COURS PI

☆ L'école sur-mesure ☆

de la Maternelle au Bac, Établissement d'enseignement privé à distance, déclaré auprès du Rectorat de Paris

Terminale - Module 4 - Calcul différentiel, calcul intégral

Mathématiques

v.5.1

- ***Guide de méthodologie***
  pour appréhender notre pédagogie
- ***Leçons détaillées***
  pour apprendre les notions en jeu
- ***Exemples et illustrations***
  pour comprendre par soi-même
- ***Prolongement numérique***
  pour être acteur et aller + loin
- ***Exercices d'application***
  pour s'entraîner encore et encore
- ***Corrigés des exercices***
  pour vérifier ses acquis

www.cours-pi.com

Paris & Montpellier

EN ROUTE VERS LE BACCALAURÉAT

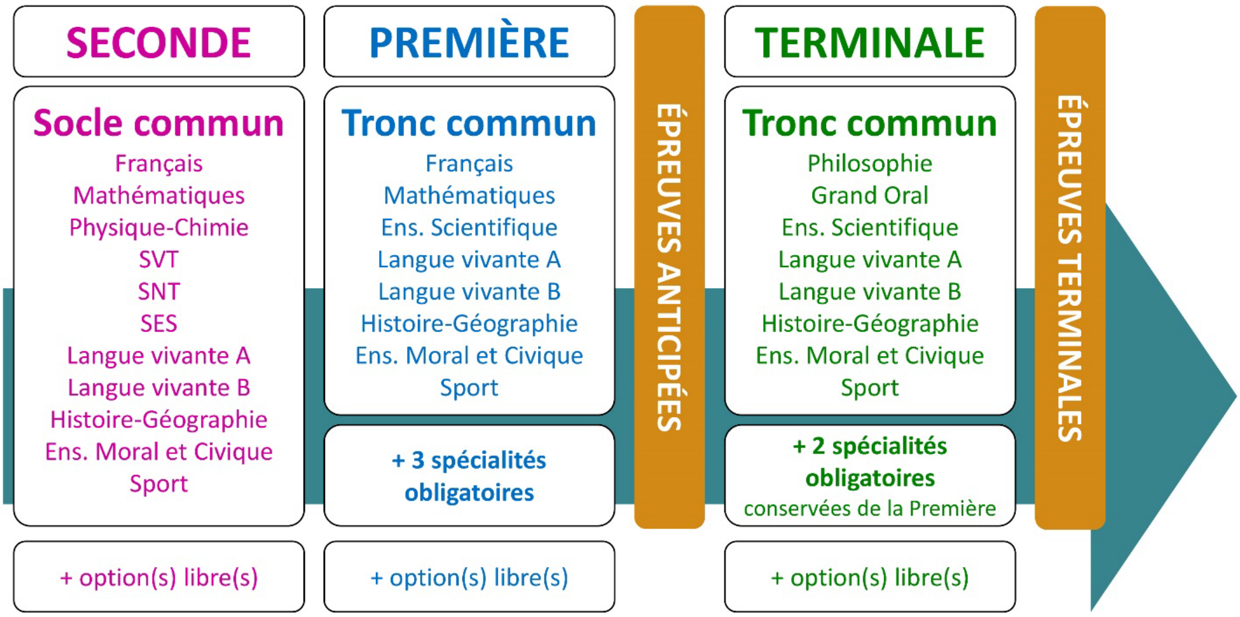
Comme vous le savez, **la réforme du Baccalauréat** est entrée en vigueur progressivement jusqu'à l'année 2021, date de délivrance des premiers diplômes de la nouvelle formule.

Dans le cadre de ce nouveau Baccalauréat, **notre Etablissement**, toujours attentif aux conséquences des réformes pour les élèves, s'est emparé de la question avec force **énergie** et **conviction** pendant plusieurs mois, animé par le souci constant de la réussite de nos lycéens dans leurs apprentissages d'une part, et par la **pérennité** de leur parcours d'autre part. Notre Etablissement a questionné la réforme, mobilisé l'ensemble de son atelier pédagogique, et déployé tout **son savoir-faire** afin de vous proposer un enseignement tourné continuellement vers l'**excellence**, ainsi qu'une scolarité tournée vers la **réussite**.

- Les **Cours Pi** s'engagent pour faire du parcours de chacun de ses élèves un **tremplin vers l'avenir**.
- Les **Cours Pi** s'engagent pour ne pas faire de ce nouveau Bac un diplôme au rabais.
- Les **Cours Pi** vous offrent **écoute** et **conseil** pour coconstruire une **scolarité sur-mesure**.

LE BAC DANS LES GRANDES LIGNES

Ce nouveau Lycée, c'est un enseignement à la carte organisé à partir d'un large tronc commun en classe de Seconde et évoluant vers un parcours des plus spécialisés année après année.



CE QUI A CHANGÉ

- Il n'y a plus de séries à proprement parler.
- Les élèves choisissent des spécialités : trois disciplines en classe de Première ; puis n'en conservent que deux en Terminale.
- Une nouvelle épreuve en fin de Terminale : le Grand Oral.
- Pour les lycéens en présentiel l'examen est un mix de contrôle continu et d'examen final laissant envisager un diplôme à plusieurs vitesses.
- Pour nos élèves, qui passeront les épreuves sur table, le Baccalauréat conserve sa valeur.

CE QUI N'A PAS CHANGÉ

- Le Bac reste un examen accessible aux candidats libres avec examen final.
- Le système actuel de mentions est maintenu.
- Les épreuves anticipées de français, écrit et oral, tout comme celle de spécialité abandonnée se dérouleront comme aujourd'hui en fin de Première.

A l'occasion de la réforme du Lycée, nos manuels ont été retravaillés dans notre atelier pédagogique pour un accompagnement optimal à la compréhension. Sur la base des programmes officiels, nous avons choisi de créer de nombreuses rubriques :

- **Suggestions de lecture** pour s'ouvrir à la découverte de livres de choix sur la matière ou le sujet
- **Réfléchissons ensemble** pour guider l'élève dans la réflexion
- **L'essentiel** pour souligner les points de cours à mémoriser au cours de l'année
- **À vous de jouer** pour mettre en pratique le raisonnement vu dans le cours et s'accaparer les ressorts de l'analyse, de la logique, de l'argumentation, et de la justification
- **Pour aller plus loin** pour visionner des sites ou des documentaires ludiques de qualité
- Et enfin ... la rubrique **Les Clés du Bac by Cours Pi** qui vise à vous donner, et ce dès la seconde, toutes les cartes pour réussir votre examen : notions essentielles, méthodologie pas à pas, exercices types et fiches étape de résolution !

MATHÉMATIQUES TERMINALE

Module 4 – Calcul différentiel, calcul intégral

L'AUTEUR

Jason LAPEYRONNIE

« N'abandonnez pas à la première page difficile. Explorez, découvrez, soyez curieux ! ».
Professeur agrégé de mathématiques et passionné de la discipline, il s'investit, en dehors de l'enseignement, dans la vulgarisation et la diffusion au grand public des mathématiques sur de nombreux supports (YouTube, blog, édition, membre du Café des sciences...).

PRÉSENTATION

Ce **cours** est divisé en chapitres, chacun comprenant :

- Le **cours**, conforme aux programmes de l'Education Nationale
- Des **exercices d'application et d'entraînement**
- Les **corrigés** de ces exercices
- Des **devoirs** soumis à correction (et ***se trouvant hors manuel***). Votre professeur vous renverra le corrigé-type de chaque devoir après correction de ce dernier.

Pour une manipulation plus facile, les corrigés-types des exercices d'application et d'entraînement sont regroupés en fin de manuel.

CONSEILS A L'ÉLÈVE

Vous disposez d'un support de Cours complet : **prenez le temps** de bien le lire, de le comprendre mais surtout de l'**assimiler**. Vous disposez pour cela d'exemples donnés dans le cours et d'exercices types corrigés.
Vous pouvez rester un peu plus longtemps sur une unité mais travaillez régulièrement.

LES FOURNITURES

Vous devez posséder :

- une **calculatrice graphique pour l'enseignement scientifique au Lycée comportant un mode examen (requis pour l'épreuve du baccalauréat).**
- un **tableur** comme Excel de Microsoft (payant) ou Calc d'Open Office (gratuit et à télécharger sur http ://fr.openoffice.org/). En effet, certains exercices seront faits de préférence en utilisant un de ces logiciels, mais vous pourrez également utiliser la calculatrice).

LES DEVOIRS

Les devoirs constituent le moyen d'évaluer l'acquisition de vos *savoirs* (« Ai-je assimilé les notions correspondantes ? ») et de vos *savoir-faire* (« Est-ce que je sais expliquer, justifier, conclure ? »).

Placés à des endroits clés des apprentissages, ils permettent la vérification de la bonne assimilation des enseignements.

Aux *Cours Pi*, vous serez accompagnés par un professeur selon chaque matière tout au long de votre année d'étude. Référez-vous à votre « Carnet de Route » pour l'identifier et découvrir son parcours.
Avant de vous lancer dans un devoir, assurez-vous d'avoir **bien compris les consignes**.
Si vous repérez des difficultés lors de sa réalisation, n'hésitez pas à le mettre de côté et à revenir sur les leçons posant problème. **Le devoir n'est pas un examen**, il a pour objectif de s'assurer que, même quelques jours ou semaines après son étude, une notion est toujours comprise.
Aux *Cours Pi*, chaque élève travaille à son rythme, parce que chaque élève est différent et que ce mode d'enseignement permet le « sur-mesure ».
Nous vous engageons à respecter le moment indiqué pour faire les devoirs. Vous les identifierez par le bandeau suivant :

Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le devoir n°1

Il est **important de tenir compte des remarques, appréciations et conseils du professeur-correcteur**. Pour cela, il est **très important d'envoyer les devoirs au fur et à mesure** et non groupés. **C'est ainsi que vous progresserez !**

Donc, dès qu'un devoir est rédigé, envoyez-le aux *Cours Pi* par le biais que vous avez choisi :

1) Par **soumission en ligne** via votre espace personnel sur **PoulPi**, pour un envoi **gratuit**, **sécurisé** et plus **rapide**.
2) Par **voie postale** à *Cours Pi*, 9 rue Rebuffy, 34 000 Montpellier
*Vous prendrez alors soin de joindre une **grande enveloppe libellée à vos nom et adresse**, et **affranchie au tarif en vigueur** pour qu'il vous soit retourné par votre professeur*

N.B. : *quel que soit le mode d'envoi choisi, vous veillerez à **toujours joindre l'énoncé du devoir** ; plusieurs énoncés étant disponibles pour le même devoir.*
N.B. : *si vous avez opté pour un envoi par voie postale et que vous avez à disposition un scanner, nous vous engageons à conserver une copie numérique du devoir envoyé. Les pertes de courrier par la Poste française sont très rares, mais sont toujours source de grand mécontentement pour l'élève voulant constater les fruits de son travail.*

SOUTIEN ET DISPONIBILITÉ

VOTRE RESPONSABLE PÉDAGOGIQUE

Professeur des écoles, professeur de français, professeur de maths, professeur de langues : notre Direction Pédagogique est constituée de spécialistes capables de dissiper toute incompréhension.

Au-delà de cet accompagnement ponctuel, notre Etablissement a positionné ses Responsables pédagogiques comme des « super profs » capables de co-construire avec vous une scolarité sur-mesure.
En somme, le Responsable pédagogique est votre premier point de contact identifié, à même de vous guider et de répondre à vos différents questionnements.

Votre Responsable pédagogique est la personne en charge du suivi de la scolarité des élèves.
Il est tout naturellement votre premier référent : une question, un doute, une incompréhension ? Votre Responsable pédagogique est là pour vous écouter et vous orienter. Autant que nécessaire et sans aucun surcoût.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?	Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi.
QUEL EST SON RÔLE ?	Orienter les parents et les élèves. Proposer la mise en place d'un accompagnement individualisé de l'élève. Faire évoluer les outils pédagogiques. Encadrer et coordonner les différents professeurs.

VOS PROFESSEURS CORRECTEURS

Notre Etablissement a choisi de s'entourer de professeurs diplômés et expérimentés, parce qu'eux seuls ont une parfaite connaissance de ce qu'est un élève et parce qu'eux seuls maîtrisent les attendus de leur discipline. En lien direct avec votre Responsable pédagogique, ils prendront en compte les spécificités de l'élève dans leur correction. Volontairement bienveillants, leur correction sera néanmoins juste, pour mieux progresser.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?	Une question sur sa correction ? • faites un mail ou téléphonez à votre correcteur et demandez-lui d'être recontacté en lui laissant un message avec votre nom, celui de votre enfant et votre numéro. • autrement pour une réponse en temps réel, appelez votre Responsable pédagogique.

LE BUREAU DE LA SCOLARITÉ

Placé sous la direction d'Elena COZZANI, le Bureau de la Scolarité vous orientera et vous guidera dans vos démarches administratives. En connaissance parfaite du fonctionnement de l'Etablissement, ces référents administratifs sauront solutionner vos problématiques et, au besoin, vous rediriger vers le bon interlocuteur.

QUAND PUIS-JE LE JOINDRE ?	Du lundi au vendredi : horaires disponibles sur votre carnet de route et sur PoulPi. 04.67.34.03.00 scolarite@cours-pi.com

LE SOMMAIRE

Mathématiques - Module 4 - Calcul différentiel, calcul intégral

CHAPITRE 4. Primitives et équations différentielles 69

COMPÉTENCES VISEES

- Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence et les fonctions de la forme $(v' \circ u) \times u'$.
- Pour une équation différentielle $y' = ay + b$, déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer toutes les solutions.
- Pour une équation différentielle $y' = ay + f$: à partir de la donnée d'une solution particulière, déterminer toutes les solutions.

