COURS PI

L'école sur-mesure

de la Maternelle au Bac, Établissement d'enseignement privé à distance, déclaré auprès du Rectorat de Paris

Terminale - Module 3 - Géométrie dans l'espace

Mathématiques

v.5.1

- **Guide de méthodologie**
  pour appréhender notre pédagogie
- **Leçons détaillées**
  pour apprendre les notions en jeu
- **Exemples et illustrations**
  pour comprendre par soi-même
- **Prolongement numérique**
  pour être acteur et aller + loin
- **Exercices d'application**
  pour s'entraîner encore et encore
- **Corrigés des exercices**
  pour vérifier ses acquis

www.cours-pi.com

Paris & Montpellier

EN ROUTE VERS LE BACCALAURÉAT

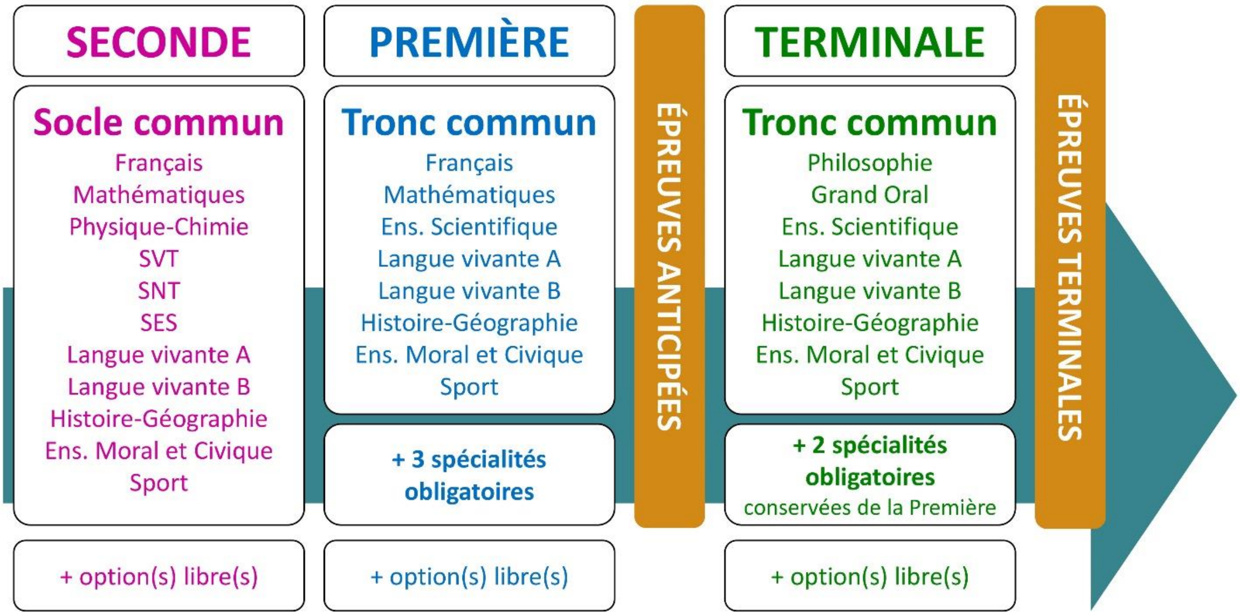
Comme vous le savez, **la réforme du Baccalauréat** est entrée en vigueur progressivement jusqu'à l'année 2021, date de délivrance des premiers diplômes de la nouvelle formule.

Dans le cadre de ce nouveau Baccalauréat, **notre Etablissement**, toujours attentif aux conséquences des réformes pour les élèves, s'est emparé de la question avec force **énergie** et **conviction** pendant plusieurs mois, animé par le souci constant de la réussite de nos lycéens dans leurs apprentissages d'une part, et par la **pérennité** de leur parcours d'autre part. Notre Etablissement a questionné la réforme, mobilisé l'ensemble de son atelier pédagogique, et déployé tout **son savoir-faire** afin de vous proposer un enseignement tourné continuellement vers l'**excellence**, ainsi qu'une scolarité tournée vers la **réussite**.

- Les **Cours Pi** s'engagent pour faire du parcours de chacun de ses élèves un **tremplin vers l'avenir**.
- Les **Cours Pi** s'engagent pour ne pas faire de ce nouveau Bac un diplôme au rabais.
- Les **Cours Pi** vous offrent **écoute** et **conseil** pour coconstruire une **scolarité sur-mesure**.

LE BAC DANS LES GRANDES LIGNES

Ce nouveau Lycée, c'est un enseignement à la carte organisé à partir d'un large tronc commun en classe de Seconde et évoluant vers un parcours des plus spécialisés année après année.



CE QUI A CHANGÉ

- Il n'y a plus de séries à proprement parler.
- Les élèves choisissent des spécialités : trois disciplines en classe de Première ; puis n'en conservent que deux en Terminale.
- Une nouvelle épreuve en fin de Terminale : le Grand Oral.
- Pour les lycéens en présentiel l'examen est un mix de contrôle continu et d'examen final laissant envisager un diplôme à plusieurs vitesses.
- Pour nos élèves, qui passeront les épreuves sur table, le Baccalauréat conserve sa valeur.

CE QUI N'A PAS CHANGÉ

- Le Bac reste un examen accessible aux candidats libres avec examen final.
- Le système actuel de mentions est maintenu.
- Les épreuves anticipées de français, écrit et oral, tout comme celle de spécialité abandonnée se dérouleront comme aujourd'hui en fin de Première.

A l’occasion de la réforme du Lycée, nos manuels ont été retravaillés dans notre atelier pédagogique pour un accompagnement optimal à la compréhension. Sur la base des programmes officiels, nous avons choisi de créer de nombreuses rubriques :

- **Suggestions de lecture** pour s’ouvrir à la découverte de livres de choix sur la matière ou le sujet
- **Réfléchissons ensemble** pour guider l'élève dans la réflexion
- **L’essentiel** pour souligner les points de cours à mémoriser au cours de l’année
- **À vous de jouer** pour mettre en pratique le raisonnement vu dans le cours et s’accaparer les ressorts de l’analyse, de la logique, de l’argumentation, et de la justification
- **Pour aller plus loin** pour visionner des sites ou des documentaires ludiques de qualité
- Et enfin ... la rubrique **Les Clés du Bac by Cours Pi** qui vise à vous donner, et ce dès la seconde, toutes les cartes pour réussir votre examen : notions essentielles, méthodologie pas à pas, exercices types et fiches étape de résolution !

MATHÉMATIQUES TERMINALE

Module 3 – Géométrie dans l’espace

L’AUTEUR

Jason LAPEYRONNIE

« N'abandonnez pas à la première page difficile. Explorez, découvrez, soyez curieux ! ».
Professeur agrégé de mathématiques et passionné de la discipline, il s'investit, en dehors de l'enseignement, dans la vulgarisation et la diffusion au grand public des mathématiques sur de nombreux supports (YouTube, blog, édition, membre du Café des sciences...).

PRÉSENTATION

Ce **cours** est divisé en chapitres, chacun comprenant :

- Le **cours**, conforme aux programmes de l’Education Nationale
- Des **exercices d’application et d’entraînement**
- Les **corrigés** de ces exercices
- Des **devoirs** soumis à correction (et ***se trouvant hors manuel***). Votre professeur vous renverra le corrigé-type de chaque devoir après correction de ce dernier.

Pour une manipulation plus facile, les corrigés-types des exercices d’application et d’entraînement sont regroupés en fin de manuel.

CONSEILS A L’ÉLÈVE

Vous disposez d’un support de Cours complet : **prenez le temps** de bien le lire, de le comprendre mais surtout de l’**assimiler**. Vous disposez pour cela d’exemples donnés dans le cours et d’exercices types corrigés.
Vous pouvez rester un peu plus longtemps sur une unité mais travaillez régulièrement.

LES FOURNITURES

Vous devez posséder :

- une **calculatrice graphique pour l'enseignement scientifique au Lycée comportant un mode examen (requis pour l'épreuve du baccalauréat).**
- un **tableur** comme Excel de Microsoft (payant) ou Calc d'Open Office (gratuit et à télécharger sur http ://fr.openoffice.org/). En effet, certains exercices seront faits de préférence en utilisant un de ces logiciels, mais vous pourrez également utiliser la calculatrice).

LES DEVOIRS

Les devoirs constituent le moyen d'évaluer l'acquisition de vos *savoirs* (« Ai-je assimilé les notions correspondantes ? ») et de vos *savoir-faire* (« Est-ce que je sais expliquer, justifier, conclure ? »).

Placés à des endroits clés des apprentissages, ils permettent la vérification de la bonne assimilation des enseignements.

Aux *Cours Pi*, vous serez accompagnés par un professeur selon chaque matière tout au long de votre année d'étude. Référez-vous à votre « Carnet de Route » pour l'identifier et découvrir son parcours.
Avant de vous lancer dans un devoir, assurez-vous d'avoir **bien compris les consignes**.
Si vous repérez des difficultés lors de sa réalisation, n'hésitez pas à le mettre de côté et à revenir sur les leçons posant problème. **Le devoir n'est pas un examen**, il a pour objectif de s'assurer que, même quelques jours ou semaines après son étude, une notion est toujours comprise.
Aux *Cours Pi*, chaque élève travaille à son rythme, parce que chaque élève est différent et que ce mode d'enseignement permet le « sur-mesure ».
Nous vous engageons à respecter le moment indiqué pour faire les devoirs. Vous les identifierez par le bandeau suivant :

Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le devoir n°1

Il est **important de tenir compte des remarques, appréciations et conseils du professeur-correcteur**. Pour cela, il est **très important d'envoyer les devoirs au fur et à mesure** et non groupés. **C'est ainsi que vous progresserez !**

Donc, dès qu'un devoir est rédigé, envoyez-le aux *Cours Pi* par le biais que vous avez choisi :

1) Par **soumission en ligne** via votre espace personnel sur **PoulPi**, pour un envoi **gratuit**, **sécurisé** et plus **rapide**.
2) Par **voie postale** à *Cours Pi*, 9 rue Rebuffy, 34 000 Montpellier
   *Vous prendrez alors soin de joindre une **grande enveloppe** **libellée à vos nom et adresse**, et **affranchie au tarif en vigueur** pour qu'il vous soit retourné par votre professeur*

N.B. : *quel que soit le mode d'envoi choisi, vous veillerez à **toujours joindre l'énoncé du devoir** ; plusieurs énoncés étant disponibles pour le même devoir.*
N.B. : *si vous avez opté pour un envoi par voie postale et que vous avez à disposition un scanner, nous vous engageons à conserver une copie numérique du devoir envoyé. Les pertes de courrier par la Poste française sont très rares, mais sont toujours source de grand mécontentement pour l'élève voulant constater les fruits de son travail.*

SOUTIEN ET DISPONIBILITÉ

VOTRE RESPONSABLE PÉDAGOGIQUE

Professeur des écoles, professeur de français, professeur de maths, professeur de langues : notre Direction Pédagogique est constituée de spécialistes capables de dissiper toute incompréhension.

