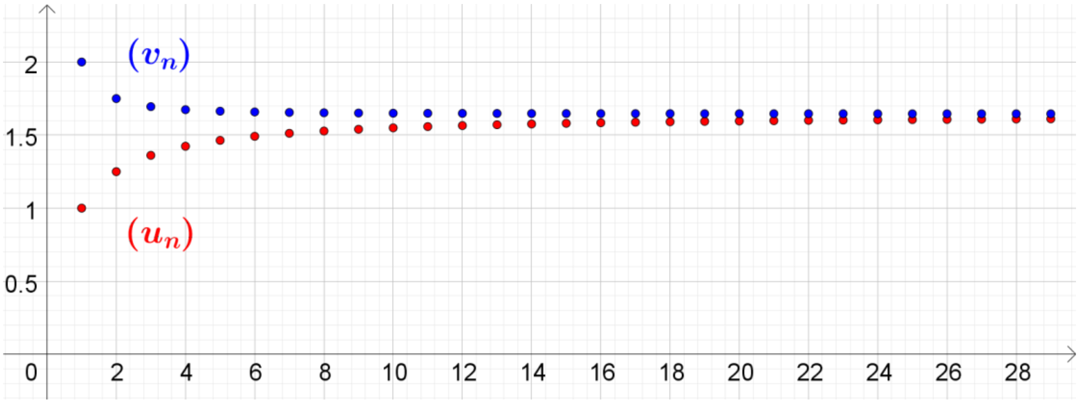
- La suite (v_n) est décroissante, En effet, pour tout entier n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n}{n(n+1)^2} + \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{-1}{(n+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

- Pour tout entier n, $u_n - v_n = -\frac{1}{n}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Illustration

Les suites (u_n) et (v_n) de l'exemple précédent sont représentées ci-dessous.



À VOUS DE JOUER 23

Pour tout $n > 0$, on pose $u_n = 1 - \frac{1}{n^3}$ et $v_n = \frac{n^2+1}{n^2}$.

Montrez que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

L'ESSENTIEL

Soit (u_n) et (v_n) des suites adjacentes. Les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$.

À VOUS DE JOUER 24

Démonstration guidée. On considère deux suites adjacentes (u_n) et (v_n). On suppose que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

- Pour tout entier n, on pose $w_n = u_n - v_n$. Montrez que la suite (w_n) est croissante.

- Quelle est la limite de la suite (w_n) ? En déduire que, pour tout entier n, $u_n \leqslant v_n$.

- En déduire que (u_n) est majorée et que (v_n) est minorée. Que peut-on en conclure sur ces deux suites ?

- En utilisant les règles de calcul sur les limites, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Exemple

Dans l'exemple précédent, les suites (u_n) et (v_n) ont pour limite commune $\frac{\pi^2}{6}$.

EXERCICES

Abordons maintenant une série d'exercices, afin de vérifier vos connaissances.
Les réponses aux exercices se trouvent en fin de manuel.

EXERCICE 17 Utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement

Dans chacun des cas suivants, en utilisant un encadrement, une minoration ou une majoration par d'autres suites de limites connues, donnez la limite de la suite (u_n).

- Pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \frac{2+\cos(2n)+4\sin(n)}{n}$

....

....

....

- Pour tout entier naturel n, $u_n = n + 3 \times (-1)^n$

....

....

....

- Pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 2 + \frac{\sin(n)}{(-1)^n \times n}$

....

....

....

- Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{18n^3}{2\sin(n)+3\cos(2n)-9}$

....

....

....

EXERCICE 18 Forme indéterminée et encadrement

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \frac{6n+2\times(-1)^n}{3n+4\times(-1)^{n+1}}$.

Déterminez, si elle existe, la limite de la suite (u_n)

....

....

....

EXERCICE 19 **Suites géométriques**

Dans chacun des cas suivants, donner la limite de la suite (u_n).

- Pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- Pour tout entier naturel n, $u_n = -2 \times 4^n$

- Pour tout entier naturel n, $u_n = 3 + 40 \times \left(-\frac{62}{63}\right)^n$

- Pour tout entier naturel n, $u_n = 4^n e^{-n}$

EXERCICE 20 **Comparaison de suites géométriques**

Soit a et b deux réels positifs. Déterminez la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a^n - b^n$. On distinguera les cas $a < b$, $a = b$ et $a > b$.

EXERCICE 21

Suite arithmético-géométrique : découverte guidée

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 100$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 10$.

Partie A : première approche

1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

2. A l'aide d'un tableur, d'un algorithme ou d'une calculatrice, calculez les premiers termes de cette suite. Quelle semble être sa limite ?

3. Montrez que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 40$

4. Montrez que la suite (u_n) est décroissante.

5. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifiez.

Partie B : déterminer la limite

6. Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n - 40$. Soit donc n un entier naturel.

   (a) Exprimez v_{n+1} en fonction de u_{n+1}

   (b) Rappelez la relation qui lie u_{n+1} et u_n.

   (c) Exprimez u_n en fonction de v_n.