CHAPITRE 5. Cwalcul intégral 93

COMPÉTENCES VISEES

- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, à l'aide d'une intégration par parties.
- Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction.
- Calculer l'aire entre deux courbes.
- Étudier une suite d'intégrales, vérifiant éventuellement une relation de récurrence.
- Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

CORRIGÉS 115

SUGGESTIONS CULTURELLES

ESSAIS

- **La grande aventure des nombres et du calcul** *Jason Lapeyronnie*
- **Les maths c'est magique !** *Johnny Ball*
- **17 Équations qui ont changé le monde** *Ian Stewart*
- **Alex au pays des chiffres** *Alex Bellos*
- **Le grand roman des maths :de la préhistoire à nos jours** *Mickael Launay*
- **Histoire universelle des chiffres : l'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul** *Georges Ifrah*
- **Le démon des maths** *Hans Magnus Enzensberger*
- **A propos de rien : une histoire du zéro** *Robert Kaplan*

BANDES-DESSINÉES

- **Logicomix** *Doxiádis / Papadátos / Papadimitríou*
- **Les maths en BD 1 et 2** *Larry Gonick*

DOCUMENTAIRES AUDIOVISUELS

- **L’extraordinaire aventure du chiffre 1** *Terry Jones*
- **Le grand mystère des mathématiques** *Richard Reisz*

SITES INTERNET

- **www.automaths.blog** *le site de votre professeur Jason Lapeyronnie*
- **La chaîne YouTube Automaths** *la chaîne de votre professeur Jason Lapeyronnie*

Le Cours

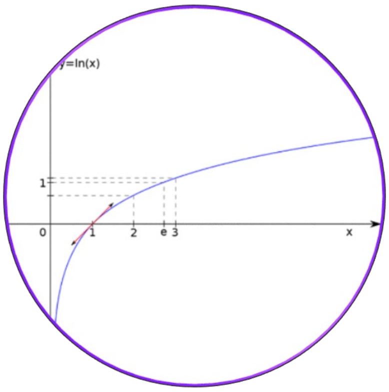
INTRODUCTION

Le calcul infinitésimal, l'art de raisonner sur des quantités "infiniment petites", contient les notions sur les fonctions usuelles, le calcul différentiel et intégral. Ces notions ont historiquement précédé la notion de limite qui en donnera des fondements rigoureux.

On trouve ainsi des anticipations du calcul intégral chez Archimède, qui calcule la longueur du cercle ou l'aire d'un disque en le divisant en des morceaux de plus en plus petits. Ce même Archimède réalisera par ailleurs la quadrature de la parabole – c'est-à-dire le calcul de l'aire délimitée par un segment et une parabole – ou la cubature des solides. En Chine, Liu-Hui donnera la formule pour calculer le volume d'un cylindre tandis que dans le monde arame, Ibn al-Haytham déterminera le volume d'un paraboloïde. Bien plus tard, Grégoire de Saint-Vincent, Galilée ou Cavalieri développeront la méthode d'exhaustion. Pour l'anecdote, Kepler utilisera lui-même cette méthode pour calculer le volume des tonneaux de vin, soupçonnant les marchands de ne pas être honnête avec lui...

Les travaux de Newton et Leibniz au XVII$^{\text{ème}}$ siècle révèlent deux visions et deux pratiques différentes du calcul infinitésimal. La justification de telles méthodes nécessitait une mise au point de la notion de limite. Des fondations solides sont proposées dans le Cours d'Analyse de Cauchy (1821, 1823), qui définit précisément la notion de limites et en fait le point de départ de l'analyse. Parallèlement, les résolutions d'équations différentielles, provenant de la mécanique ou des mathématiques elles-mêmes, se structurent notamment en lien avec les séries (Newton, Euler, D'Alembert, Lagrange, Cauchy, Clairaut, Riccati) et illustrent là encore les ponts entre le discret et le continu.

Introduction inspirée du programme officiel de Terminale



Les fonctions logarithmes trouvent historiquement leur origine dans la nécessité de simplifier certains calculs complexes de trigonométrie, plus précisément en transformant des produits en sommes. Ces fonctions furent introduites par le mathématicien Napier (Neper en latin) au XVIème siècle. Son idée était aussi simple qu'efficace : pour multiplier deux grands nombres, il suffisait de connaître la valeur de leurs logarithmes consignées dans des tables, les additionner, puis de retrouver l'antilogarithme de ce résultat dans les mêmes tables. En parallèle, des travaux furent menés par d'autres mathématiciens comme Georges Saint-Vincent pour déterminer des calculs d'aires d'hyperbole, et c'est le mathématicien Huygens qui finalement fit le lien entre ces deux approches méthodologiques. Une fonction logarithmes dites à l'époque naturelle fut utilisée pour ce calcul d'hyperbole et, 30 ans après sa mort, elle fut nommée logarithmes népériens en l'honneur de Néper. Nous découvrirons dans ce chapitre la définition mathématique de cette fonction, ses propriétés et les applications associées.

COMPÉTENCES VISÉES

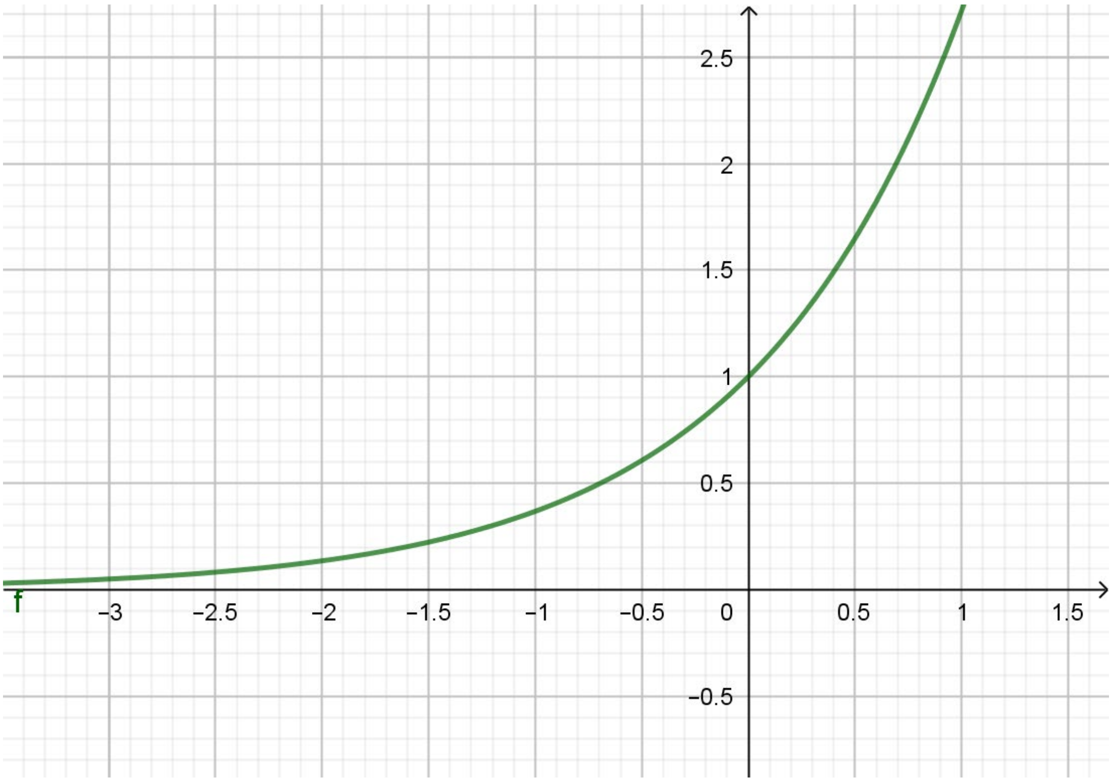
- Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation.
- Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions exponentielles et logarithme.

PRÉ-REQUIS

- Etude de fonctions
- Fonction exponentielle

Première approche

On veut étudier les solutions de l'équation : $e^x = m$, où m est un réel.



1. Discutez suivant les valeurs de m le nombre de solution de l'équation ainsi que leurs signes.

2. A l'aide de la calculatrice, et de la table des valeurs de l'exponentielle, donnez une valeur approchée de la solution pour $\boldsymbol{m = 2}$ et pour $\boldsymbol{m = 0,5}$. Que constate-t-on ?

3. A l'aide de la touche ln de la calculatrice, retrouvez les résultats précédents. *La fonction associée à la touche ln s'appelle le logarithme népérien.*

Il existe d'autres fonctions logarithmes, en particulier les logarithmes décimaux qui sont très utilisés en physiques (pH, niveau sonore...). Ils font l'objet d'un exercice.

Correction

1. $m \leq 0$ aucune solution.
   $m > 0$ une solution unique.

2. $m = 2$ solution : $x \approx 0,69$
   $m = 0,5$ solution : $x \approx -0,69$

3. On constate que les 2 solutions sont opposées.
   $\ln 2 \approx 0,6931$ $\ln 0,5 \approx -0,6931$
   On tape ln10. La solution vaut environ **2,3.**

---

01 FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Définition et propriétés analytiques

DÉFINITION

L'ESSENTIEL

On admet que pour tout réel x de $]0;+\infty[$, l'équation $e^y = x$ admet une unique solution appelé **logarithme népérien** de *x* et noté $ln(x)$.

Pour tout $x > 0, e^y = x \Leftrightarrow y = ln\,x$

On note également le logarithme népérien de *x*: lnx

Exemple : la fonction carrée est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$e^0 = 1 \text{ donc } ln\,1 = 0 \quad e^1 = e \quad \text{donc } ln(e) = 1$$

L'ESSENTIEL

La fonction **logarithme népérien** notée **ln** est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout *x* associe son logarithme népérien.

PROPRIÉTÉS

L'ESSENTIEL

(1) Pour tout réel *x* de $]0;+\infty[$, $e^{ln\,x} = x$.

(2) Pour tout réel *x*, $ln(e^x) = x$.

Justification

(1) Par définition ln *x* est le seul réel dont l'exponentielle vaut *x*.

(2) $e^x > 0$ donc $\ln(e^x)$ existe.
$\ln(e^x)$ est l'unique réel dont l'exponentielle est e^x, c'est donc *x*.

Exemple :

$e^{\ln 5} = 5$ $\quad \ln(e^3) = 3$ $\quad \ln(e^{-1,5}) = -1,5$

À VOUS DE JOUER 1

Complétez

$\ln 1 = \ldots\ldots\ldots$ $\quad \ln(e) = \ldots\ldots\ldots$ $\quad \ln(\frac{1}{e}) = \ln(e^{\ldots\ldots\ldots}) = \ldots\ldots\ldots$

$e^{\ln 6} = \ldots\ldots\ldots$ $\quad \ln(e^{-7}) = \ldots\ldots\ldots$ $\quad e^{\ln 2x} = \ldots\ldots\ldots$ $\quad \ln(e^{5-2x}) = \ldots\ldots\ldots$

La fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Deux fonctions *f* et *g* sont réciproques si :

$$\begin{cases} \text{pour tout x de } D_f, f(x) \in D_g \text{ et } g \circ f(x) = x \\ \text{pour tout x de } D_g, g(x) \in D_f \text{ et } f \circ g(x) = x \end{cases}$$ pour tout *x* de D_f,

Exemple :

La fonction réciproque de la fonction inverse est la fonction inverse.

Sur [0;+∞[, la fonction réciproque de la fonction carrée est la fonction racine carrée.

ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

L'ESSENTIEL

La **fonction logarithme népérien** est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction inverse.

$$ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Justification

On utilise la dérivée d'une fonction composée :

On pose pour $x > 0, f(x) = e^{\ln x}$ et $g(x) = x$

D'après ce qui précède : $f(x) = g(x)$

$f'(x) = \ln'(x)\ e^{\ln x} = \ln'(x)\ x$ et $g'(x) = 1$

Donc : $\ln'(x)\ x = 1$ soit $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

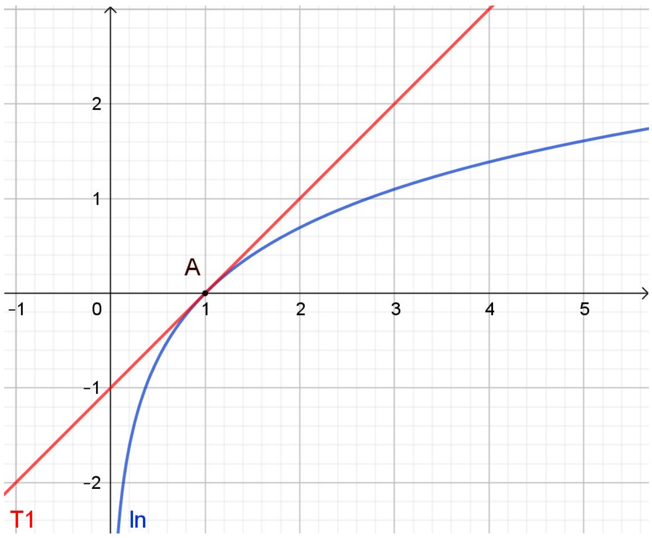
L'ESSENTIEL

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Justification

Pour $x > 0, \frac{1}{x} > 0$ donc $\ln'(x) > 0$. ln est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$	$\|\|$	$+$
$\ln(x)$	$\|\|$	$\nearrow$



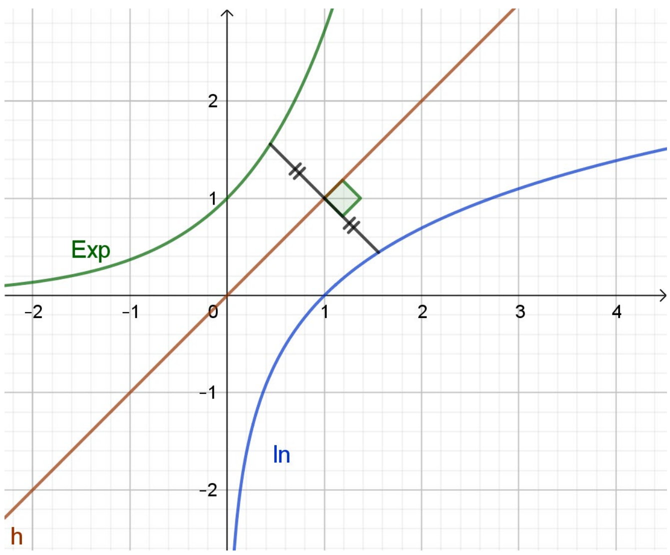
Il faut connaître l'allure de la courbe.