Au-delà de cet accompagnement ponctuel, notre Etablissement a positionné ses Responsables pédagogiques comme des « super profs » capables de co-construire avec vous une scolarité sur-mesure.
En somme, le Responsable pédagogique est votre premier point de contact identifié, à même de vous guider et de répondre à vos différents questionnements.

Votre Responsable pédagogique est la personne en charge du suivi de la scolarité des élèves.
Il est tout naturellement votre premier référent : une question, un doute, une incompréhension ? Votre Responsable pédagogique est là pour vous écouter et vous orienter. Autant que nécessaire et sans aucun surcoût.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?

Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.

QUEL EST SON RÔLE ?

Orienter les parents et les élèves.
Proposer la mise en place d'un accompagnement individualisé de l'élève.
Faire évoluer les outils pédagogiques.
Encadrer et coordonner les différents professeurs.

VOS PROFESSEURS CORRECTEURS

Notre Etablissement a choisi de s'entourer de professeurs diplômés et expérimentés, parce qu'eux seuls ont une parfaite connaissance de ce qu'est un élève et parce qu'eux seuls maîtrisent les attendus de leur discipline. En lien direct avec votre Responsable pédagogique, ils prendront en compte les spécificités de l'élève dans leur correction. Volontairement bienveillants, leur correction sera néanmoins juste, pour mieux progresser.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?

Une question sur sa correction ?

- faites un mail ou téléphonez à votre correcteur et demandez-lui d'être recontacté en lui laissant un message avec votre nom, celui de votre enfant et votre numéro.
- autrement pour une réponse en temps réel, appelez votre Responsable pédagogique.

LE BUREAU DE LA SCOLARITÉ

Placé sous la direction d'Elena COZZANI, le Bureau de la Scolarité vous orientera et vous guidera dans vos démarches administratives. En connaissance parfaite du fonctionnement de l'Etablissement, ces référents administratifs sauront solutionner vos problématiques et, au besoin, vous rediriger vers le bon interlocuteur.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?

Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.
04.67.34.03.00
scolarite@cours-pi.com

LE SOMMAIRE

CHAPITRE 1. Vecteurs dans l'espace 3

COMPÉTENCES VISEES

- Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés.
- Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs.
- Lire sur une figure la décomposition d'un vecteur dans une base.

Première approche : une histoire de coordonnées 4
1. Vecteurs et translations 5
2. Combinaison linéaire de facteurs 5
3. Vecteurs coplanaires 7
4. Repère de l'espace 7
Execices 12
Les Clés du Bac 20

CHAPITRE 2. Droites et plans de l'espace 25

COMPÉTENCES VISEES

- Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.
- Étudier géométriquement des problèmes simples de configurations dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité).

Première approche : positions de droites et de plans 26
1. Droites de l'espace 27
2. Plans de l'espace 29
3. Positions relatives 31
Execices 35
Les Clés du Bac 44

CHAPITRE 3. Orthogonalité dans l'espace 49

COMPÉTENCES VISEES

- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans l'espace.
- Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan.
- Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs et mesures : longueur, angle, aire, volume.
- Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan ; lieux géométriques simples, par exemple plan médiateur de deux points.

Première approche : calculer les distances 50

1. Produit scalaire de deux vecteurs 51

2. Base orthonormée 55

3. Orthogonalité 56

Execices 62

Les Clés du Bac 70

CHAPITRE 4. Représentations paramétriques, équations cartésiennes ... 73

COMPÉTENCES VISEES

- Déterminer une représentation paramétrique d'une droite. Reconnaître une droite donnée par une représentation paramétrique.
- Déterminer l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal et un point.
- Reconnaître un plan donné par une équation cartésienne et préciser un vecteur normal à ce plan.
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan donné par une équation cartésienne, ou sur une droite donnée par un point et un vecteur directeur.
- Dans un cadre géométrique repéré, traduire par un système d'équations linéaires des problèmes de types suivants : décider si trois vecteurs forment une base, déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base, étudier une configuration dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité, intersection et orthogonalité de droites ou de plans), etc. Dans des cas simples, résoudre le système obtenu et interpréter géométriquement les solutions.

Première approche : des équations dans l'espace 74

1. Représentation paramétrique d'une droite 75

2. Equation cartésienne d'un plan 77

3. Approfondissement : équation cartésienne d'une sphère 80

Execices 81

Les Clés du Bac 87

CORRIGÉS 89

SUGGESTIONS CULTURELLES

ESSAIS

- **La grande aventure des nombres et du calcul** *Jason Lapeyronnie*
- **Les maths c'est magique !** *Johnny Ball*
- **17 Équations qui ont changé le monde** *Ian Stewart*
- **Alex au pays des chiffres** *Alex Bellos*
- **Le grand roman des maths :de la préhistoire à nos jours** *Mickael Launay*
- **Histoire universelle des chiffres : l'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul** *Georges Ifrah*
- **Le démon des maths** *Hans Magnus Enzensberger*
- **A propos de rien : une histoire du zéro** *Robert Kaplan*

BANDES-DESSINÉES

- **Logicomix** *Doxiádis / Papadátos / Papadimitríou*
- **Les maths en BD 1 et 2** *Larry Gonick*

DOCUMENTAIRES AUDIOVISUELS

- **L'extraordinaire aventure du chiffre 1** *Terry Jones*
- **Le grand mystère des mathématiques** *Richard Reisz*

SITES INTERNET

- **www.automaths.blog** *le site de votre professeur Jason Lapeyronnie*
- **La chaîne YouTube Automaths** *la chaîne de votre professeur Jason Lapeyronnie*

Le Cours

INTRODUCTION

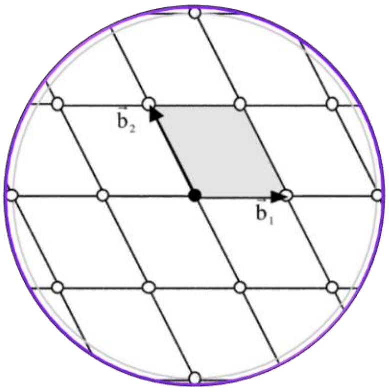
La géométrie au lycée a vu l'arrivée de nouveaux objets : les vecteurs. Grâce à ces nouveaux objets, vous avez pu traduire différemment les problèmes de géométrie vus au collège.
Ainsi, déterminer si deux droites sont parallèles revient à montrer que deux vecteurs sont colinéaires, montrer que deux droites sont perpendiculaires revient à montrer que le produit scalaire de deux vecteurs est nuls.

Vous avez également fait vos premiers pas dans la géométrie analytique, cette géométrie dans laquelle les objets sont décrits par leur coordonnées dans un repère, des équations ou des inéquations.
Ce module a pour vocation d'étendre les notions vues lors de ces deux premières années de lycée et de traiter la géométrie dans l'espace. Beaucoup de notions sont similaires : coordonnées, équations, sommes de vecteurs, parallélisme, orthogonalité.

La principale différence vient de l'étude d'un nouvel objet. Là où la géométrie plane ne faisait alors qu'intervenir des points et des droites, la géométrie dans l'espace est l'occasion d'étudier des plans, des objets en deux dimensions qui sont inclus dans l'espace, en trois dimensions.

L'objectif est que l'étude de la géométrie dans l'espace, outre son intérêt propre, soit l'occasion de travailler les notions vectorielles afin de préparer l'étude de l'algèbre linéaire dans l'enseignement supérieur.

Il importe que vous puissiez vous doter de représentations mentales solides susceptibles d'être réinvesties lors de votre poursuite d'études : un vecteur non nul engendre une direction de droites, deux vecteurs non colinéaires engendrent une direction de plan, trois vecteurs non coplanaires engendrent les vecteurs de l'espace ; si une droite et un plan sont sécants, un vecteur directeur de cette droite et deux vecteurs non colinéaires de la direction de ce plan forment une base de l'espace.



Les deux premières années du lycée ont été l'occasion d'aborder la géométrie sous un regard nouveau : celui des vecteurs du plan. Rappelons qu'un vecteur du plan est un objet mathématique caractérisé par sa direction (une droite du plan), son sens et sa longueur, également appelée norme.

Ce premier chapitre de géométrie est l'occasion de voir la géométrie dans l'espace sous ce nouvel angle. Les notions vues en géométrie plane sont ainsi étendues dans l'espace, en 3 dimensions, mais les concepts restent globalement les mêmes. Vous y retrouverez donc les translations, les sommes de vecteur, la relation de Chasles et les vecteurs colinéaires.
La seule nouveauté de ce chapitre fera intervenir des triplets de vecteurs coplanaires.

COMPÉTENCES VISÉES

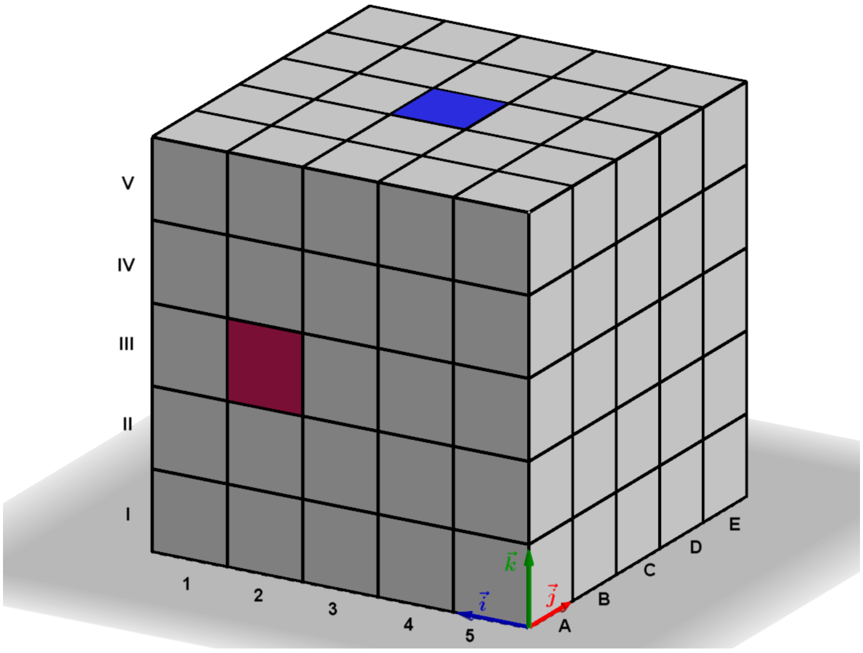
- Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés.
- Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs.
- Lire sur une figure la décomposition d'un vecteur dans une base.

PRÉ-REQUIS

- Notions sur les vecteurs vues en classe de Seconde et Première.
- Résolution de systèmes d'équations.