   (d) En combinant les résultats des questions précédentes, montrez que $v_{n+1} = 0.75v_n$

   ---

7. (v_n) est donc une suite géométrique. Quelle est sa raison ? Que vaut v_0 ?

---

8. Pour tout entier naturel n, exprimez v_n en fonction de n.

---

9. En rappelant la relation qui lie v_n et u_n, montrez alors que pour tout entier naturel n, $u_n = 40 + 60 \times 0.75^n$.

---

10. En déduire la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 22 **Suite arithmético-géométrique : moins guidé**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 6$. Pour tout entier naturel n, on pose alors $v_n = u_n - 3.6$.

1. Soit n un entier naturel. Exprimez v_{n+1} en fonction de v_n.

---

2. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? On précisera sa raison et son premier terme v_0.

3. Exprimez v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminez sa limite.

EXERCICE 23 Série harmonique et constante d'Euler

Pour tout entier naturel non nul n, on note $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = u_n - \ln(n)$

Partie A : étude de la suite (u_n)

1. Montrez que la suite (u_n) est strictement croissante.

2. Montrez que pour tout entier naturel n, $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.

3. En déduire qu'il est impossible que la suite (u_n) converge. Que peut-on en déduire sur la limite de (u_n) ?

4. Complétez le programme suivant, écrit en Python, qui contient une fonction **seuil** qui prend en entrée un réel A et qui renvoie la première valeur de n telle que $u_n \geqslant A$.

```
def seuil(A):
    N = ...
    U = ...
    while ... :
        U = ...
        N = ...
    return ...
```

Partie B : étude de la suite (v_n)

5. Variations de la suite (v_n)

(a) Etudiez la fonction $x \mapsto ln(1-x)+x$ sur $[0;1[$.

(b) Montrez que pour tout entier naturel non nul n, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$.

(c) A l'aide des deux questions précédentes, montrez que la suite (v_n) est décroissante.

6. Signe de la suite (v_n)

(a) Montrez que pour tout x dans l'intervalle [0;1], ln(1+x)⩽x.

EXERCICES

(b) En déduire que pour tout entier naturel non nul, $\ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \frac{1}{n}$

(c) Montrez alors par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $\ln(n+1) \leqslant u_n$.

(d) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $v_n \geqslant 0$

(e) En combinant les résultats des questions précédentes, montrez que $v_{n+1} = 0.75v_n$

EXERCICE 24 **Méthode de Héron**

Soit a un réel strictement positif. On définit la suite (u_n) par $u_0 \in]\sqrt{a}; +\infty[$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

1. On considère la fonction f définie pour tout $x \in [\sqrt{a}; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Montrez que f est croissante sur $[\sqrt{a}; +\infty[$.

2. Que vaut $f(\sqrt{a})$?

3. Montrez par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{a}$.

4. Montrez que la suite (u_n) est décroissante. Que peut-on en déduire sur la convergence de (u_n) ?

5. On admet que la limite l le la suite (u_n) vérifie $f(l) = l$. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Cette méthode servant à estimer la racine carrée d'un nombre strictement positif se nomme la "Méthode de Héron" et est notamment utilisée dans les calculatrices.

EXERCICE 25 **Exercice type Bac : Bac ES Amérique du Nord 2019**

Une commune dispose de 380 voitures et propose un système de locations de ces voitures selon les modalités suivantes :
• chaque voiture est louée pour une durée d'un mois ;
• la location commence le premier jour du mois et se termine le dernier jour du même mois ;
• le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois.
A la fin du mois de janvier 2019, 280 voitures ont été louées avec ce système de location.
Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de voitures.
Pour cela il modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite (u_n), où , pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de voitures louées le n-ième mois après le mois de janvier 2019. Ainsi $u_0 = 280$.
On admet que cette modélisation conduit à l'égalité : $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 42$.

Partie A : étude de la suite (u_n)

1. Combien de voitures ont-elles été louées avec ce système de location au mois de février 2019 ?

----

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 420$

(a) Montrez que la suite (v_n) est géométrique.On précisera le premier terme v_0 et la raison.

(b) Pour tout entier naturel n, exprimez v_n en fonction de n et montrer que $u_n = -140 \times 0,9^n + 420$.

----

3. Déterminez la limite de la suite (u_n) puis l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

----

4. La commune, qui possède initialement 380 véhicules, envisage d'acheter des voitures supplémentaires pour répondre à la demande. Le responsable de la commune souhaite prévoir à partir de quelle date le nombre de voitures sera insuffisant.
On souhaite utiliser l'algorithme ci-dessous :

$N \leftarrow 0$
$U \leftarrow 300$
Tant que U ...
    $N \leftarrow N+1$
    $U \leftarrow \cdots$
Fin Tant que

(a) Recopiez et complétez l'algorithme

(b) Que contient la variable N à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

(c) En déduire le mois durant lequel la commune devra augmenter le nombre de voitures

----

----

5. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation : $-140 \times 0,9^n + 420 > 380$
Retrouvez le résultat précédent.

Vous pouvez maintenant faire et envoyer le devoir n°1