Calcul de la tangente en 1 :

$\ln(1)=0$ et $\ln'(1)=\dfrac{1}{1}=1$ L'équation de la tangente est donc : $y=\ln'(1)(x-1)+\ln(1)$

Soit: $y=x-1$

Remarque : les fonctions ln et exponentielles étant réciproques, leurs courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation : $y=x$.



À VOUS DE JOUER 2

Complétez.

1. Pour $x>0$, $\ln x \leq 0 \Leftrightarrow$............................
2. Compléter avec < ou > : $\ln 5$........ $\ln 10$ $\ln 1{,}2$........ $\ln 1$ $\ln 0{,}5$........0
3. La fonction ln est strictement .... sur $]0;+\infty[$.
4. Les courbes des fonctions ln et exp sont .... par rapport à la droite $y=x$ car

   ces fonctions sont des fonctions ....
5. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x+\ln x$. On a : $f'(x)=$..............................

Remarque importante :

En Python la fonction ln s'appelle : log. Il faut pour l'utiliser importer le module math.

Exemple :

```
from math import *
print (log(2)) #affiche ln2
```

Sur la calculatrice, on doit utiliser la touche ln.

02 FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Propriétés algébriques

L'ESSENTIEL

Pour tous réels *a* et *b* strictement positifs, $ln(ab) = ln\,a + ln\,b$

Justification

$$e^{ln\,a+ln\,b} = e^{ln\,a}\times e^{ln\,b} = ab$$

$ln\,a + ln\,b$ est l'unique réel dont l'exponentielle vaut ab, c'est donc $ln(ab)$.

Exemples

$$ln\,14 = ln(2\times 7) = ln\,2 + ln\,7$$
$$ln(2x) = ln\,2 + ln\,x$$

À VOUS DE JOUER 3

Complétez.

$$ln(3t) = ln\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + ln\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$ln\frac{1}{8} + ln\,6 = ln\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = ln\frac{3}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

On en déduit les propriétés suivantes :

L'ESSENTIEL

Pour tous réels *a* et *b* strictement positifs,

$ln(\frac{1}{a}) = -ln\,a$ $\quad ln(\frac{a}{b}) = ln\,a - ln\,b$ $\quad ln(a^n) = n\,ln\,a$ $\quad ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}ln\,a$

Justifications

$$ln\,1 = 0 \text{ donc } ln(a\times\frac{1}{a}) = ln\,a + ln(\frac{1}{a}) = 0 \text{ soit } ln(\frac{1}{a}) = -ln\,a$$
$$ln\frac{a}{b} = ln(a\times\frac{1}{b}) = ln\,a + ln(\frac{1}{b}) = 0 = ln\,a - ln\,b$$
$$ln\,a^n = ln(\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{ln\,a + ln\,a + \ldots + ln\,a}_{n \text{ fois}} = n\,ln\,a$$
$$ln\,a = ln(\sqrt{a})^2 = 2\,ln\sqrt{a} \text{ donc } ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}ln\,a$$

Exemples

1) $\ln\frac{1}{3} = -\ln 3$ $\qquad \ln\frac{2}{3} = \ln 2 - \ln 3$ $\qquad \ln 9 = \ln 3^2 = 2\ln 3$ $\qquad \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3$

2) $3\ln(8) - 4\ln\sqrt{2} - \ln\frac{1}{2} = 3\ln(2^3) - 4\ln\sqrt{2} - \ln\frac{1}{2} = 3\times 3\ln 2 - 4\times\frac{1}{2}\ln 2 - (-\ln 2) = 8\ln 2$

À VOUS DE JOUER 4

Complétez, simplifier l'expression sous la forme : $a\ln 3$

$5\ln 3-3\ln 9+6\ln\sqrt{3}=5\ln 3-3\times\ldots\ldots\ln 3+6\times\ldots\ldots\ln 3=\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ln 3$

....

....

....

03 FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Résolution d'équations et d'inéquations

L'ESSENTIEL

Pour a et b strictement positifs :

$$\ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b$$
$$\ln a<\ln b \Leftrightarrow a<b$$

Il faut faire attention à la positivité des expressions sous le ln.

Exemples

Résoudre : $ln(x-1)=ln(2x)$

On doit avoir : $x-1>0$ et $2x>0$ soit $x>1$

Pour $x>1$,

$ln(x-1)=ln(2x)\Leftrightarrow x-1=2x$

$\Leftrightarrow x=-1$ non valide donc $S=\emptyset$

À VOUS DE JOUER 5

Complétez.

Résoudre : $ln(2x-1)=ln(x+3)$

On doit avoir : $2x-1>0$ et $x+3>0$ soit ……………………………………………………

Pour $x>$……………………,

$ln(2x-1)=ln(x+3)\Leftrightarrow$………….=…………….

$\Leftrightarrow x=$………… solution ………… donc $S=$……………..

Conseil : après avoir trouvé des solutions, il faut vérifier !

Exemple

Résoudre : $\ln(x(x-1))=\ln(3x)$

Voilà un exemple de solution à ne pas suivre !

$\ln(x(x-1))=\ln(3x)\Leftrightarrow x(x-1)=3x\Leftrightarrow x(x-4)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=4$

4 est bien solution, mais pas 0 car ln n'est pas défini en 0.

Il y a équivalence entre $\ln a = \ln b$ et $a = b$ uniquement quand a et b sont strictement positifs. On peut maintenant également résoudre les équations de type : (1) $e^a = b$ et (2) $\ln a = b$ Pour (1) : on doit avoir b>0 ; pour (2) : on doit avoir a>0 .

Exemple

Résoudre : $e^{2x+6} = 9$

Equation de type (1) « on passe aux ln » :

L'étape entre [] peut être sautée.

$$e^{2x+6} = 9 \Leftrightarrow [\ln e^{2x+6} = \ln 9]$$
$$\Leftrightarrow 2x + 6 = \ln 9$$
$$\Leftrightarrow 2x = 2\ln 3 - 6$$
$$\Leftrightarrow x = \ln 3 - 3 \qquad S = \{\ln 3 - 3\}$$

Résoudre : $\ln(x+10) = 2$

Equation de type (2) « on passe aux exp » :

L'étape entre [] peut être sautée.

Pour $x + 10 > 0$,

$$\ln(x+10) = 2 \Leftrightarrow [e^{\ln(x+10)} = e^2]$$
$$\Leftrightarrow x + 10 = e^2$$
$$\Leftrightarrow x = e^2 - 10 \text{ valide} \qquad S = \{e^2 - 10\}$$

À VOUS DE JOUER 6

Complétez.

Résoudre $e^{3x-4} = 2$

Equation de type (1) « on passe aux .... » :

$e^{3x-4} = 2 \Leftrightarrow [\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$

$\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots = \ln 2$

$\Leftrightarrow x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; S = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

Résoudre : $\ln(2x - 4) = 2$

Equation de type (2) « on passe aux .... » :

Pour $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots > 0$, soit pour $x > \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ln(2x - 4) = 2 \Leftrightarrow [\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$

$\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = e^2$

$\Leftrightarrow x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ valide $S = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Fonctions définies avec la fonction logarithme népérien

L'ESSENTIEL

Soit *u* une fonction définie et dérivable sur I, tel que pour tout *x* de I : $u(x) > 0$. Si :

$$f(x) = ln(u(x)) \text{ alors } f'(x) = \frac{u\prime(x)}{u(x)}$$

Exemple

1) $f(x) = \ln 3x \quad f'(x) = \frac{3}{x}$

2) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

À VOUS DE JOUER 7

Complétez.

1. $(x) = ln(2x + 3)$ $f'(x) =$............................

2. $(x) = ln(1 - x)$ $f'(x) =$............................

Abordons maintenant une série d'exercices, afin de vérifier vos connaissances.
Les réponses aux exercices se trouvent en fin de manuel.

EXERCICE 01 Déterminez la bonne réponse.

1. Proposition 1
   a. $ln0=1$ ☐
   b. $ln0=e$ ☐
   c. $ln0$ n'existe pas ☐
2. Proposition 2
   a. $lne=1$ ☐
   b. $lne=e$ ☐
   c. lne n'existe pas ☐
3. Proposition 3
   a. $ln\,0{,}3>0$ ☐
   b. $ln\,0{,}3<0$ ☐
   c. $ln\,0{,}3$ n'existe pas ☐
4. Proposition 4
   a. $ln(-3)<0$ ☐
   b. $ln(-3)=-ln\,3$ ☐
   c. $ln(-3)$ n'existe pas ☐

EXERCICE 02 Exprimez sous forme de fraction les propositions suivantes.

1. $3\,ln(e^4)+ln\sqrt{e}$

2. $ln\left(e^2\sqrt{e}\right)-ln\left(\frac{1}{e}\right)$

EXERCICE 03 Exprimez en fonction de ln2 et ln3 :

1. $ln\left(\frac{8}{9}\right)$

2. $2\,ln(\,3\sqrt{2}) - 2\,ln(\,2\sqrt{3})$

EXERCICE 04 Résolvez.

N'oubliez pas de commencer par définir l'ensemble sur lequel l'équation ou l'inéquation à un sens !

1. $ln(\,2x - 1) = 0$

2. $ln(\,4 - x) = -1$

3. $e^{2-x} = 3$

4. $e^{2x-5} = -\,6$

5. $(e^{x} - 3)(e^{2x} - 4) = 0$

6. $e^x(2e^x + 1) = 15$

7. $e^x(2e^x + 1) = 15$

EXERCICE 05 Résolvez.

1. $e^{4x+5} < 2e^x$

2. $ln(7x + 3) \geq ln(2 - x)$

EXERCICE 06 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2 \times \left(\frac{7}{8}\right)^n$

1. Quelle est la nature de la suite (u_n)?

2. Quelle est sa limite ?

3. Quel est le plus petit entier tel que $2 \times \left(\frac{7}{8}\right)^n < 10^{-2}$?

EXERCICE 07 Dans chaque cas, montrer que la fonction f est dérivable sur I et déterminez sa dérivée.

1. $f(x) = \frac{x}{ln\, x}$ $I =]1; +\infty[$

2. $f(x) = x \ln x - \ln 2 \quad I =]0; +\infty[$

3. $f(x) = (2 \ln x - \ln 3)^2 \ I =]0; +\infty[$

EXERCICE 08

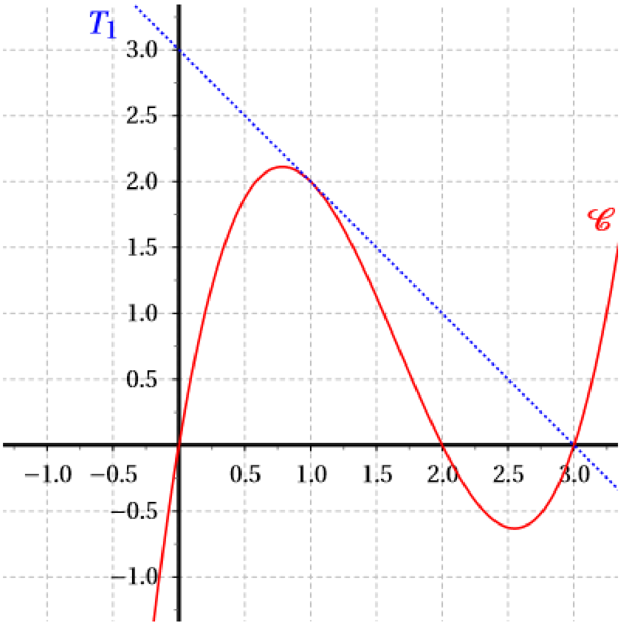
Déterminez l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(x + 1) - \ln(x - 1)$

2. $g(x) = \ln(\frac{x+1}{x-1})$

EXERCICE 09 La courbe C représente une fonction définie sur [-0,5;3,5] et T_1 est la tangente en (1,2) à C.

On considère la fonction $g(x) = ln(f(x))$.



1. Quel est l'ensemble de définition de g ?

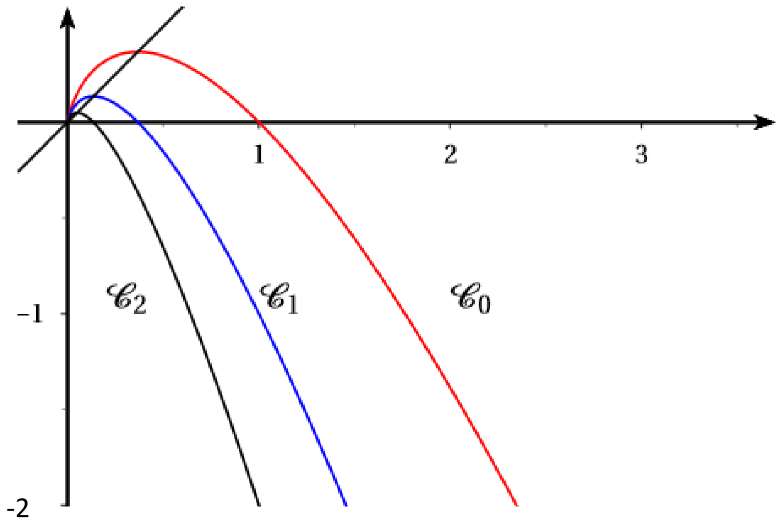
2. Quelle est l'équation de la tangente de la courbe de g en $x = 1$?

EXERCICE 10 **Exercice d'après sujet Bac.**

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par : $f_n(x) = -nx - x\,ln\,x$

On note C_n la courbe représentative de f_n.

On a représenté C_0, C_1, C_2.