Première approche
Une histoire de coordonnées...

On a formé un grand cube à l'aide de 125 cubes plus petits. Pour repérer chaque cube, on a formé un plus grand cube. Chaque petit cube est alors repéré par trois caractères désignant respectivement sa ligne (de A à E), sa rangée (de 1 à 5), sa hauteur (de I à V).



1. Mettez une croix sur le cube repéré par le triplet (C; 5; III).

2. Indiquez pour chacun des deux cubes colorés un triplet permettant de les positionner dans le grand cube.

On s'intéresse désormais aux points d'intersection dessinés par les arêtes des cubes. Partant du coin inférieur droit, on peut alors se déplacer selon les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

3. Sur la figure, placer le point où l'on aboutit après s'être déplacé de 2 fois selon le vecteur $\vec{\imath}$, d'une fois selon le vecteur $\vec{\jmath}$ et de 5 fois le vecteur $\vec{k}$. Les coordonnées de ce point seront alors notées $(2; 1; 5)$.

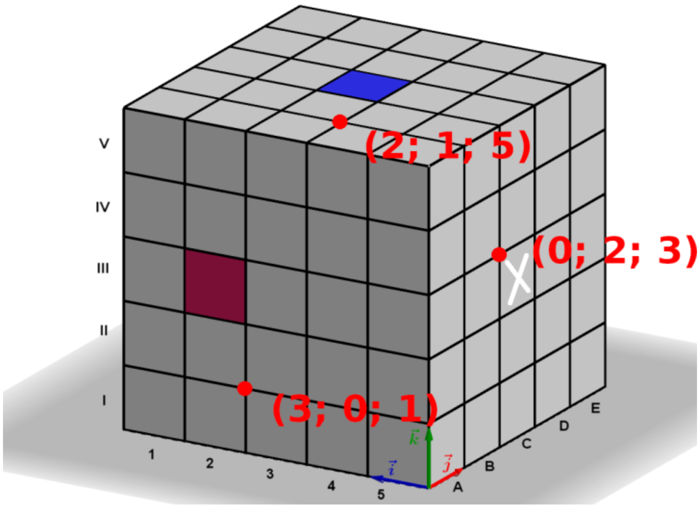
4. Placez sur la figure les points de coordonnées $(0; 2; 3)$ et $(3; 0; 1)$.

L'ANECDOTE

Comme pour le plan, la géométrie dans l'espace a peu à peu étudié de manière analytique, c'est-à-dire en décrivant les objets par un système de coordonnées.
Le système présenté ici est le système de coordonnées cartésiennes, du nom du mathématicien français René Descartes. Il existe toutefois d'autres manières de placer un point dans l'espace.
Ainsi, sur Terre, nous utilisons plutôt les coordonnées sphériques : altitude, latitude et longitude. Les astronomes, eux, sont souvent amenés à utiliser les coordonnées équatoriales : altitude, ascension droite et déclinaison.

CORRECTION

1. 3. 4.



2. Le cube rouge a pour coordonnées (A; 2; III)
Le cube bleu a pour coordonnées (C; 3; V)

01 VECTEURS DANS L'ESPACE

Vecteurs et translations

L'ESSENTIEL

Un vecteur de l'espace est un objet mathématique caractérisé par une direction de l'espace, un sens et une longueur, également appelée norme.
Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, la même norme le même sens et la même norme.

L'ESSENTIEL

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ la transformation de l'espace qui, à tout point M, associe l'unique point L' tel que $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$

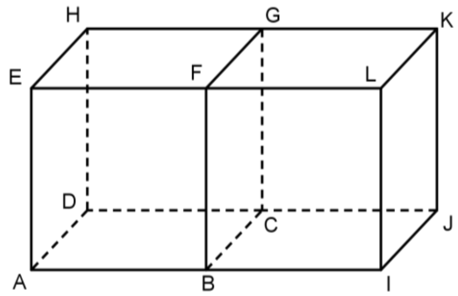
Remarque : toutes les notions vues en géométrie plane s'étendent dans l'espace : égalité de vecteurs, somme de vecteurs, produit d'un réel par un vecteur, relation de Chasles, vecteur nul, etc...

02 VECTEURS DANS L'ESPACE

Combinaison linéaire de facteurs

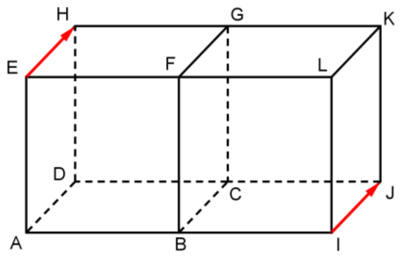
L'ESSENTIEL

Soit $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_n$ des vecteurs et λ_1, λ_2, ..., λ_n des réels.
Le vecteur $\vec{u}$ défini par $\vec{u} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i$ est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_n$.

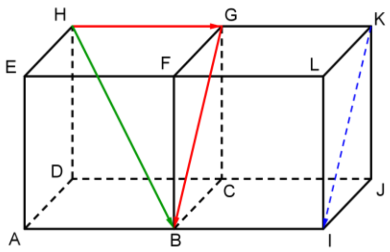


Exemple : on considère deux cubes $ABCDEFGH$ et $BIJCFLKG$ placés côte à côte. On a les égalités de vecteurs suivantes

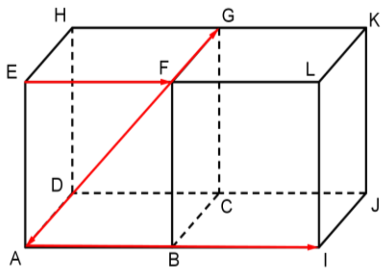
- $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{IJ}$



- $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{KI} = \overrightarrow{HB}$

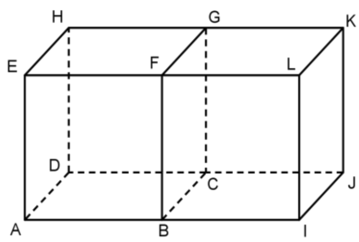


- $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EI}$



À VOUS DE JOUER 1

Dans cette même configuration, compléter les égalités vectorielles suivantes :



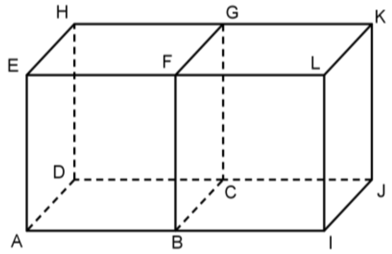
- $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{G\ ...}$
- $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{A\ ...}$
- $\overrightarrow{HE} + 2\overrightarrow{GK} - \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{C\ ...}$

03 VECTEURS DANS L'ESPACE
Vecteurs coplanaires

L'ESSENTIEL

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. On dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{w}$

Exemple : sur la configuration suivante...



Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont coplanaires. En effet, $\overrightarrow{EL} = 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{FG}$.

À VOUS DE JOUER 2

Dans cette même configuration, les vecteurs $\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{KJ}$ sont-ils coplanaires ?

....

....

04 VECTEURS DANS L'ESPACE
Repère de l'espace

L'ESSENTIEL

Un repère de l'espace est un quadruplet $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ où

- O est un point de l'espace
- $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs non coplanaires.

On dit que les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ forment une base de l'espace.

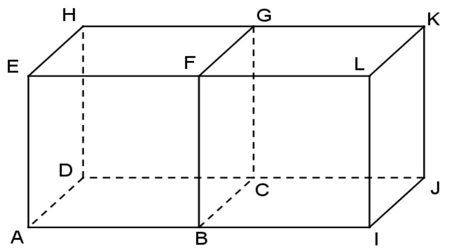
L'ESSENTIEL

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Il existe un unique triplet de réel $(x; y; z)$ tel que

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

x, y et z sont appelés les coordonnées du vecteur $\vec{u}$. On notera $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Exemple : on considère deux cubes $ABCDEFGH$ et $BIJCFLKG$ placés côte à côte.



Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ sont $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a en effet $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

À VOUS DE JOUER 3

Déterminez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans le repère $(E; \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{EA})$.

Déterminez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB})$.

L'ESSENTIEL

Les réels $(x; y; z)$ tels que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On notera $M(x; y; z)$.

Exemple : dans la figure précédente, dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ le point K a pour coordonnées $(1; 1; 1)$. En effet, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.

À VOUS DE JOUER 4

Donnez les coordonnées du point K dans le repère $(B; \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CG})$

Quel est le point ayant pour coordonnées $(2; 1; 1)$ dans le repère $(I; \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{DH})$?

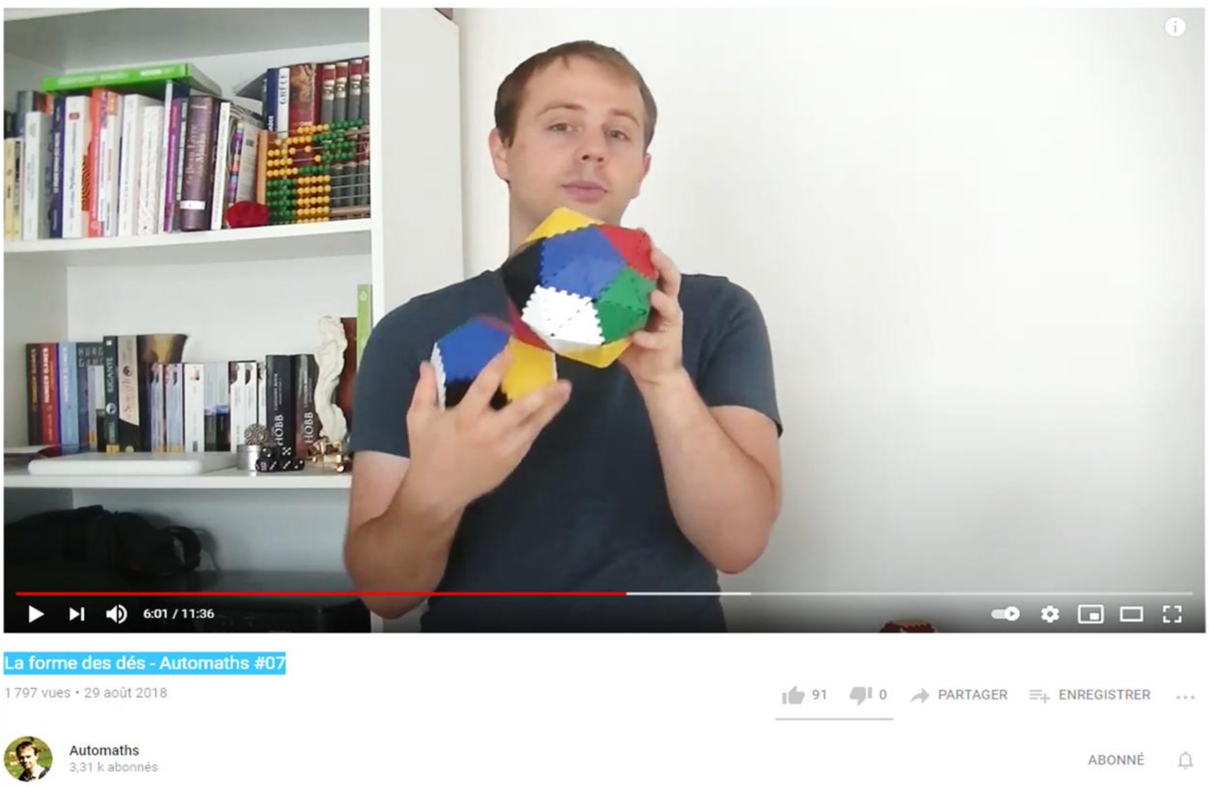
L'ANECDOTE

Vous verrez le cube apparaître de nombreuses fois au cours de ce module, et pour cause, il s'agit d'un des solides les plus simples.

Ce solide est composé de faces régulières et de sommets tous identiques : de tels solides sont appelés les solides de Platon et il en existe seulement 5. Le cube, évidemment, avec 6 faces carrées, mais aussi le tétraèdre, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre, ayant respectivement 4, 8, 12 et 20 faces.

Pour Platon, ils symbolisaient les éléments : le feu, la terre, l'air, l'eau et l'éther. Pour nous, ils sont simplement des objets d'études intéressants.
Si l'on demande seulement à ce que les faces soient identiques, sans qu'il s'agisse de polygones réguliers, alors la famille s'agrandit : on obtient alors les solides de Catalan, notamment utilisé pour la confection de dés de formes variés.

Pour en savoir plus, rendez-vous sur la chaîne YouTube Automaths de votre professeur.
« La forme des dés - Automaths #07 »



L'ESSENTIEL

Dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Soit λ et μ des réels.

Le vecteur $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda y + \mu y' \end{pmatrix}$

Dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Soit λ et μ des réels.

Le vecteur $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda y + \mu y' \end{pmatrix}$

Exemple : dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

Supposons qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{u} = \lambda v + \mu w$. Alors $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda - \mu \\ 4\lambda + \mu \\ -7\lambda + 5\mu \end{pmatrix}$

Nous sommes donc amenés à résoudre le système $\begin{cases} 2\lambda - \mu & = & 0 \\ 4\lambda + \mu & = & 6 \\ -7\lambda + 5\mu & = & 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2\lambda - \mu & = & 0 \\ 4\lambda + \mu & = & 6 \\ -7\lambda + 5\mu & = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu & = & 2\lambda \\ 4\lambda + 2\lambda & = & 6 \\ -7\lambda + 10\lambda & = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu & = & 2\lambda \\ 6\lambda & = & 6 \\ 3\lambda & = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu & = & 2 \\ \lambda & = & 1 \\ \lambda & = & 1 \end{cases}$$

Le fait d'avoir deux fois la même ligne n'est pas anormal : nous avons trois équations pour deux inconnues. Si les résultats de ces deux lignes sont différents, cela signifie que les vecteurs ne sont pas coplanaires. Vérifions maintenant que les valeurs trouvées pour λ et μ conviennent.

Les coordonnées de $\vec{v} + 2\vec{w}$ sont en effet $\begin{pmatrix} 2 + 2 \times (-1) \\ 4 + 2 \times 1 \\ -7 + 2 \times 5 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. On a donc $\vec{u} = v + 2\vec{w}$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont donc coplanaires.

À VOUS DE JOUER 5

Dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-1\\-7\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

L'ESSENTIEL

Dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\\z_B - z_A\end{pmatrix}$.
- Le point I, milieu de $[AB]$, a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

À VOUS DE JOUER 6

Dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; 2; 5)$ et $B(-2; 6; -7)$.

- Déterminez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

- Déterminez les coordonnées du point I, milieu de $[AB]$

- Déterminez les coordonnées du point K tel que B soit le milieu de $[AK]$.

L'ANECDOTE

On attribue souvent à Descartes l'invention de la géométrie analytique, ce qui a valu l'appellation de coordonnées "cartésiennes" aux coordonnées qui utilisent un système de deux ou trois vecteurs. Pourtant, le premier à utiliser un système de trois axes pour décrire les points de l'espace ne vint qu'un siècle après Descartes : il s'agit du mathématicien français Joseph-Louis Lagrange.
Mieux que cela ! Lagrange utilise alors ces coordonnées pour décrire certains objets de l'espace, dont les droites et les plans que vous verrez apparaître un peu plus loin dans ce module. Si l'on veut, ce module est un peu la vision moderne des travaux de Lagrange, développés dans les années 1770.

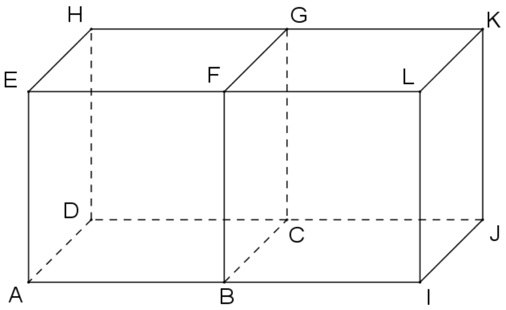
POUR ALLER PLUS LOIN

Qui était Joseph-Louis Lagrange ?
Quel est son impact dans les mathématiques ?
L'Institut Henri Poincaré produit un documentaire exclusif de 32 minutes sur le mathématicien d'exception Joseph-Louis Lagrange, en coproduction avec le CNRS Images et en partenariat avec l'Institut Lagrange de Paris.
↳Si vous voulez en savoir plus, visualisez la vidéo intitulée « Lagrange » sur la chaîne YouTube de l'institut Poincaré.
https://youtu.be/K_tAygfZnAE

Abordons maintenant une série d'exercices, afin de vérifier vos connaissances.
Les réponses aux exercices se trouvent en fin de manuel.

EXERCICE 01 Vecteurs et cubes

On considère deux cubes $ABCDEFGH$ et $BIJCFLKG$ placés côte à côte.



1. Complétez les égalités de vecteurs suivantes :

- $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{A\ldots}$
- $\overrightarrow{EK} + \overrightarrow{LF} = \overrightarrow{B\ldots}$
- $\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{F\ldots}$

2. En utilisant la même figure, exprimer :

- le vecteur $\overrightarrow{AK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IK}$

- le vecteur AG comme combinaison linéaire des vecteurs AK et JD

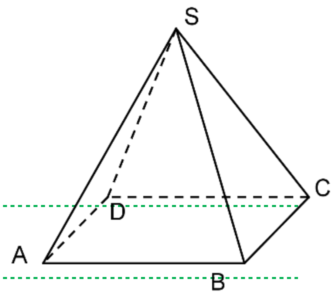
- le vecteur DL comme combinaison linéaire des vecteurs AI et JE

- le vecteur BK comme combinaison linéaire des vecteurs AI, EH et CG

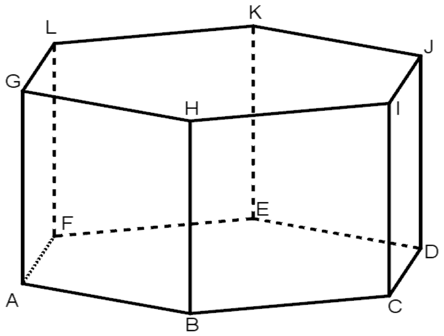
3. Sur la même figure, construire le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{CK}$

EXERCICE 02 Vecteurs dans une pyramide

On considère une pyramide $SABCD$ à base carrée $ABCD$ et de sommet S.
On considère les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{SA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DS}$.
Montrez que $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$. Que peut-on en déduire sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$?



EXERCICE 03 Prisme hexagonal



On considère un prisme droit $ABCDEFGHIJKL$ dont la base est un hexagone régulier $ABCDEF$.

1. On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG})$.

a. Donnez les coordonnées des points D, E, H et J dans ce repère

b. Donnez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{GD}$ dans ce repère.

2. Reprendre les questions précédentes en se plaçant dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AH})$.

EXERCICE 04 Vecteurs coplanaires ?

Dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\8\\20\end{pmatrix} \vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \vec{w}\begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

EXERCICE 05 Condition de coplanarité

Soit a un réel. Dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-3\\1\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\2\\6\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\-1\\a\end{pmatrix}$.

Pour quelle(s) valeur(s) du réel a les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

EXERCICE 06 Coordonnées dans l'espace

On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points A, B, C,et D de coordonnées respectives $A(3;1;-2)$, $B(5;-1;3)$, $C(-1;-2;2)$, $D(0;2;3)$.

1. Déterminez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

2. Déterminez les coordonnées du point I, milieu de $[AC]$

3. Déterminez les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$.

4. Déterminez les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{FD} = 2\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{AD}$.

EXERCICE 07 Base de l'espace

On se place dans un repère de l'espace $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives $A(2; 2; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(1; 0; 1)$, $D(0; 0; 3)$ et $E(-1; 4; 0)$.

1. Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment-ils une base de l'espace ?

3. Donnez les coordonnées du point E dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

EXERCICE 08 Fonction vectorielle de Leibniz : cas particuliers

Soit n un entier naturel non nul. On considère n points de l'espace A_1, A_2, ..., A_n et n réels a_1, a_2, ..., a_n.

La fonction vectorielle de Leibniz associée au système de points pondérés $\{(A_1; a_1), (A_2; a_2), \dots, (A_n; a_n)\}$ est la fonction qui à tout point M de l'espace associe le vecteur.

$$f(M) = a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{MA_n} = \sum_{k=1}^{n} a_k\,\overrightarrow{MA_k}$$

Premier exemple :

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les points $A_1(1; 3; 1)$, $A_2(-2; 5; 0)$ et $A_3(4; -2; 1)$. On note de plus $a_1 = 2$, $a_2 = -3$ et $a_3 = -1$

1. Calculez les coordonnées du vecteur image du point O par la fonction vectorielle de Leibniz associé au système $\{(A_1; a_1), (A_2; a_2), (A_3; a_3)\}$

EXERCICES

2. Calculez les coordonnées du vecteur image du point A_1 par la fonction vectorielle de Leibniz associé au système $\{(A_1; a_1), (A_2; a_2), (A_3; a_3)\}$

Coefficients égaux :

Soit A_1, A_2 et A_3 trois points distincts de l'espace.

3. On note f la fonction vectorielle de Leibniz associée au système $\{(A_1; 1), (A_2; 1)\}$. Soit I un point de l'espace tel que $f(I) = \vec{0}$. Montrez que I est le milieu de $[A_1A_2]$

4. On note g la fonction vectorielle de Leibniz associée au système $\{(A_1; 1), (A_2; 1), (A_3; 1)\}$. Soit G un point de l'espace tel que $f(G) = \vec{0}$. Montrez que G est le centre de gravité du triangle $A_1A_2A_3$. (On rappelle que le centre de gravité d'un triangle est le point de concours de ses médianes. De plus, ce centre de gravité se trouve aux 2/3 de la médiane en partant du sommet.)