1. Etudiez les variations de f_0 sur $]0;+\infty[$.

2. Pour tout x de $]0;+\infty[$, déterminez $f_n'(x)$

3. Montrez que C_n admet en un point unique A_n d'abscisse e^{-n-1} une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

4. Montrez que A_n appartient à la droite d'équation $y = x$.

5. Placez sur le graphique $\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}$
6. Montrez que C_n coupe l'axe des abscisses en un point unique B_n d'abscisse e^{-n-1}.

7. Placez sur le graphique $B_0, \boldsymbol{B_1}, \boldsymbol{B_2}$
8. Montrez que la tangente à C_n en B_n a un coefficient directeur indépendant de n.

EXERCICE 11 **Exercice d'après sujet Bac.**

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 3x - 3x\,ln(x)$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé et T la tangente à C_f au point d'abscisse 1. Quelle est la position relative de C_f par rapport à T ?

EXERCICE 12

Exercice d'après sujet Bac.

On considère la fonction f définie sur $[0{,}2\,;10]$ par $f(x) = 2x^2\,ln(\,x)$ et on note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan. Le but de cet exercice est de prouver que la courbe C_f admet sur $[0{,}2\,;10]$ une seule tangente passant par l'origine du repère.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Montrez que pour $x \in [0{,}2;10]$, $f'(x) = 2x(2\ln(x) + 1)$

2. Soit a un réel de $[0{,}2\,;10]$. Montrez que la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a pour équation : $y = 2a(2\,ln(\,a) + 1)x - 2a^2\,(ln(\,a) + 1)$.

3. Répondez alors au problème posé.

EXERCICE 13

Exercice d'après sujet Bac.

Soit a un réel strictement positif. On peut définir la fonction logarithme de base a par :

$$\text{Pour tout } x > 0, a^y = x \Leftrightarrow y = ln_a\, x.$$

1. Montrez que la fonction ln est donc la fonction logarithme de base e.

2. Montrez que : Pour tout $x > 0, ln_a\, x = \frac{ln\, x}{ln\, a}$

Le logarithme de base 10 est particulièrement utile, surtout en physique. On le note log. Les calculatrices disposent de cette fonction. Sur Python, il s'agit de la fonction log10.

3. *Exemple 1 :*

Le pH d'une solution vaut : $-\,log[\,H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est la concentration en mol/L en ions

a. Une solution est de pH 3. Quelle est sa concentration en ions H_3O^+?

b. Si on dilue la solution d'un facteur 100, sans calculatrice, quel sera son pH ? Justifiez.

4. *Exemple 2 :*

Le niveau sonore s'exprime en décibel qui vaut $10\ log\,\frac{I}{I_0}$. Si on double *I*, de combien de décibels augmente le niveau sonore ?

LES LOGARITHMES

Il faut être très attentif quand on manipule des logarithmes, car ils ne sont définis que pour des valeurs strictement positives. Ils sont de ce fait à l'origine de plus d'erreurs que les exponentielles.

exos clés bac

Sujet commenté 1 : 3 questions d'un QCM

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. L'équation $\ln 5 + \ln(x+1) = 1$ a pour solution :

a. $x = \mathrm{e} - 6$

b. $x = -1$

c. $x = \frac{1}{5}\mathrm{e} - 1$

d. $x = -0,5$

On peut soit résoudre l'équation, soit tester les différentes valeurs. Voici la résolution :

Pour $x > -1, \ln 5 + \ln(x+1) = 1 \Leftrightarrow \ln(5(x+1)) = 1$

$$\Leftrightarrow 5(x+1) = \mathrm{e}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\mathrm{e}}{5} - 1$$

La bonne réponse est c.

2. Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x) - x$. Le nombre $f'(2)$ est égal à :

a. -1

b. 0

c. $2\ln 2 - 2$

d. $2\ln 2 - 1$

Il faut simplement dériver *f* puis calculer *f'*(2).

$f'(x) = \frac{2}{x} - 1$ donc $f'(2) = 0$

La bonne réponse est b.

3. Le plus petit entier naturel n solution de l'inéquation $2^n > 175$ est :

a. $n = \ln\left(\frac{175}{2}\right)$

b. $n = 7$

c. $n = 8$

d. $n = \ln 175 - \ln 2$

Il s'agit du calcul d'un seuil.

$$2^n > 175 \Leftrightarrow n\ln 2 > \ln 175 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 175}{\ln 2} \quad \frac{\ln 175}{\ln 2} \approx 7,5$$

La bonne réponse est c.

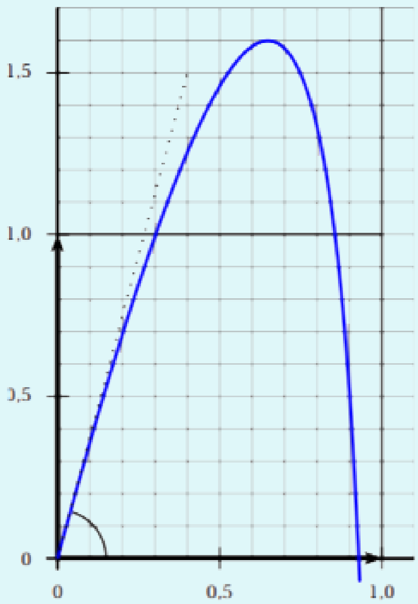
Sujet commenté 2

Commun à tous les candidats

Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.
Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.
On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1[$ par :

$$f(x) = bx + 2\ln(1-x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.



1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 1[$. On note f' sa fonction dérivée.
On admet que la fonction f possède un maximum sur l'intervalle $[0; 1[$ et que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1[$:

$$f'(x) = \frac{-bx+b-2}{1-x}.$$

Montrer que le maximum de la fonction f est égal à $b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.

2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.

1. $f'(x) = b + 2\frac{-1}{1-x} = \frac{b(1-x)-2}{1-x} = \frac{-bx+b-2}{1-x}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -bx+b-2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{b-2}{b}$$

$$M = f\left(\frac{b-2}{b}\right) = b-2+2\ln\left(1-\frac{b-2}{b}\right) = b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$$

Pour montrer que le point où f' s'annule est un maximum, il faut faire le tableau de variations.

x	0	$\frac{b-2}{b}$	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$

2.La question 2 revient à la résolution d'une inéquation mais qu'on ne sait pas résoudre.

$M < 1{,}6 \Leftrightarrow b-2+2\ln(\frac{2}{b}) < 1{,}6$.

On étudie la fonction :

$M(b) = b-2+2\ln(\frac{2}{b}) = b-2+2\ln 2-2\ln b$

$M'(b) = 1-\frac{2}{b}$ Pour $b > 2, M'(b) > 0$. La fonction est croissante.

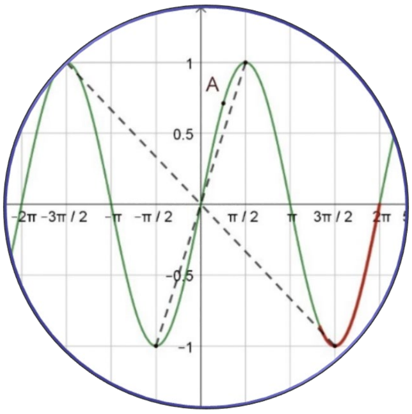
$M(2)=0$

En faisant une table de valeurs avec la calculatrice on a : $M(5{,}67) \approx 1{,}6$

On doit prendre b entre 2 et 5,67.

Cette résolution n'est pas vraiment rigoureuse. Mais les outils seront vus en terminale.

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES



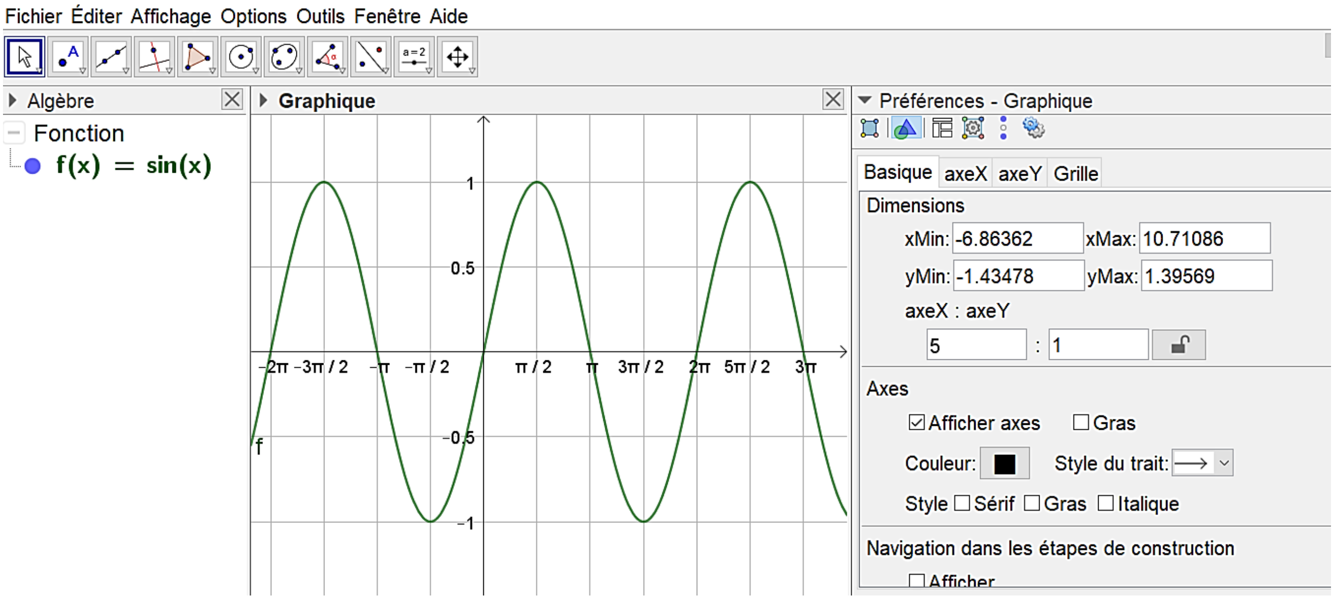
L'objectif de ce chapitre est d'approfondir les connaissances des fonctions trigonométriques sinus et cosinus : dérivées, variations, courbes représentatives.

COMPÉTENCES VISÉES

- Dans le cadre de la résolution de problème, notamment géométrique, étudier une fonction simple définie à partir de fonctions trigonométriques, pour déterminer des variations, un optimum.

Première approche

Nous avons tracé la courbe de la fonction sur Geogebra.



1. Reproduisez ce tracé sur Geogebra.

2. Commentez l'allure de la courbe.

3. Pour quelles valeurs de x obtient-on 1 ? 0 ? -1 ?

4. Placez un point sur la courbe et déplacez-le. Vérifiez que pour $a = \frac{\pi}{4}$ soit environ 0,79, le sinus vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$ soit environ 0,71. **La valeur de a est appelé angle en radians.**

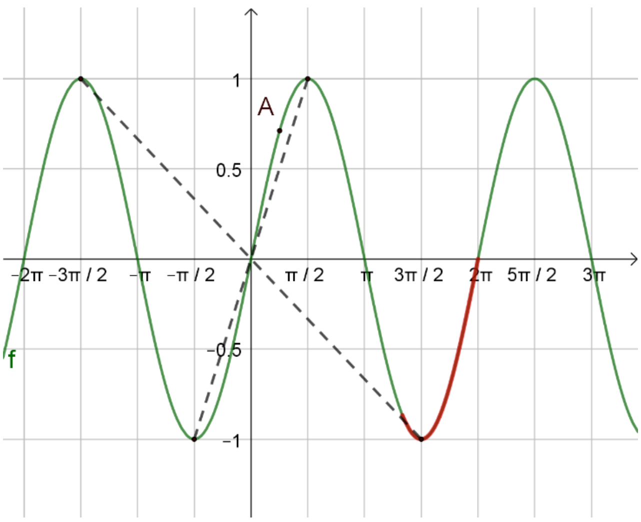
5. On considère un triangle rectangle isocèle de côté 1. Déterminez le sinus des angles aigus.

6. Quel est la valeur de ces angles en degrés ?

7. Conjecturez la relation entre angle en degrés et angles en radians.

CORRECTION :

1. Voir énoncé.
2. On remarque que le même motif se reproduit. La courbe est périodique. La période est 2p.
   On remarque également que la courbe est symétrique par rapport à l'origine O.

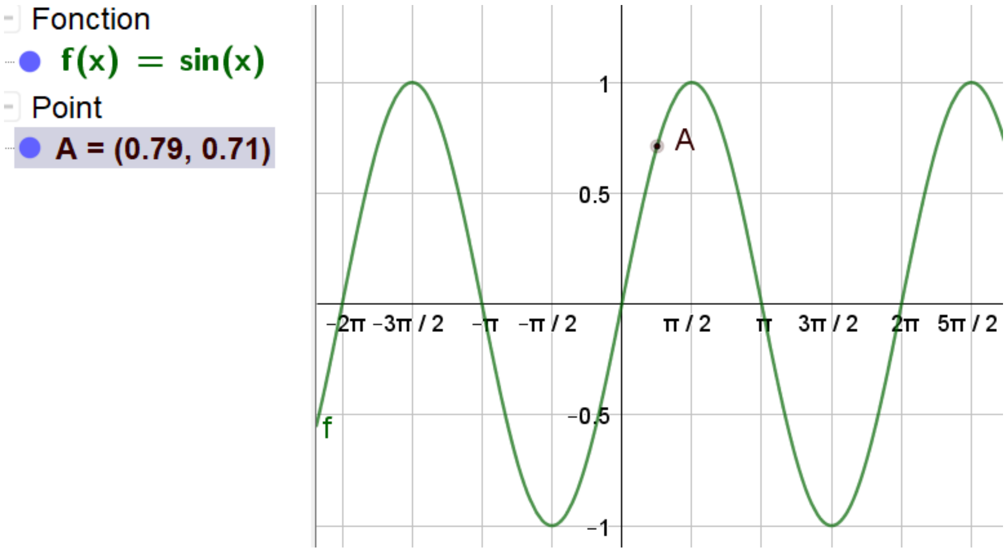


3. On obtient 1 pour $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi, x = \frac{\pi}{2} - \pi, \ldots$ soit pour $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, avec k dans $\mathbb{Z}$.