EXERCICES

EXERCICE 09

Fonction vectorielle de Leibniz : cas général

Soit n un entier naturel non nul. On considère n points de l'espace A_1, A_2, ..., A_n et n réels a_1, a_2, ..., a_n. On note f la fonction vectorielle de Leibniz associée au système $\{(A_1; a_1), (A_2; a_2), \dots, (A_n; a_n)\}$ (voir exercice précédent)

1. Soit M et N des points distincts de l'espace. Montrez que $f(M) - f(N) = (\sum_{k=1}^{n} a_k)\overrightarrow{MN}$

2. En déduire que si $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$, alors f est constante.

3. On suppose maintenant que $\sum_{k=1}^{n} a_k \neq 0$. Montrez qu'il existe un unique point G de l'espace tel que $f(G) = \vec{0}$. Ce point est appelé barycentre du système de points pondérés $\{(A_1; a_1), (A_2; a_2), \dots, (A_n; a_n)\}$

EXPRIMER LES COORDONNÉES D'UN VECTEUR OU D'UN POINT DANS UNE BASE

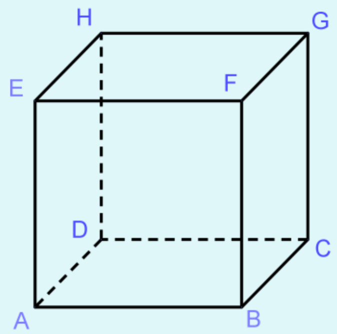
Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ dans une base $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$, c'est trouver des réels a, b et c tels que $\vec{v} = a\vec{\imath} + \vec{\jmath} + c\vec{k}$. Autrement dit, on décompose la translation induite par le vecteur $\vec{v}$ en utilisant seulement les vecteurs de la base. L'origine du repère n'influence donc pas les coordonnées.

Déterminer les coordonnées d'un point A dans une base $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ revient à déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans cette même base : il faut trouver des réels a, b et c tels que $\overrightarrow{OA} = a\vec{\imath} + \vec{\jmath} + c\vec{k}$. Autrement dit, on décompose la translation qui transforme le point O en le point A en utilisant seulement les vecteurs de la base. L'origine du repère influence donc les coordonnées du point A.

Remarque : à partir des coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et $(x_B; y_B; z_B)$ de deux points A et B, souvent plus simples à trouver, on peut déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui sont alors $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

Exemple

Le cube est une figure de base très utilisée dans les exercices de géométrie dans l'espace. Dans le cube $ABDEFGH$ suivant, on se place dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$



- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ dans ce repère sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. En effet, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
- Les coordonnées du point G dans ce repère sont $(1; 1; 1)$. En effet, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

Application 1 : dans le cube $ABCDEFGH$, donner :

- ... les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BH}$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

- ... les coordonnées du point F dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$

- ... les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AG}; \overrightarrow{AH})$

- ... les coordonnées du point G dans le repère $(B; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AG}; \overrightarrow{AH})$.

- ... les coordonnées du point I, milieu de $[BG]$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

- ... les coordonnées du point J, milieu de $[FH]$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB})$.

DÉTERMINER SI 3 VECTEURS SONT COPLANAIRES

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si l'un d'eux peut s'exprimer en fonction des deux autres : par exemple, s'il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$. Pour déterminer si trois vecteurs sont coplanaires, il faut établir un système d'équations en utilisant les coordonnées de ces trois vecteurs. On recherche alors les valeurs des réels λ et μ (trois équations, deux inconnues)

- Soit on trouve une unique solution à ce système : les vecteurs sont coplanaires.
- Soit on aboutit à une solution impossible (par exemple, λ qui vaut à la fois 2 et 3). Les vecteurs ne sont alors pas coplanaires.

Remarque : si parmi les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, deux d'entre eux sont colinéaires, alors les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont forcément coplanaires.

Application 2

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$. On considère dans ce repère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\-6\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}\begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$

- Montrer que $\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$. Que peut-on en déduire sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

- Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ ne sont pas coplanaires.

- Les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{a}$ peuvent-ils être coplanaires ?

- Montrer que les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{u}$ et $\vec{b}$ sont coplanaires.

- Les vecteurs $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{b}$ sont-ils coplanaires ?

CORRECTIONS

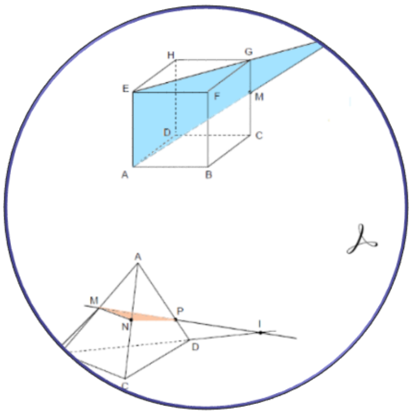
Exprimer les coordonnées d'un vecteur ou d'un point dans une base

- Le vecteur $\overrightarrow{BH}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.
- Le point F a pou coordonnées $(1; 0; 1)$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$
- Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AG}; \overrightarrow{AH})$.
- Le point G a pour coordonnées $(0; 0; 1)$ dans le repère $(B; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AG}; \overrightarrow{AH})$. On a en effet $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$.
- Le point I, milieu de $[BG]$, a pour coordonnées $(1; 0.5; 0.5)$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.
- Le point J, milieu de $[FH]$, a pour coordonnées $(1{,}0.5; 0.5)$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB})$. Attention à l'ordre des vecteurs !

Déterminer si trois vecteurs sont coplanaires

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$. On considère dans ce repère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Les coordonnées de $\vec{u} + 2\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} 1 + 2 \times 2 \\ 2 + 2 \times (-4) \\ -3 + 2 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui sont bien les coordonnées de $\vec{w}$. On a donc $\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.
- Supposons qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{a}$. On aurait alors
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda - 3\mu \\ -4\lambda + \mu \\ 2\lambda + 3\mu \end{pmatrix}$$
La deuxième ligne donne $\mu = 2 + 4\lambda$. En remplaçant μ par $2 + 4\lambda$ dans la première ligne, on obtient $1 = 2\lambda - 3(2 + 4\lambda)$ soit $\lambda = -\frac{7}{10}$
En remplaçant μ par $2 + 4\lambda$ dans la troisième ligne, on obtient $-3 = 2\lambda + 3(2 + 4\lambda)$ soit $\lambda = -\frac{9}{14}$. On obtient deux valeurs de λ différentes. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ ne sont pas coplanaires.
- Les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{a}$ ne peuvent pas être coplanaires : en effet, puisque $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, cela reviendrait à montrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont coplanaires. Nous avons montré que ce n'était pas le cas à la question précédente.
- Supposons qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{b}$. On aurait alors
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda - 3\mu \\ -4\lambda + \mu \\ 2\lambda + 2\mu \end{pmatrix}$$
La deuxième ligne donne $\mu = 2 + 4\lambda$. En remplaçant μ par $2 + 4\lambda$ dans la première ligne, on obtient $1 = 2\lambda - 3(2 + 4\lambda)$ soit $\lambda = -\frac{7}{10}$
En remplaçant μ par $2 + 4\lambda$ dans la troisième ligne, on obtient $-3 = 2\lambda + 2(2 + 4\lambda)$ soit $\lambda = -\frac{7}{10}$.
Puisque $\mu = 2 + 4\lambda$, on a alors que $\mu = 2 - 4 \times \frac{7}{10} = -\frac{4}{5}$
Réciproquement, les coordonnées de $-\frac{7}{10}\vec{v} - \frac{4}{5}\vec{b}$ sont $\begin{pmatrix} -2 \times \frac{7}{10} + 3 \times \frac{4}{5} \\ 4 \times \frac{7}{10} - \frac{4}{5} \\ -2 \times \frac{7}{10} - 2 \times \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ qui sont bien les coordonnées de $\vec{u}$.
On a donc $\vec{u} = -\frac{7}{10}\vec{v} - \frac{4}{5}\vec{b}$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{b}$ sont coplanaires.
- Puisque d'une part, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires et d'autre part, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{b}$ sont coplanaires, il en vient que les vecteurs $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{b}$ sont coplanaires.



La principale application des vecteurs en classe de Seconde concernait les problèmes d'alignement de points et de parallélismes de droite. Ces questions sont également d'actualité dans le cadre de la géométrie dans l'espace.
Toutefois, l'ajout d'une troisième dimension va complexifier l'étude des droites : aux droites parallèles et sécantes s'ajoutent des droites non coplanaires, des droites qui ne sont pas contenues dans un même plan.

De nouveaux objets seront donc à étudier : les plans justement. Ce chapitre sera alors l'occasion de déterminer toutes les positions relatives qu'il peut y avoir entre les droites et les plans de l'espace.

COMPÉTENCES VISÉES

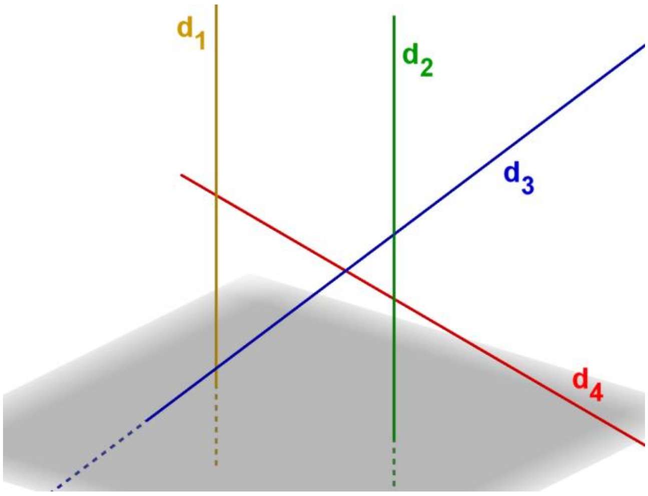
- Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.
- Étudier géométriquement des problèmes simples de configurations dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité).

PRÉ-REQUIS

- Notions sur les vecteurs vus en classe de Seconde et Première et dans le chapitre précédent.
- Résolution de systèmes d'équations.

Première approche
Positions de droites et de plans

Quatre droites ont été tracées dans l'espace.



1. De ce point de vue, que dire des droites d_1 et d_2 ?

2. La droite d_3 semble-t-elle sécante à la droite d_1 ? à la droite d_2 ?

3. Même question pour la droite d_4 ?

4. Quelles sont les droites qui semblent couper le plan représenté sur ce dessin ?

Vous pouvez maintenant vous rendre sur la page https://www.geogebra.org/m/aaernpwf
Essayez alors de bouger le point de vue à l'aide de la souris.