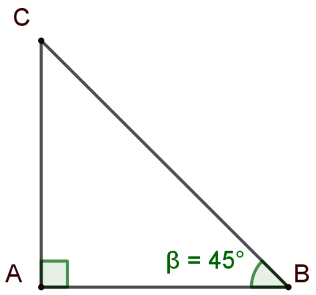
On obtient 0 pour les valeurs $x = 0, x = \pi, x - \pi, \ldots$ Soit pour $x = k\pi$, avec k dans $\mathbb{Z}$.

On obtient −1 pour $x = -\frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi, x = -\frac{\pi}{2} - \pi, \ldots$ soit pour $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, avec k dans $\mathbb{Z}$.

4.



5.



$\sin\beta = \dfrac{AC}{BC}$

D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2$.

$\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6. En degrés : $\beta = 45°$

7.

angle en degrés	d	45
angle en radians	r	$\frac{\pi}{4}$

$d = \dfrac{180}{\pi} r$ ou $r = \dfrac{\pi}{180} d$

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

01

Dérivations et tableau de variations des fonctions sinus et cosinus

DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATIONS DES FONCTIONS SINUS ET COSINUS

La fonction cosinus étant périodique et paire, il suffit de l'étudier sur $[0,\pi[$.
Par souci de clarté, nous allons l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π.

$$\cos'(x) = \sin x$$

x	0		π		2π
$\cos'(x)$		$-$	0	$+$	
$\cos(x)$	1	↘	-1	↗	1

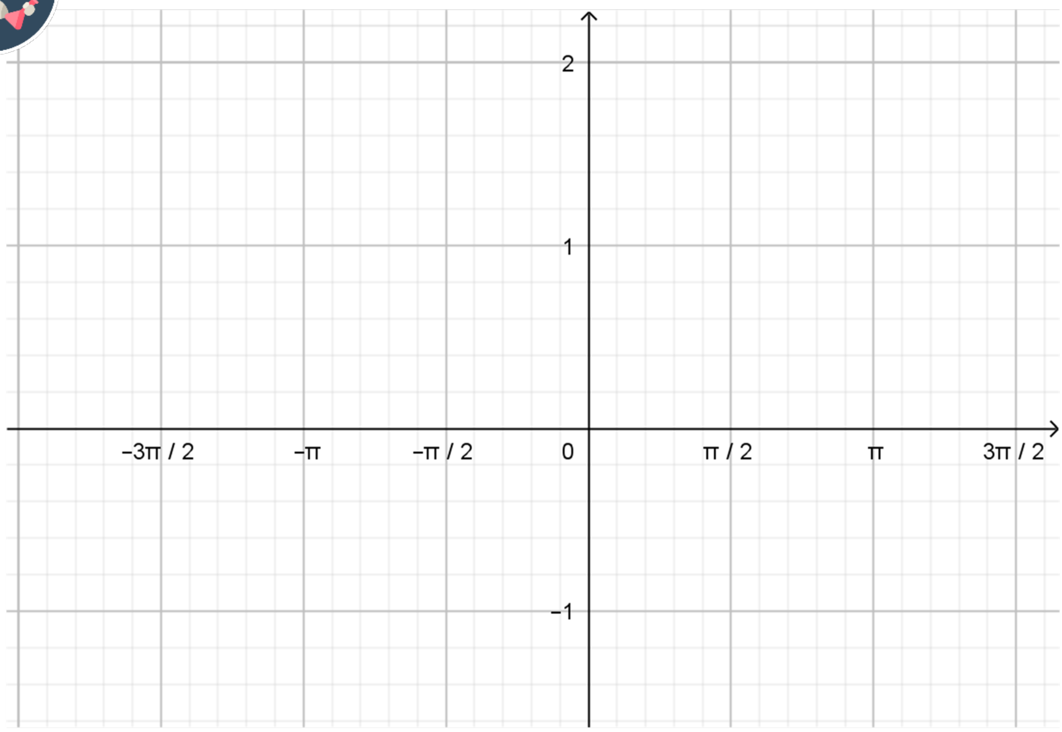
La fonction sinus étant périodique et impaire, il suffit de l'étudier sur $[0,\pi[$. Par souci de clarté, nous allons l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π.

$$\sin'(x) = -\cos x$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\sin(x)$	0	↗	1	↘	-1	↗	0

À VOUS DE JOUER 8

Dessinez les courbes de la fonction cosinus en rouge et de la fonction sinus en bleu.



Que remarquez-vous ?

....

....

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

02

Fonctions composées des fonctions sinus et cosinus

DÉRIVÉE DES FONCTIONS COMPOSÉES AVEC LES FONCTIONS SINUS ET COSINUS

L'ESSENTIEL

$$f(x) = \cos(u(x)) \quad f'(x) = -u'(x)\sin(u(x))$$
$$f(x) = \sin(u(x)) \quad f'(x) = u'(x)\cos(u(x))$$

Exemples

$$f(x) = \cos(3x) \quad f'(x) = -3\sin(3x)$$
$$f(x) = \sin(3x) \quad f'(x) = 3\cos(3x)$$

À VOUS DE JOUER 9

Complétez

$f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$ $f'(x) =$ ....

$f(x) = \sin(3x - \frac{\pi}{6})$ $f'(x) =$ ....

À VOUS DE JOUER 10

Complétez.

Exemple d'étude d'une fonction composée

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(3x)$

1. Etude de la parité

L'ensemble de définition est .... par rapport à 0.

$f(-x) =$ ....

f est donc ....

2. Etude de la périodicité

$f(x + \frac{2\pi}{3}) =$ ....

f est donc ....de période ....

On peut étudier les variations sur un intervalle d'amplitude .... ; mais

comme f est ...., on peut se limiter à l'étude sur ....

3. Etude des variations sur $[0;\frac{\pi}{3}[$:

$f'(x) =$ .... $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ ....

Sur $[0;\dfrac{\pi}{3}[$, il n'y a qu'une solution ....

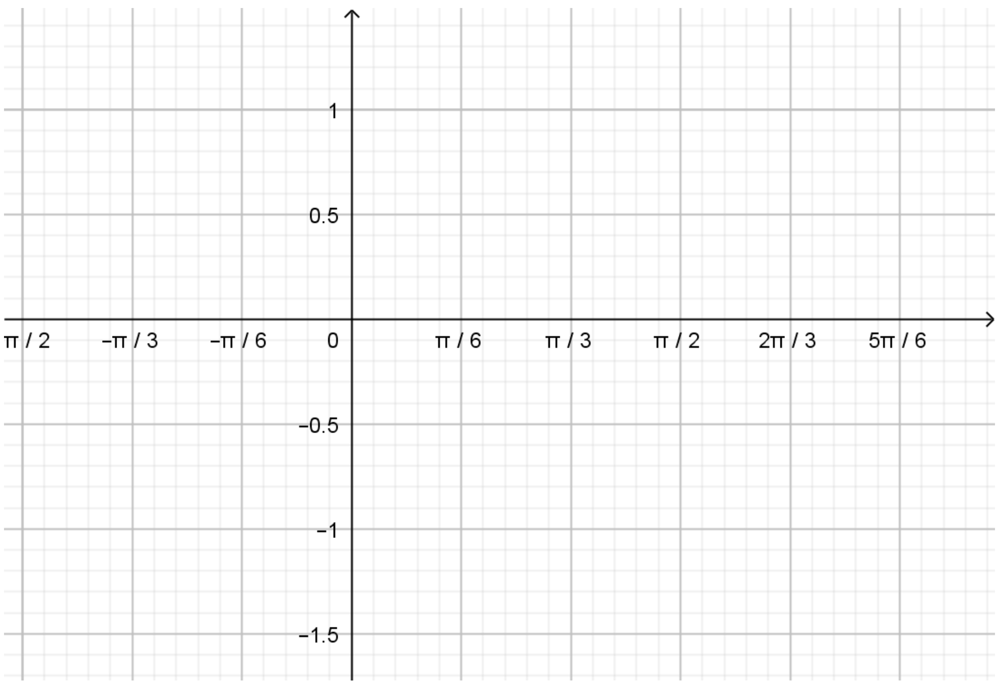
Sur $[0;\frac{\pi}{3}[$, f est ....

x	0 $\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{3}$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	1 $\qquad\qquad$ -1

La tangente est .... pour $x=0$.

4. Etude de la périodicité

On trace la courbe sur ; .... Par symétrie par rapport à l'axe des ...., on a la courbe sur .... Puis on reproduit le motif tous les ....



EXERCICES

Abordons maintenant une série d'exercices, afin de vérifier vos connaissances.
Les réponses aux exercices se trouvent en fin de manuel.

EXERCICE 14

Déterminez la dérivée des fonctions suivantes.

$$f(x) = x^2 \sin x \quad g(x) = x \sin x - x \quad h(t) = \sin t \cos t - \sin\frac{\pi}{8}$$

EXERCICE 15

Déterminez la dérivée des fonctions suivantes.

$$f(x) = x \cos 2x \quad g(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \quad h(t) = \sin t\,(1 + \cos t)$$

EXERCICES

EXERCICE 16 On considère la fonction tangente définie par $tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$.

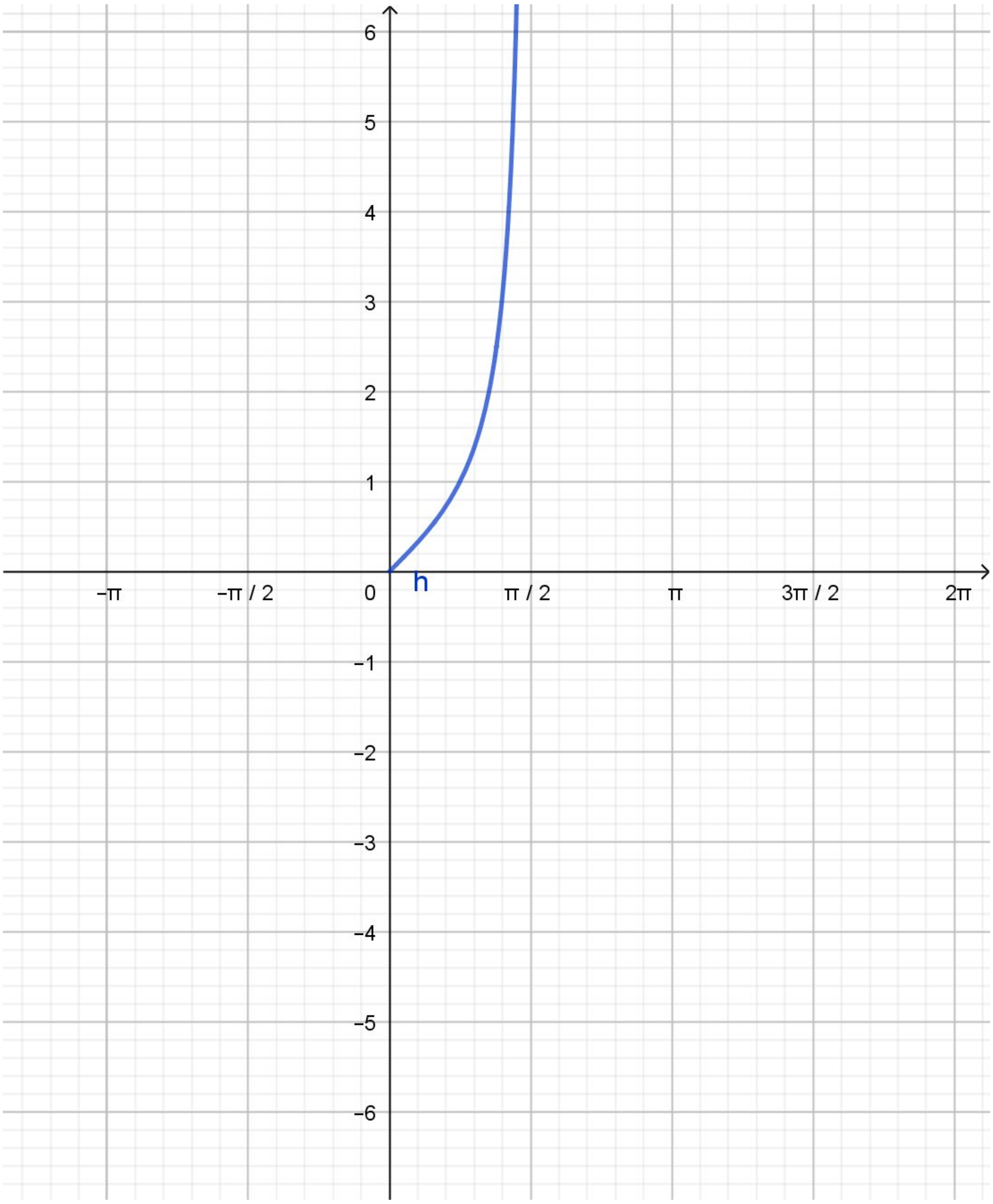
1. Pour quelles valeurs de x, tan(x) est-elle définie ?

2. Etudiez la parité et la périodicité de tan.

3. Déterminez la dérivée de tan sur $[0;\frac{\pi}{2}[$ puis ses variations sur $[0;\frac{\pi}{2}[$.

4. Déterminez l'équation de la tangente en 0.

5. Complétez la courbe représentative.



EXERCICE 17

On considère la fonction tangente définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\,cos(\,2x - \frac{\pi}{3})$.

1. Etudiez la parité de *f*.

2. Etudiez sa périodicité.

3. Etudiez les variations de f sur $[0;\pi[$.

4. Donnez l'équation de la tangente de f en 0.

EXERCICES

EXERCICE 18

On considère la fonction tangente définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + cos\, x)\, sin\, x$.