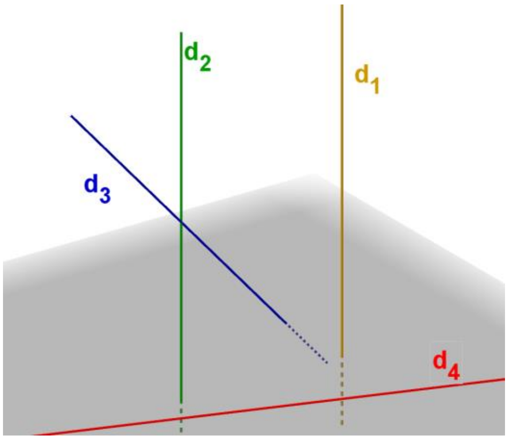
5. Après avoir manipulé la figure, confirmez on infirmez vos hypothèses faites lors de la première série de questions.

L'ANECDOTE

Dans le plan, les droites ne pouvaient se trouver que dans deux configurations : elles pouvaient être parallèles ou sécantes. Dans l'espace, une troisième possibilité se présente, celle des droites non coplanaires, c'est-à-dire des droites qui ne sont pas toutes deux contenues dans un même plan.
Cette troisième configuration peut amener à de nombreuses confusions : elle peut amener à supposer deux droites sécantes alors que celles-ci ne se croisent jamais.

CORRECTION :

1. Les droites d_1 et d_2 semblent parallèles.
2. La droite d_3 semble sécante aux droites d_1 et d_2
3. Il en est de même pour la droite d_4
4. Les droites qui semblent couper le plan représenté sur ce dessin sont les droites d_1, d_2 et d_3.
5. En changeant la vue, on s'aperçoit que la droite d_4 ne coupe aucune des autres droites. En revanche, la droite d_3 coupe la droite d_2 mais pas la droite d_1.



01 DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Droites de l'espace

L'ESSENTIEL

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
- On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Exemple :

On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\-15\\9\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

En effet, $\vec{v} = -3\vec{u}$.

Remarque :

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur de l'espace.

L'ESSENTIEL

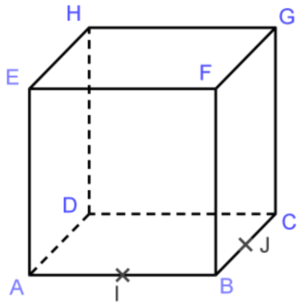
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace. La droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par A est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Remarque :
Une droite est donc entièrement déterminée par un point et un vecteur non nul. On dit que $(A;\vec{u})$ est un repère de la droite passant par A dirigée par $\vec{u}$. Une droite peut également être déterminée par deux points distincts.

L'ESSENTIEL

Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exemple :
Dans un cube $ABCDEFGH$, on considère le point I, milieu de $[AB]$ et le point J, milieu de $[BC]$



On a alors $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BJ}$.

Or, puisque $ABCDEFGH$ est un cube, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG}$.

Ainsi, $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{IJ}$. Les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont donc colinéaires.

Finalement, les droites (EG) et (IJ) sont parallèles.

À VOUS DE JOUER 7

On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
On considère les points de l'espace $A(2;1;-3)$, $B(3;5;1)$, $C(1;-4;-8)$ et $D(3;4;0)$.

Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CD}$.

Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ?

L'ESSENTIEL

Soit A, B et C trois points de l'espace. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

À VOUS DE JOUER 8

On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points de l'espace $A(7;2;8)$, $B(-1;4;5)$. Déterminez les valeurs(s) des réels y et z pour lesquelles le point $C(1;y;z)$ est sur la droite (AB).

02 DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Plans de l'espace

L'ESSENTIEL

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et A un point du plan.
Le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M pour lesquels le vecteur $\overrightarrow{AM}$ s'exprime comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Autrement dit, M appartient au plan passant par A, dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement s'il existe deux réels λ et μ tels que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

On dit que $(A;\vec{u},\vec{v})$ est un repère de ce plan.

Remarque :
Cette définition implique que par trois points non alignés de l'espace passe un unique plan.

L'ESSENTIEL

Soit A, B, C et D quatre points de l'espace. On dit que A, B, C et D sont coplanaires s'il existe un plan de l'espace passant par ces quatre points.
Les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Soit A, B, C et D quatre points de l'espace. On dit que A, B, C et D sont coplanaires s'il existe un plan de l'espace passant par ces quatre points.

Les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Exemple :

Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points $A(2;1;0)$, $B(3;1;-1)$, $C(5;3;1)$ et $D(2;0;-2)$. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. On obtient :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

Supposons qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{AD}$. On a alors :

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\lambda\\2\lambda-\mu\\\lambda-2\mu\end{pmatrix}$$

On trouve alors $\lambda = \frac{1}{3}$ et $\mu = \frac{2}{3}$.
Réciproquement, on vérifie avec les coordonnées que $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$.

À VOUS DE JOUER 9

Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points $A(5;-1;3)$, $B(2;2;3)$, $C(5;-4;0)$ et $D(4;-1;2)$. Montrez que les points A, B, C et D sont coplanaires.

POSITIONS RELATIVES DE DEUX DROITES

L'ESSENTIEL

Soit A, B, C et D quatre points distincts de l'espace. Les droites (AB) et (CD) sont dites coplanaires si les points A, B, C et D sont coplanaires.
Autrement dit, il existe un plan qui contiennent les droites (AB) et (CD).

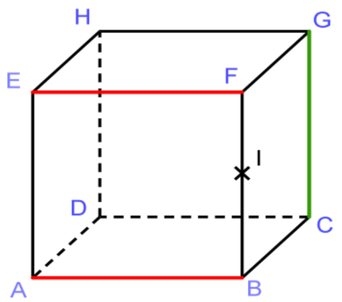
L'ESSENTIEL

Deux droites coplanaires de l'espace peuvent être :

- parallèles ou confondues si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires,
- sécantes en un unique point sinon.

À VOUS DE JOUER 10

On considère un cube $ABCDEFGH$ ainsi qu'un point I sur le segment $[BF]$.



- Les droites (AB) et (EF) sont parallèles.
- Les droites (AB) et (CG) ne sont pas coplanaires.
- Les droites (HI) et $[BD]$ sont coplanaires mais pas parallèles : elles sont donc sécantes.

Décrivez la position relative des droites suivantes :

Les droites (HE) et (BE)

....

....

Les droites (GA) et (BC)

....

....

Les droites (HD) et (BI)

....

....

L'ANECDOTE

Avant de construire l'intersection de deux droites, il faut justifier que cette intersection existe. Deux droites qui semblent se couper sur une figure en 2 dimensions ne se coupent pas forcément lorsque l'on regarde la figure en 3 dimensions. Ce phénomène peut être observé dans le ciel, après le passage des avions : les traînées de condensation semblent se croiser alors que les avions ne volent pas à la même altitude.

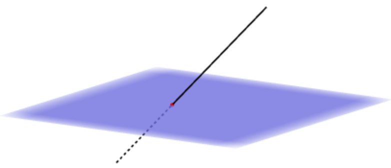
POSITIONS RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

L'ESSENTIEL

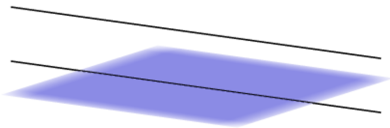
Une droite est :

- parallèle ou contenue dans un plan si tout vecteur de la droite est aussi un vecteur directeur du plan
- sécante au plan en un unique point sinon.

Droite sécante à un plan



Droite parallèle à un plan



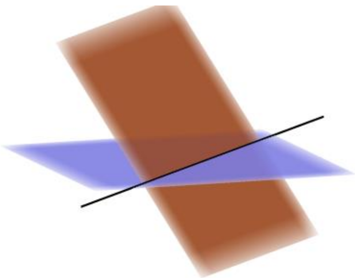
POSITIONS RELATIVES DE DEUX PLANS

L'ESSENTIEL

Deux plans de l'espace sont...

- parallèles ou confondus si les vecteurs directeurs de l'un sont aussi directeurs de l'autre,
- sécants sinon. L'intersection de ces deux plans est alors une droite.

Plans sécants selon une droite



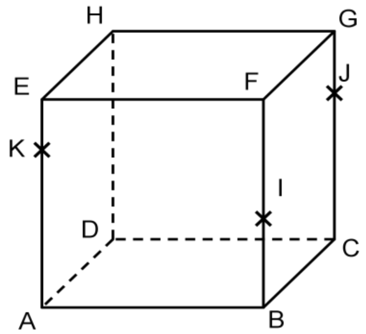
Plans parallèles

Remarque :

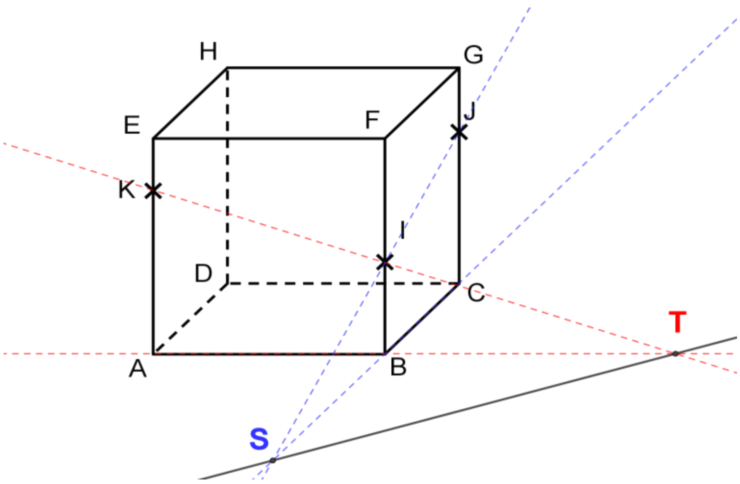
Il suffit donc de connaître deux points d'intersection A et B de deux plans pour déterminer toute leur intersection qui n'est autre que la droite (AB).

Exemple :

On considère le cube $ABCDEFGH$ suivant ainsi que trois points : I sur le segment $[BF]$, J sur le segment $[CG]$ et K sur le segment $[AE]$ de telles sorte que les droites (IK) et (AB) sont sécantes en un point T. et que les droites (IJ) et (BC) sont sécantes en un point S.



- Puisque la droite (IJ) est dans le plan (IJK) et la droite (BC) est dans le plan (ABC), le point d'intersection de ces deux droites se trouve dans l'intersection des plans (ABC) et (IJK).
- Puisque la droite (IK) est dans le plan (IJK) et la droite (AB) est dans le plan (ABC), le point d'intersection de ces deux droites se trouve dans l'intersection des plans (ABC) et (IJK).
- L'intersection de deux plans sécants étant une droite, l'intersection des plans (ABC) et (IJK) est la droite (ST).



À VOUS DE JOUER 11

Justifiez que les plans (IJK) et (EFG) sont sécants.

Reproduisez la figure puis construisezl'intersection de ces deux plans.

L'ESSENTIEL

Pour montrer que deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles, il suffit de trouver deux droites sécantes non confondues (d_1) et (d_2) de $\mathcal{P}$ et deux droites sécantes non confondues (δ_1) et (δ_2) de $\mathcal{P}'$ telles que (d_1) est parallèle à (δ_1) et (d_2) est parallèle à (δ_2).

L'ANECDOTE

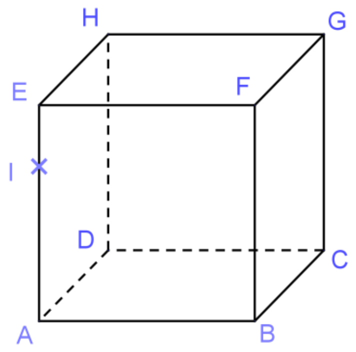
La géométrie que nous abordons dans ce chapitre est la géométrie Euclidienne. Cette géométrie repose sur un axiome : étant donné une droite et un point hors de cette droite, il existe une et une unique droite parallèle à la droite donnée et passant pas le point donné.

Cela vous semble évident ? Ça ne l'est pas ! Pendant près de 2000 ans, des mathématiciens ont tenté de démontrer cet axiome, sans succès. En vérité, on n'aboutit à aucune contradiction si l'on suppose que les droites parallèles n'existent pas. On obtient simplement une nouvelle géométrie : la géométrie sphérique, non euclidienne.

Pour en savoir plus, rendez-vous sur la chaîne YouTube Automaths de votre professeur.
« Pi Day et géométrieS - Histoires de Maths #01 »
https://youtu.be/3iNHmvjy_mw

EXERCICE 10 Dans un cube

On considère le $ABCDEFGH$ ci-dessous, ainsi qu'un point I sur le segment $[AE]$.



1. Dans chacun des cas suivants, dire si les droites sont coplanaires ou non. Si oui, préciser si elles sont parallèles ou sécantes. Lorsqu'elles sont sécantes, construire le point d'intersection de ces droites.

(AB) et (FG) ....

(CD) et (EB) ....

(IB) et (FA) ....

(AF) et (IE) ....

(DI) et (EH) ....

(GF) et (DA) ....

2. Sur le cube précédent, déterminez :

l'intersection du plan (EFH) avec le plan (ADH) ....

un plan parallèle au plan (BFG) ....

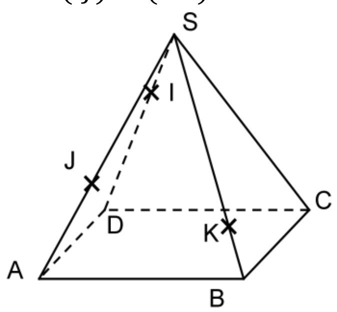
l'intersection du plan (IFB) avec le plan (HDB) ....

l'intersection du plan (GIC) avec le plan (HAD) ....

un plan parallèle au plan (IEB) est le plan (HCG) ....

EXERCICE 11 Dans une pyramide

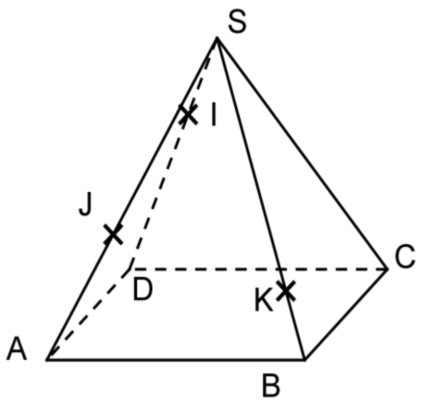
On considère une pyramide $SABCD$ de sommet S et de base carrée. On place un point I sur $[DS]$, un point J sur $[AS]$ et un point K sur $[BS]$ de telle sorte que les droites (JK) et (AB) ne sont pas parallèles, de même que les droites (IK) et (BD) et les droites (IJ) et (AD).



1. Justifiez que les droites (IJ) et (AD) sont sécantes et construire leur point d'intersection.

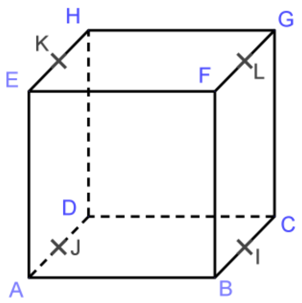
2. Justifiez que les droites (IK) et (BD) sont sécantes et construire leur point d'intersection.

3. Construisez alors l'intersection des plans (ABD) et (IJK).
4. Sans justifier la construction, vérifiez que l'intersection des droites (JK) et (BD) se trouve sur cette droite.



EXERCICE 12 Plans parallèles

On considère un cube $ABCDEFGH$ ainsi que les points I, J, K et L, milieux respectifs de $[BC]$, $[AD]$, $[EH]$ et $[FG]$



Montrez que $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AK}$

En déduire que le point L appartient au plan (AKB)

Montrez que le point J appartient au plan (GHI)

Montrez que les plans (GHI) et (AKB) sont parallèles.

EXERCICE 13 Le théorème du toit

Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans non confondus de l'espace, sécants selon une droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}$. On considère deux droites parallèles (d_1) et (d_2) contenues respectivement dans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. On note $\vec{v}$ un de leur vecteur directeur commun.

1. On suppose que que (d) n'est pas parallèle à (d_1). Justifier que $(\vec{u}; \vec{v})$ est un repère du plan $\mathcal{P}_1$.

2. Montrez que $(\vec{u}; \vec{v})$ est alors également un repère du plan $\mathcal{P}_2$.

3. Que peut-on en déduire sur les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$? Conclure.

EXERCICE 14 Alignement et parallélisme (1)

On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $A(1;-1;2)$, $B(5;1;8)$, $C(-3;2;-1)$ et $D(-1;3;2)$.

1. Déterminez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD}$.

2. Que peut-on en déduire sur les droites (AB) et (CD) ?

EXERCICE 15 Alignement et parallélisme (2)

On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $A(1;3;5)$, $B(2;7;-1)$ et $C(5;19;-19)$

1. Déterminez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

2. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

EXERCICE 16 Vecteurs coplanaires

On se place dans un repère de l'espace $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les points $A(1; 2; 3)$, $B(3; -1; 2)$, $C(0; 1; 1)$ et $D(5; 1; 6)$.

1. Déterminez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

2. Montrez que ces trois vecteurs sont coplanaires. Que peut-on en déduire pour les points A, B, C et D ?

EXERCICE 17 Coordonnées de vecteurs

On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $A(2;4;-1)$, $B(3;-2;5)$ et $C(6;7;-2)$.

1. Montrez que les points A, B et C ne sont pas alignés.

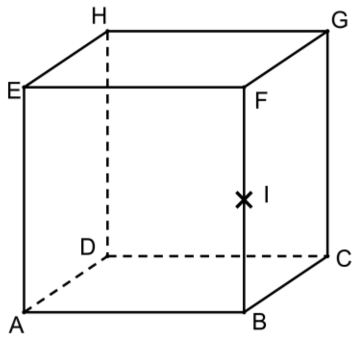
2. Déterminez les coordonnées du point I, milieu de $[BC]$.

3. Déterminez les coordonnées du point J tel que $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

4. Déterminez les coordonnées du point K tel que C soit le milieu de $[AK]$.

EXERCICE 18 Dans un cube...

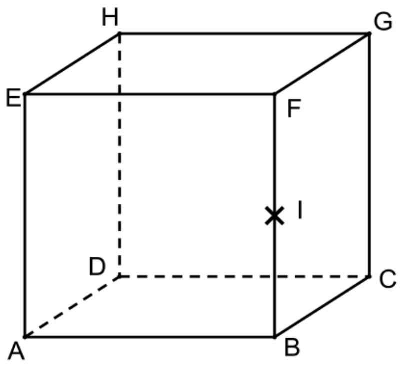
On considère un cube $ABCDEFGH$ et le point I, milieu de $[BF]$. Dans tout l'exercice, on se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Donnez les coordonnées des points G, E et I puis des vecteurs $\overrightarrow{GI}$ et $\overrightarrow{EI}$.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont-ils colinéaires ? Que peut-on en déduire sur les droites (AB) et (EI) ?

3. Construisez, en justifiant la construction, l'intersection des plans (EGI) et (ABD).

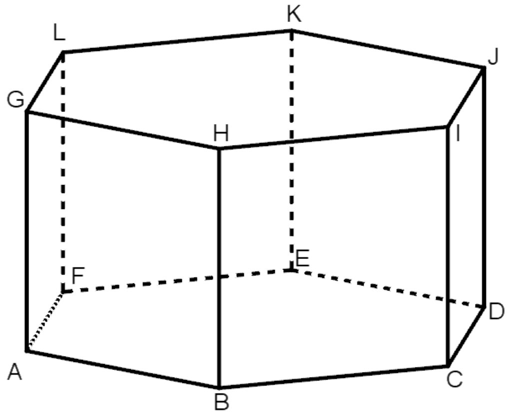


4. On considère le point J tel que $\overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{BI}$.

a. Placez le point J sur la figure. Donner ses coordonnées dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

b. Montrez que les points E, G, I et J sont coplanaires.

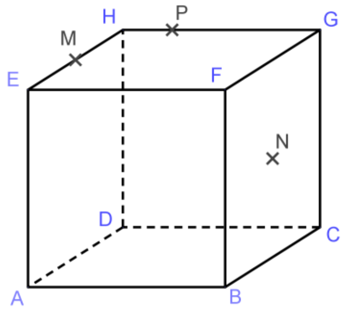
EXERCICE 19 Prisme hexagonal



On considère un prisme droit $ABCDEFGHIJKL$ dont la base est un hexagone régulier $ABCDEFGH$.
Les droites (AI) et (BK) sont-elles sécantes ?

EXERCICE 20 Type bac : Rochambeau 2014

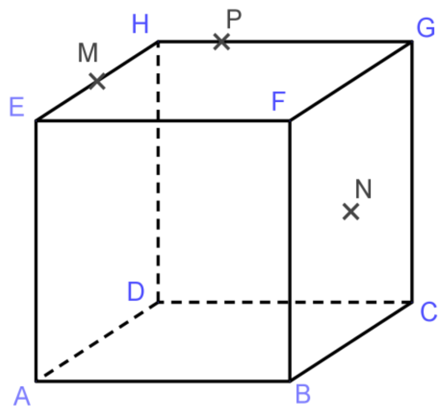
On considère un cube $ABCDEFGH$. On note M le milieu du segment $[EH]$, N celui de $[FC]$ et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.



1. Justifiez que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L. Construire le point L (vous pouvez reproduire la figure sur une autre feuille, les constructions peuvent déborder du cadre).