1. Justifiez qu'on peut restreindre l'étude de f à [0;π[.

2. Déterminez la dérivée de *f* sur [0;π[.

3. Résolvez sur [0;π[le signe de $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$.

4. Déduisez le tableau de variation de f sur [0;π[.

DÉRIVATION

Vous connaissez maintenant toutes les fonctions de référence au programme du bac (1ere et Terminale).

$$x \mapsto ax + b$$
$$x \mapsto x^2$$
$$x \mapsto x^3$$
$$x \mapsto \sqrt{x}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$
$$x \mapsto |x|$$

$$x \mapsto \ e^x$$
$$(*) x \mapsto ln\, x$$
$$(**) x \mapsto cos\, x$$
$$(**) x \mapsto sin\, x$$

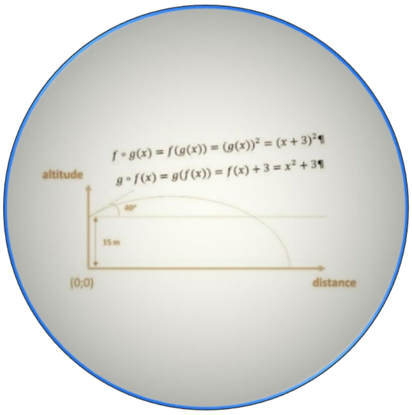
Vous devez savoir en particulier les représenter sommairement, connaitre leurs principales propriétés et savoir les dériver.

Concernant les fonctions trigonométriques :

- ✓ On pourra vous demander d'étudier la parité et la périodicité d'une fonction de type sin(u(x)) ou cos(u(x)). Cela permet généralement de réduire l'intervalle d'étude.

- ✓ En terminale, vous pourrez également les dériver et étudier leurs variations. Il faudra éventuellement pour étudier le signe résoudre une équation ou une inéquation trigonométrique (voir le chapitre Trigonométrie du module Géométrie), généralement assez simple.

CHAPITRE 3
COMPLÉMENTS SUR LA DÉRIVATION



L'étude de la dérivation, commencée en classe de première, est étendue par l'étude de la dérivée d'une fonction composée et l'introduction de la dérivée seconde.

L'étude des fonctions convexes permet de réinvestir et d'enrichir le travail entamé en classe de première sur les dérivées. Elles donnent l'occasion de raisonner en diversifiant les registres : représentations graphiques, tableaux de variations, expressions symboliques.

COMPÉTENCES VISÉES

- Calculer la dérivée d'une fonction donnée par une formule simple mettant en jeu opérations algébriques et composition.
- Calculer la fonction dérivée et étudier les variations d'une fonction construite simplement à partir des fonctions de référence.
- Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction.
- Esquisser l'allure de la courbe représentative d'une fonction f à partir de la donnée de tableaux de variations de f, f' ou f''.
- Lire sur une représentation graphique de f, de f' ou de f'' les intervalles où f est convexe, concave, et les points d'inflexion. Dans le cadre de la résolution de problème, étudier et utiliser la convexité d'une fonction.

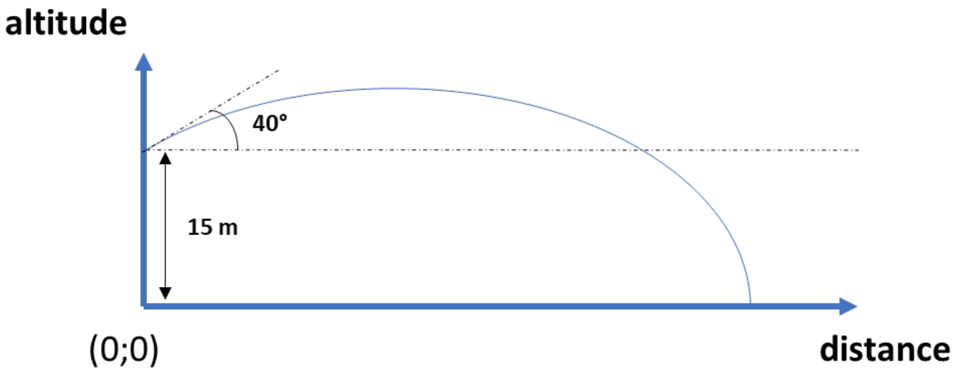
PRÉ-REQUIS

- Chapitres sur la dérivation étudiés en classe de première
- Fonctions de référence.
- Calcul algébrique : étude du signe d'une expression algébrique, inéquations.

Première approche

Etudions le mouvement d'une balle de tennis lancée à 15 mètres de haut avec un angle de 40° et une vitesse initiale v_i.

L'objectif est de définir la valeur de la gravité terrestre à partir de la trajectoire de la belle de tennis.



Voici l'équation de la trajectoire de la balle en fonction de l'inconnue t (qui représente le temps) :

$$x(t) = -\frac{1}{2} \times 9{,}81 \times t^2 + \cos(15) \times t + 10$$

1. Pour obtenir l'équation de vitesse, il suffit de dériver la fonction $x(t)$ en fonction du temps. Dérivez la fonction $x(t)$ pour exprimer l'équation de la vitesse en fonction du temps.

2. Pour obtenir l'accélération, il est nécessaire de dériver la vitesse. La dérivée va donc être dérivée une nouvelle fois. On parle de dérivée seconde écrite dans notre cas $x''(t)$. Dérivez la vitesse pour obtenir l'accélération.

Correction

1.

Etudions les différents membres de la fonction $x(t)$:

- le premier membre : $-\frac{1}{2} \times 9{,}81 \times t^2$ est une fonction carrée de type kt^2. La dérivée est de type 2kt. La dérivée du premier membre est :

$$-2 \times \frac{1}{2} \times 9{,}81 \times t = -9{,}81 \times t$$

- le deuxième membre : $cos(15) \times t$ est une fonction sans puissance de type kt. La dérivée est donc k. La dérivée du second membre est donc :

$$cos(15)$$

- le dernier membre est une constante. Sa dérivée est donc nulle.

La dérivée finale devient :

$$x'(t) = -9{,}81 \times t + \cos(15)$$

2.

Etudions les différents membres de la fonction $x(t)$:

- le premier membre : $-\frac{1}{2} \times 9{,}81 \times t$ est une fonction carrée de type kt. La dérivée est de type k. La dérivée du premier membre est :

$$-9{,}81$$

- le second membre : $cos(15)$ est une constante. Sa dérivée est donc nulle.

L'accélération

$$x''(t) = -9{,}81$$

Nous venons de découvrir la notion de la dérivée seconde.

COMPLÉMENTS SUR LA DÉRIVATION

Composition de fonctions

L'ESSENTIEL

Soit I et J deux parties de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur J et g une fonction définie sur I telle que pour tout réel x, $g(x) \in J$.

On définit la fonction composée de f et g notée $f \circ g$ par

$$\text{Pour tout } x \in I,\ f \circ g(x) = f(g(x))$$

Exemple : pour tout réel x, on note $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 3$. Alors, pour tout réel x,

- $f \circ g(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (x+3)^2$
- $g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x) + 3 = x^2 + 3$

Remarque : en général, on n'a pas $f \circ g = g \circ f$!

À VOUS DE JOUER 11

Complétez.

Pour tout réel x, on pose $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = x^2 - 1$ et $h(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Exprimez, pour tout réel x, $f \circ g(x)$, $g \circ h(x)$, $h \circ g(x)$ et $f \circ h(x)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

L'ESSENTIEL

Soit I et J deux intervalles, f une fonction définie et dérivable sur J et g une fonction définie et dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $g(x) \in J$. Alors $f \circ g$ est dérivable et pour tout réel x dans I,

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times (f' \circ g)(x)$$

Exemple : on considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{x^2+3x-2}$. Pour tout réel x, on pose alors $u(x) = e^x$ et $v(x) = x^2 + 3x - 2$. On a alors $f(x) = u(v(x)) = u \circ v(x)$.

- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = 2x + 3$
- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = e^x$

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = (2x+3)e^{x^2+3x-2}$$

L'ESSENTIEL

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I

- Pour tout entier naturel n, u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u' \times e^u$.
- $\sin(u)$ est dérivable sur I et $(\sin(u))' = u'\cos(u)$
- $\cos(u)$ est dérivable sur I et $(\cos(u))' = -u'\sin(u)$
- Si pour tout réel $x \in I$, $u(x) > 0$, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- Si pour tout réel $x \in I$, $u(x) > 0$, alors $\ln u$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{u}$
- Si pour tout réel x, $u(x) \neq 0$, $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{u'}{u^2}$.

Exemple : pour tout réel x, posons $f(x) = (4x+1)^9$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$f'(x) = 9 \times 4 \times (4x+1)^{9-1} = 36 \times (4x+1)^8$$

Exemple : pour tout réel x, posons $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. On a bien $x^2 + 1 \neq 0$ pour tout réel x. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

À VOUS DE JOUER 12

On admet que les fonctions suivantes sont dérivable sur l'ensemble indiqué.

Donnez une expression de leur fonction dérivée.

$f_1 : x \mapsto e^{x^3-2x^2+3x-1}$ sur $\mathbb{R}$ ....

....

....

....

$f_2 : x \mapsto \sqrt{x^3 - 3x + 2}$ sur $]1; +\infty[$ ....

....

....

....

$f_3 : x \mapsto (5x^2 + 2x - e^x)^5$ sur $\mathbb{R}$

$f4:x\mapsto(1+x2+x+4)3$ sur $\mathbb{R}$

$f_5 : x \mapsto \ln(x^2 - 4x + 20)$ sur $\mathbb{R}$

$f_6 : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0; +\infty[$

$f_7 : x \mapsto \sin(\sqrt{x^2 + 1})$ sur $\mathbb{R}$

02 COMPLÉMENTS SUR LA DÉRIVATION

Dérivée seconde

L'ESSENTIEL

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa fonction dérivée f' est également dérivable sur I (on dit également que f est deux fois dérivable sur I).

On appelle fonction dérivée seconde de f la fonction dérivée de f'. Cette fonction est notée f''.

$$\text{Pour tout } x \in I \; f''(x) = (f')'(x)$$

Exemple : pour tout réel x, on pose $f(x) = (2x+1)e^{3x-2}$.
Posons, pour tout réel x, $u_1(x) = 2x+1$ et $v_1(x) = e^{3x-2}$

- u_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u_1'(x) = 2$
- v_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v_1'(x) = 3e^{3x-2}$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = u_1'(x) \times v_1(x) + u_1(x) \times v_1'(x) = 2 \times e^{3x-2} + (2x+1) \times 3e^{3x-2} = (6x+5)e^{3x-2}$$

Posons alors, pour tout réel x, $u_2(x) = 6x+5$ et $v_2(x) = e^{3x-2}$

- u_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u_2'(x) = 6$
- v_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v_2'(x) = 3e^{3x-2}$.

Ainsi, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f''(x) = u_2'(x) \times v_2(x) + u_2(x) \times v_2'(x) = 6 \times e^{3x-2} + (6x+5) \times 3e^{3x-2} = (24x+21)e^{3x-2}$$

À VOUS DE JOUER 13

On admet que les fonctions suivantes sont deux fois dérivable sur l'ensemble indiqué.
Donnez une expression de leur dérivée seconde.

$f_1 : x \mapsto e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

$f_2 : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$

$f_3 : x \mapsto \cos(e^x)$ sur $\mathbb{R}$

L'ANECDOTE

La notion de dérivée seconde est évidemment à rapprocher de celle d'accélération en physique. La vitesse instantanée est ainsi la variation de la position durant un temps infinitésimal, ce qui correspond à la dérivée mathématique.

L'accélération est, quant à elle, la variation infinitésimale de la vitesse. Ainsi, une accélération positive signifie que la vitesse augmente.

COMPLÉMENTS SUR LA DÉRIVATION

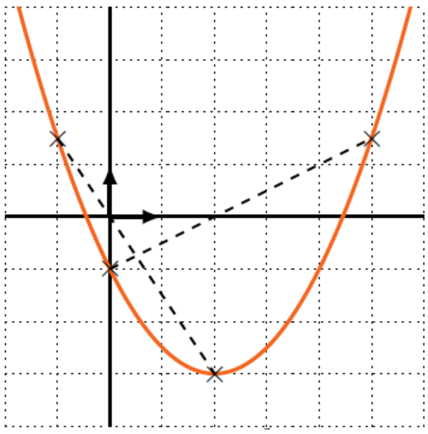
Convexité

L'ESSENTIEL

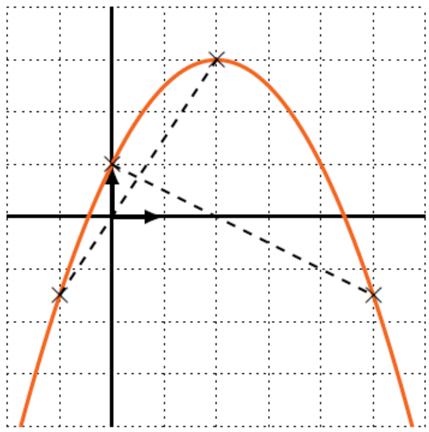
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

- On dit que f est convexe sur I si tout segment reliant deux points de la courbe se trouve au-dessus de la courbe
- On dit que f est concave sur I si tout segment reliant deux points de la courbe se trouve en-dessous de la courbe

Fonction convexe



Fonction concave

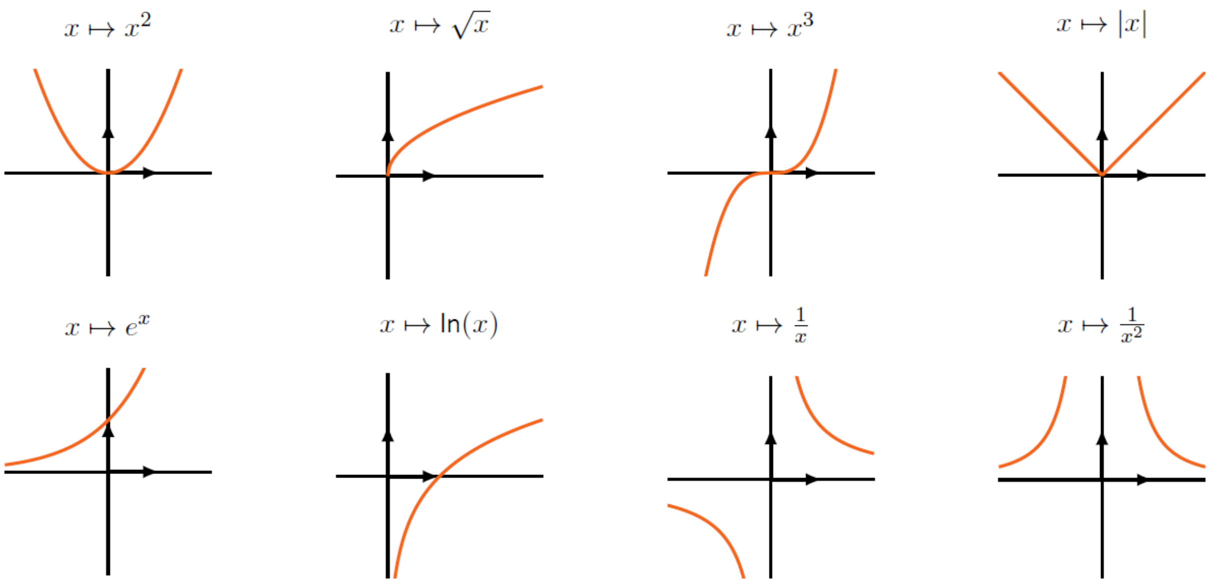


Exemple : la fonction $x \mapsto x^2$ et convexe sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.