2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection. On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.

a. Construisez les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.



b. Construisez l'intersection des plans (MNP) et (ABF).

DÉTERMINER LA POSITION RELATIVE DE DEUX DROITES

Attention : dans l'espace, le contraire de "parallèle" n'est pas "sécante". Ces droites peuvent aussi ne pas être coplanaires. Deux droites parallèles sont forcément coplanaires.

Pour montrer que deux droites sont parallèles, il faut et il suffit de montrer que deux de leurs vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires. Dans le cas contraire, ces droites ne sont pas parallèles.

Pour montrer que deux droites sont sécantes, il suffit de montrer qu'elles sont coplanaires (en prenant deux points sur chaque droite et en montrant que ces points sont coplanaires) mais pas parallèles.

Exemple :

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. On considère dans ce repère les points $A(1;2;-3)$, $B(2;5;1)$, $C(0;3;2)$ et $D(-2;-3;-6)$. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-6\\-8\end{pmatrix}$. En particulier, on remarque que $\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc colinéaires : les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Application 1 :

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. On considère dans ce repère les points $A(-1;2;4)$, $B(3;-1;2)$, $C(2;4;-1)$ et $D(-4;17;-5)$.

- Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

- Les droites (AD) et (BC) sont-elles parallèles ?

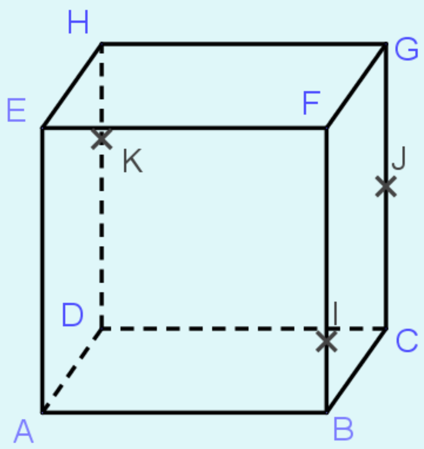
- Que peut-on alors en déduire sur les droites (AB) et (CD) ?

CONSTRUIRE L'INTERSECTION DE DEUX PLANS

L'intersection de deux plans non parallèles est une droite. Or, pour construire une droite, il suffit de deux points. Pour construire l'intersection de deux plans non parallèles, il suffit donc de trouver deux points appartenant à ces deux plans. Il peut s'agir de points d'intersection de deux droites, appartenant chacune à un des deux plans.

Exemple :

On considère un cube $ABCDEFGH$. On place le point I tel que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$, le point J, milieu de $[GC]$ et le point K tel que $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HD}$. On souhaite construire l'intersection des plans (KIJ) et (ABC).



Application 2

Déterminer les coordonnées des points I, J et K dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$. Montrer que...

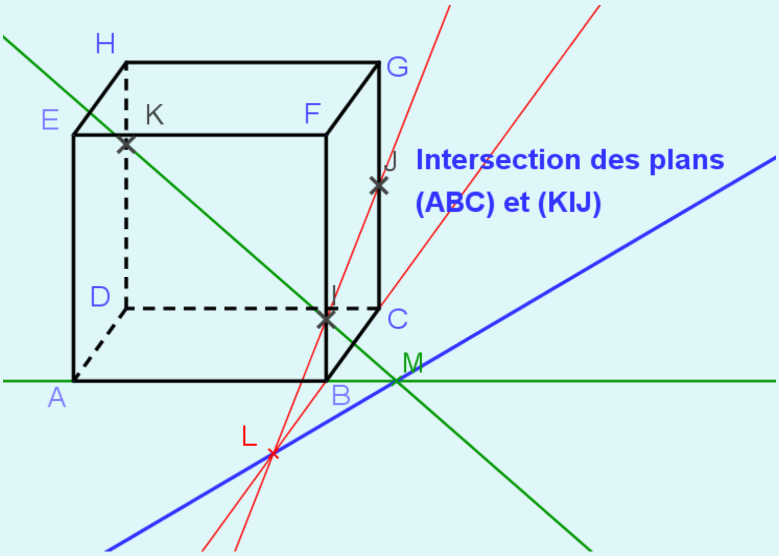
- ... les droites (IJ) et (BC) ne sont pas parallèles,

- ... les droites (IK) et (BD) ne sont pas parallèles,

- ... les droites (JK) et (DC) ne sont pas parallèles.

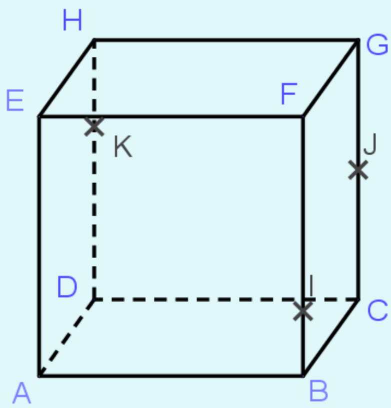
Les droites (IJ) et (BC) ne sont pas parallèles. Or, ces droites sont coplanaires puisque les points I, J, B et C le sont également (ils appartiennent à la face de droite). Les droites (IJ) et (BC) sont donc sécantes en un point L. Puisque la droite (IJ) appartient au plan (KIJ) et la droite (BC) appartient au plan (ABC), le point L appartient donc à l'intersection des plans (ABC) et (KIJ).

Les droites (IK) et (BD) ne sont pas parallèles. Or, ces droites sont coplanaires puisque les points I, J, B et C le sont également (ils appartiennent au rectangle qui coupe le cube en deux). Les droites (IK) et (BD) sont donc sécantes en un point M. Puisque la droite (IK) appartient au plan (KIJ) et la droite (BD) appartient au plan (ABC), le point M appartient donc à l'intersection des plans (ABC) et (KIJ).
Les points L et M appartiennent à l'intersection des plans (ABC) et (KIJ). L'intersection de ces plans est donc la droite (LM).

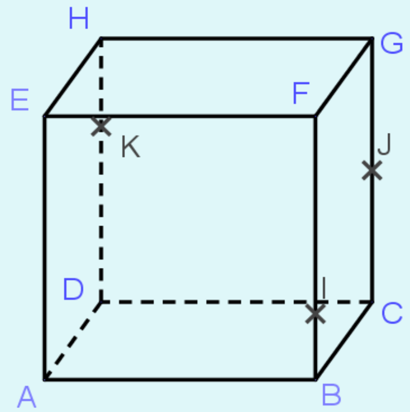


Application 3 :
En exploitant la même figure, construire, en justifiant la construction :

- l'intersection des plans (KIC) et (ABD)



- l'intersection des plans (KIJ) et (EFH)



CORRECTIONS

DETERMINER LA POSITION RELATIVE DE DEUX DROITES

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$. On considère dans ce repère les points $A(-1; 2; 4)$, $B(3; -1; 2)$, $C(2; 4; -1)$ et $D(-4; 17; -5)$.

- On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-6\\13\\-4\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires, les droites (AB) et (CD) ne sont donc pas parallèles.
- On a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\15\\-9\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\5\\-3\end{pmatrix}$. En particulier, $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{AD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires : les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
- Puisque (AD) et (BC) sont parallèles, les points A, B, C et D sont coplanaires. Les droites (AB) et (CD) le sont donc également. Celles-ci ne sont cependant pas parallèles, elles sont donc sécantes.

CONSTRUIRE L'INTERSECTION DE DEUX PLANS

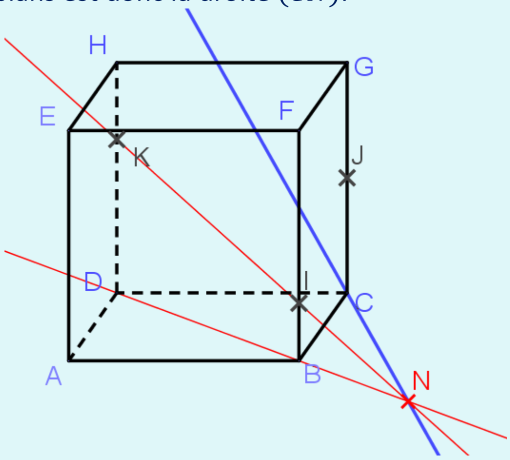
Déterminer les coordonnées des points I, J et K dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$. Montrer que...

- On a $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\1\\1/4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Les droites (IJ) et (BC) ne sont donc pas parallèles,

- On a $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-1\\1\\5/12\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Les droites (IK) et (BD) ne sont pas parallèles,
- On a $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}-1\\0\\1/6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Les droites (JK) et (DC) ne sont pas parallèles.

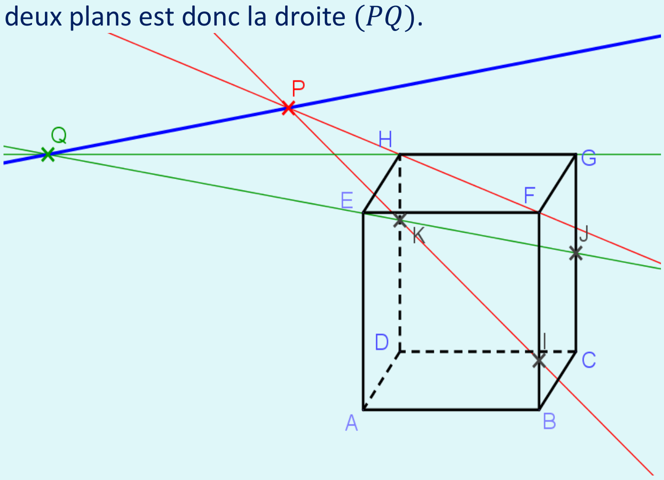
Pour l'intersection des plans (KIC) et (ABD)

- Le plan (ABD) correspond à la face du dessous. Le point C en fait partie. De plus, le point C appartient au plan (KIC). Ainsi, le point C appartient à l'intersection des plans (KIC) et (ABD).
- La droite (KI) appartient au plan (KIC). La droite (BD) appartient au plan (ABD). Ces droites sont coplanaires mais non parallèles : elles sont donc sécantes en un point N qui appartient à l'intersection des plans (ABD) et (KIC).
- L'intersection de ces deux plans est donc la droite (CN).



Pour l'intersection des plans (KIJ) et (EFH)

- La droite (KI) appartient au plan (KIJ). La droite (HF) appartient au plan (EFH). Ces droites sont coplanaires mais non parallèles : elles sont donc sécantes en un point P qui appartient à l'intersection des plans (EFH) et (KIC).
- La droite (KJ) appartient au plan (KIJ). La droite (HG) appartient au plan (EFH). Ces droites sont coplanaires mais non parallèles : elles sont donc sécantes en un point Q qui appartient à l'intersection des plans (EFH) et (KIC).
- L'intersection de ces deux plans est donc la droite (PQ).



Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le devoir n°1