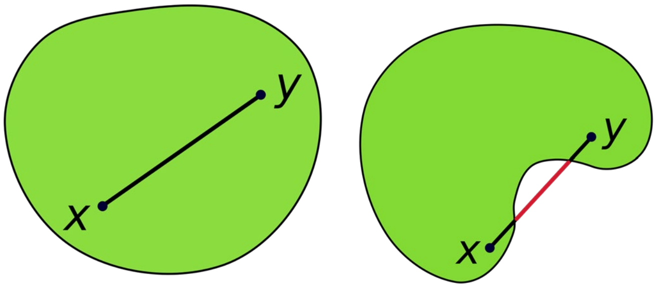
La fonction $x \mapsto x^3$ est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$.



L'ANECDOTE

La notion de convexité se généralise à des formes géométriques : on dit qu'un ensemble est convexe si tout segment joignant deux points de cet ensemble est contenu intégralement dans cet ensemble. Intuitivement, l'objet que l'on regarde ne possède pas de creux.



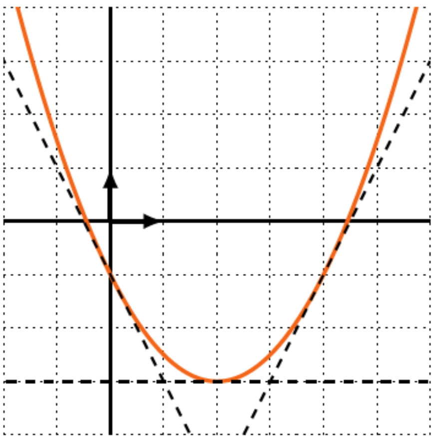
Une fonction est alors dite convexe si son épigraphe (la partie au-dessus de sa courbe représentative) est convexe. La convexité d'un ensemble est très intéressante pour résoudre des problèmes d'optimisation en tout genre.

L'ESSENTIEL

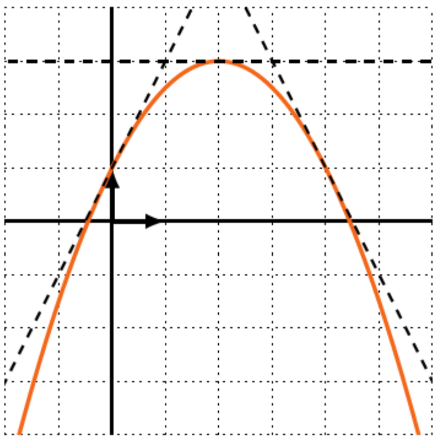
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

- f est convexe sur I si la courbe $\mathcal{C}_f$ se trouve au-dessus de toutes ses tangentes aux points d'abscisses $x \in I$.
- f est concave sur I si la courbe $\mathcal{C}_f$ se trouve en-dessous de toutes ses tangentes aux points d'abscisses $x \in I$.

Fonction convexe



Fonction concave



L'ESSENTIEL

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$
- f est concave sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \leq 0$

Démonstration : **si $f'' \geq 0$, alors f est convexe** : soit f une fonction deux fois dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$.

Soit $a \in I$. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Pour tout $x \in I$, posons alors $g(x) = f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))$. g est deux fois dérivable sur I, et pour tout $x \in I$

- $g'(x) = f'(x) - f'(a)$
- $g''(x) = f''(x)$

Ainsi, puisque pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$, on a aussi $g''(x) \geq 0$. g' est donc croissante sur I. Or, $g'(a) = 0$.

- Soit $x \in I$ tel que $x < a$.
    - Par croissance de g' sur I, on a alors $g'(x) \leq g'(a)$ c'est-à-dire $g'(x) \leq 0$.
    - g est donc décroissante sur $]-\infty; a] \cap I$.
    - On a donc $g(x) \geq g(a)$.
    - Or, $g(a) = f(a) - f'(a) \times (a-a) - f(a) = 0$. Ainsi, $g(x) \geq 0$

- Soit $x \in I$ tel que $x > a$
    - Par croissance de g' sur I, on a alors $g'(x) \geq g'(a)$ c'est-à-dire $g'(x) \geq 0$.
    - g est donc croissante sur $[a; +\infty[\cap I$.
    - On a donc $g(x) \geq g(a)$.
    - Or, $g(a) = f(a) - f'(a) \times (a-a) - f(a) = 0$. Ainsi, $g(x) \geq 0$

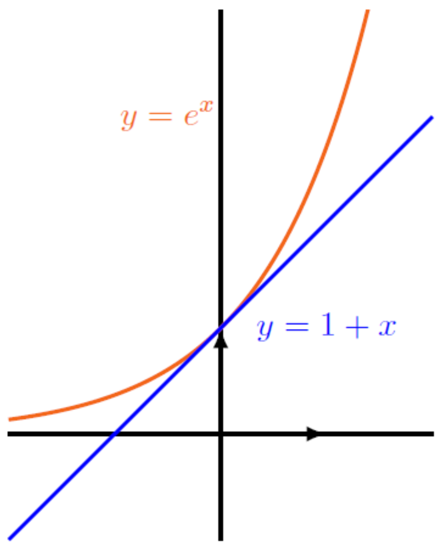
Finalement, pour tout $x \in I$, $g(x) \geq 0$, ce qui signifie que le courbe de f est au-dessus de la tangente à cette courbe au point d'abscisse a.

Exemple : pour tout entier naturel pair n, la fonction $x \mapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
Exemple : la fonction $f : x \mapsto x^3$ est concave sur $]-\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$.
En effet, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f''(x) = 6x$, qui est positif si et seulement si x l'est aussi.
Exemple : on considère la fonction $f : x \mapsto e^x$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f''(x) = e^x$ qui est positif Ainsi, la fonction f est convexe et est au-dessus de ses tangentes. Or, la tangente à la courbe de f en 0 a pour équation

$$y = x + 1$$

Ainsi, pour tout réel x, on a l'inégalité

$$e^x \geq x + 1$$



COMPLÉMENTS SUR LA DÉRIVATION

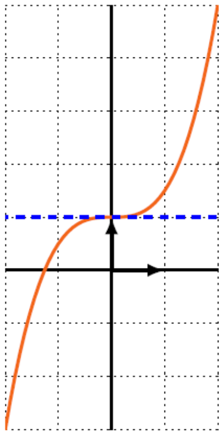
Point d'inflexion

L'ESSENTIEL

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Un point d'inflexion est un point où la convexité de la fonction f change. La tangente à la courbe de f en un point d'inflexion traverse la courbe de f.

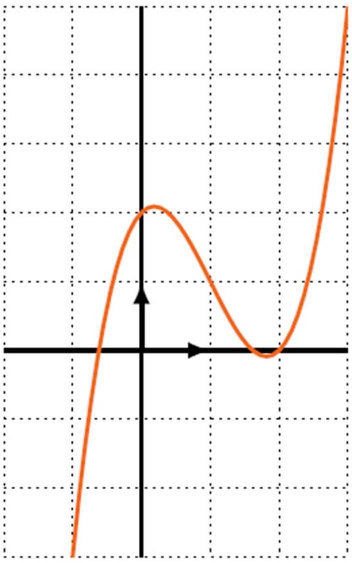
Exemple : pour tout réel x, on pose $f(x) = \frac{x^3}{2} + 1$. La fonction f est deux fois dérivable et pour tout réel x, $f''(x) = 3x$.

- Lorsque $x < 0$, $f''(x) < 0$, la fonction est concave, la courbe est sous ses tangentes.
- Lorsque $x > 0$, $f''(x) > 0$, la fonction est convexe, la courbe est au-dessus de ses tangentes.



À VOUS DE JOUER 14

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$. La courbe représentative de f est donnée ci-dessous : Déterminez graphiquement et par le calcul le(s) point(s) d'inflexion de la courbe de f



Abordons maintenant une série d'exercices, afin de vérifier vos connaissances.
Les réponses aux exercices se trouvent en fin de manuel.

EXERCICE 19 Composition de fonctions

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3x + 2$ et $h(x) = 2 - x$

1. Donnez une expression de $(f \circ g)(x)$ pour tout réel x.

2. Donnez une expression de $(g \circ f)(x)$ pour tout réel x.

3. Donnez une expression de $(h \circ g)(x)$ pour tout réel x.

4. Donnez une expression de $(f \circ g \circ h)(x)$ pour tout réel x.

EXERCICE 20 Des involutions

Soit f une fonction définie sur un ensemble E. On dit que f est une involution de E si pour tout $x \in E$, $(f \circ f)(x) = x$.

1. Montrez que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une involution de $\mathbb{R}^*$

2. Soit a un réel. Montrez que la fonction $x \mapsto a - x$ est une involution de $\mathbb{R}$

3. Soit a et b deux réels, avec $b \neq 0$. Montrez que la fonction $x \mapsto \frac{b}{x-a} + a$ est une involution de $\mathbb{R}\backslash\{a\}$.

EXERCICES

EXERCICE 21 Dérivée de composées

Dérivez les fonctions suivantes...

$f_1 : x \mapsto (3x+2)^2$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto (6x^2+3x+4)^3$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f_3 : x \mapsto \sqrt{e^x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f_4 : x \mapsto \sqrt{2x^2-5x+7}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f_5 : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$, définie et dérivable sur $]0;+\infty[$

$f_6 : x \mapsto e^{x+\frac{1}{x}}$, définie et dérivable sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

EXERCICE 22 Etude d'une fonction composée (1)

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{3x^2+2x-1}$, définie sur $\mathbb{R}$

1. Justifiez que f est dérivable et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

2. Construisez le tableau de variations de f

3. Déterminez l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -1.

EXERCICES

EXERCICE 23 Etude d'une fonction composée (2)

Construisez le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 5}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 24 Calcul de dérivée seconde

Dans chacun des cas suivants, donnez une expression de la dérivée seconde des fonctions...

$f_1 : x \mapsto 5x^2 + 2x - 3$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto e^{3x+2}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f_3 : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

EXERCICES

$f_4 : x \mapsto (3x^2+8)^3$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f_5 : x \mapsto \sqrt{2x^2+1}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f_6 : x \mapsto \ln(\cos(x))$, définie et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

EXERCICE 25 Exponentielle composée

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{x^2+2x-5}$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Construisez le tableau de variation de f

Déterminez une expression de $f''(x)$ pour tout réel x.

EXERCICE 26 Une identité remarquable ?

Soit f et g deux fonctions deux fois dérivables sur un intervalle I. Montrez que fg est deux fois dérivable sur I et que

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

EXERCICE 27 Polynôme de degré 4

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 + 16x^3 - 66x^2 - 360x + 120$.

Soit x un réel. Que vaut $f'(x)$?

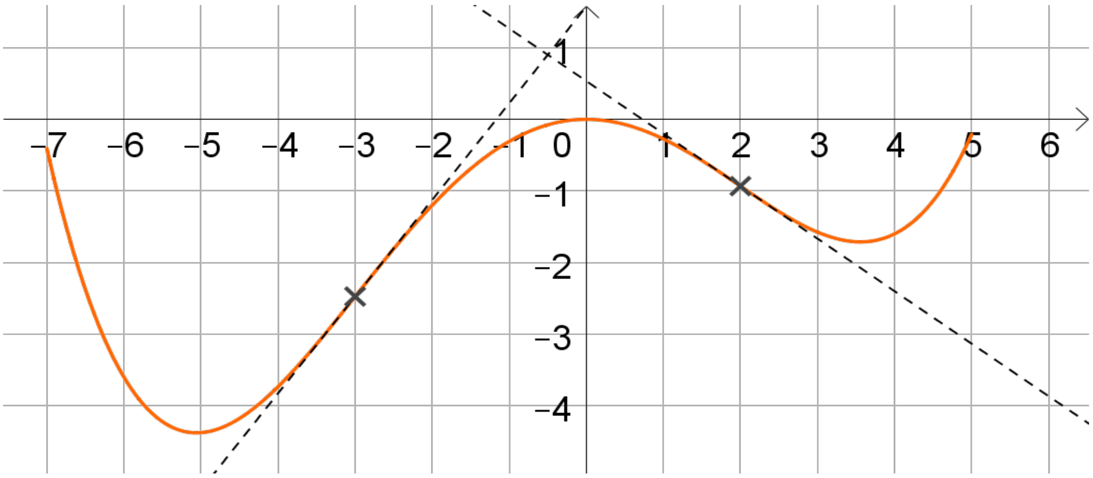
On note f'' la dérivée de f'. Que vaut $f''(x)$?

Construisez le tableau de signes de f''.

On indique de plus que $f'(-5) = f'(3) = f'(-2) = 0$. Construisez le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

EXERCICE 28 Convexité : étude graphique

On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé. Les tangentes à la courbe de f aux points d'abscisse -3 et 2 sont également tracées



Quel est le signe de $f'(-6)$? de $f'(4)$?

Donnez les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe.

EXERCICE 29 Convexité de fonction

Montrez que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ est concave sur $]-\infty; 0[$ et convexe sur $]0; +\infty[$.

EXERCICE 30 Convexité de l'exponentielle

Soit a et b deux réels. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est également convexe sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 31 Cosinus hyperbolique

Pour tout réel x, on pose $ch(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Cette quantité est appelée cosinus hyperbolique de x.

Justifiez que ch est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $ch''(x) = ch(x)$

EXERCICES

En déduire la convexité de la fonction ch.

Pour tout réel $x \geq 1$, on pose $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Montrez que pour tout $x \geq 1$, $ch \circ f(x) = x$

On admet que pour tout réel x, $ch(x) \geq 1$. Montrez que $f \circ ch(x) = x$.

EXERCICE 32 Inégalité de convexité

On considère la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0; +\infty[$.

Sur quel domaine f est-elle dérivable ? deux fois dérivable ?

Pour tout réel x dans ce domaine, déterminez une expression de $f'(x)$ et de $f''(x)$

f est-elle convexe ou concave sur $[0; +\infty[$?

Déterminez l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

En déduire que pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{x} \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

EXERCICE 33 Inégalité de convexité (2)

En utilisant la concavité du logarithme népérien, montrez que pour tout réel x, $\ln(x) \leq x - 1$

EXERCICES

EXERCICE 34 Inflexion (1)

Pour tout réel x, on pose $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

Pour tout réel x, déterminer $f''(x)$

En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.

La fonction f possède-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, en quelle abscisse ?

EXERCICE 35 Inflexion (2)

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3x + 1$. La fonction f possède-t-elle un point d'inflexion ?

EXERCICE 36 Etude et tracé de courbe

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \left(\frac{x^2-2x-3}{2}\right)^2$

1. Justifiez que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

2. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$

3. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Donnez une expression de $f''(x)$ pour tout réel x.

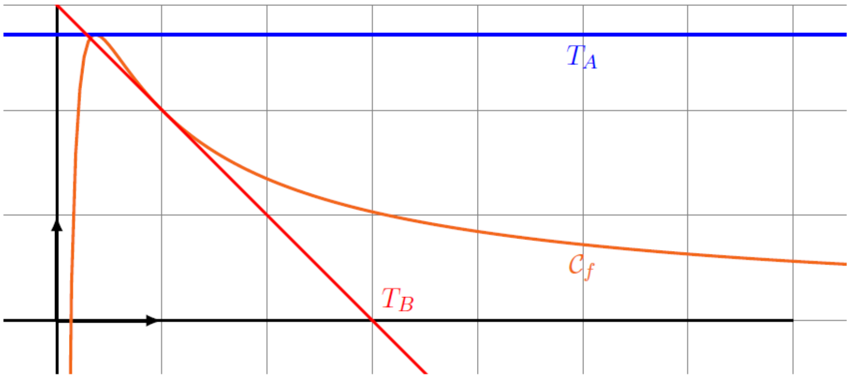
En déduire les intervalles où la fonction f est convexe.

4. Tracez la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

EXERCICE 37 **Sujet zéro - Bac 2021**

Sur le graphique ci-après, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$
- la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e}; e\right)$
- la tangente T_B à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B de coordonnées $(1; 2)$
- La droite T_A est parallèle à l'axe des abscisses. La droite T_B coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3; 0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; 3)$.



On note f' la fonction dérivée de f.

PARTIE A

1. Déterminez graphiquement $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ et $f'(1)$

2. En déduire une équation de la droite T_B

PARTIE B

On suppose maintenant que la fonction f est définie pour tout réel $x > 0$ par

$$f(x) = \frac{2 + \ln(x)}{x}$$

1. Par le calcul, montrez que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.

2. Déterminez la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures et la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Montrez que pour tout $x \in]0;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{-1 - \ln(x)}{x^2}$$

4. Dressez le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.

5. On note f'' la dérivée seconde de f.
   a. Montrez que pour tout $x > 0$,

$$f''(x) = \frac{1 + 2\ln(x)}{x^3}$$

   b. En déduire le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

DÉRIVER UNE FONCTION COMPOSÉE

notions clés

Soit I et J deux intervalles, f une fonction définie et dérivable sur J et g une fonction définie et dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $g(x) \in J$. Alors $f \circ g$ est dérivable et pour tout réel x dans I,

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times (f' \circ g)(x)$$

En particulier, si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I

- Pour tout entier naturel n, u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u' \times e^u$.
- $\sin(u)$ est dérivable sur I et $(\sin(u))' = u' \cos(u)$
- $\cos(u)$ est dérivable sur I et $(\cos(u))' = -u' \sin(u)$
- Si pour tout réel $x \in I$, $u(x) > 0$, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- Si pour tout réel $x \in I$, $u(x) > 0$, alors $\ln u$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{u}$
- Si pour tout réel x, $u(x) \neq 0$, $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{u'}{u^2}$.

Ces formules sont simples retenir si l'on connaît bien les dérivées usuelles. Par exemple, la dérivée de la fonction $x \mapsto x^4$ est $x \mapsto 4x^3$. Pour obtenir la dérivée de u^4, il suffit donc de multiplier $4u^3$ par u'.

exos clés

Application 1 : dérivez les fonctions suivantes...

- $f_1 : x \mapsto (5x + e^x)^3$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

- $f_2 : x \mapsto \ln(2 + \cos(x))$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

- $f_3 : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

- $f_4 : x \mapsto \cos(\sin(x))$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

- $f_5 : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$, définie et dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

Comprendre ce qu'est une fonction convexe sur un intervalle

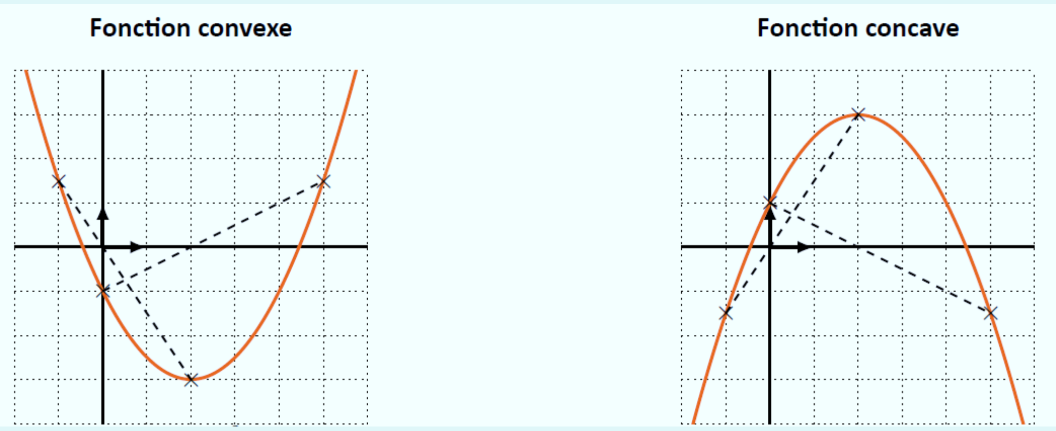
Une fonction est convexe sur un intervalle I si, sur cet intervalle...

- f est en-dessous de toutes ses sécantes
- f est au-dessus de toutes ses tangentes – si f est dérivable
- f' est croissante : les pentes des tangentes sont de plus en plus grandes.
- f'' est positive – si f est deux fois dérivable

Une fonction est concave sur un intervalle I si, sur cet intervalle...

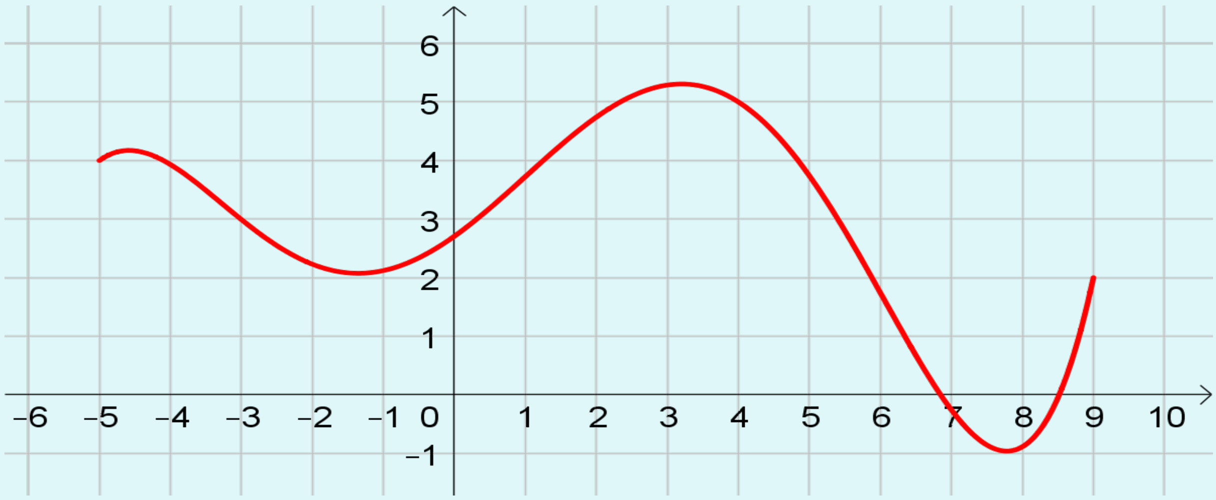
- f est au-dessus de toutes ses sécantes
- f est en-dessous de toutes ses tangentes – si f est dérivable
- f' est décroissante : les pentes des tangentes sont de plus en plus petites.
- f'' est négative – si f est deux fois dérivable

Pour retenir, le mieux est d'avoir deux exemples graphiques en tête



Lorsque la convexité d'une fonction change, on dit qu'il y a une inflexion.

Application 2 : on considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous. Sur quels intervalles f semble-t-elle convexe ? Combien y a-t-il de points d'inflexion ?



Exploiter la dérivée et la dérivée seconde

L'utilisation de la dérivée seconde, lorsqu'elle existe, permet de déterminer la convexité d'une fonction. L'étude de cette dérivée seconde ne diffère donc que très peu de l'étude qui a été faite avec les fonctions dérivées en classe de première.

Ainsi, soit I un intervalle

- **Si f est dérivable sur I**
  - f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$
  - f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$
- **Si f est deux fois dérivable sur I**
  - f est convexe sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$
  - f est concave sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \leq 0$

Il faut donc retenir

Signe de f' $\leftrightarrow$ Variations de f
Signe de f'' $\leftrightarrow$ Convexité de f

Application 3 : pour tout réel x, on pose $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x - 1$. Déterminez les intervalles sur lesquels f est convexe.

CORRECTION

Application 1 :

- $f_1 : x \mapsto (5x + e^x)^3$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f_1 est de la forme u^3 avec, pour tout réel x, $u(x) = 5x + e^x$. Ainsi, $f_1{}' = u' \times 3u^2$. Pour tout réel x, on a donc

$$f_1{}'(x) = (5 + e^x) \times 3(5x + e^x)^2$$

- $f_2 : x \mapsto \ln(2 + \cos(x))$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f_2 est de la forme $\ln(u)$ avec, pour tout réel x, $u(x) = 2 + \cos(x)$. Ainsi, $f_2{}' = \frac{u'}{u}$. Pour tout réel x, on a donc

$$f'_2(x) = \frac{-\sin(x)}{2 + \cos(x)}$$

- $f_3 : x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ f_3 est de la forme $\sqrt{u}$ avec, pour tout réel x, $u(x) = 1 + x^2$. Ainsi, $f_3{}' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$. Pour tout réel x, on a donc

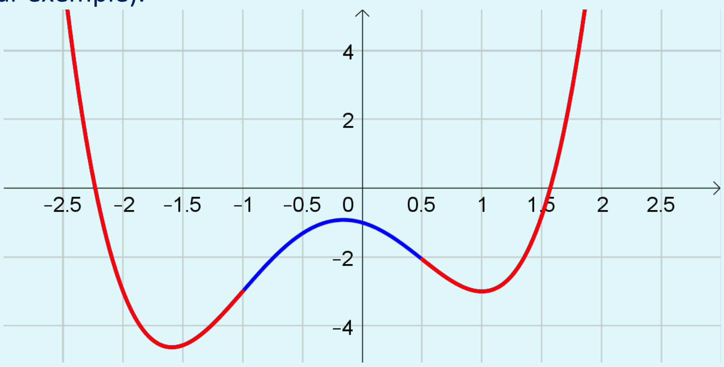
$$f_3{}'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

- $f_4 : x \mapsto \cos(\sin(x))$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ f_4 est de la forme $\cos(u)$ avec, pour tout réel x, $u(x) = \sin(x)$. Ainsi, $f_4{}' = u' \times (-\sin(u))$. Pour tout réel x, on a donc
$$f'_4(x) = -\cos(x) \times \sin(\sin(x))$$
- $f_5 : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$, définie et dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$. f_5 est de la forme e^u avec, pour tout réel $x \neq 0$, $u(x) = \frac{1}{x}$. Ainsi, $f_5{}' = u' \times e^u$. Pour tout réel $x \neq 0$, on a donc
$$f_5{}'(x) = -\frac{e^x}{x^2}$$

Application 2 :
On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

f semble convexe sur les intervalle $[-3.25,1]$ et $[6,9]$. Ce ne sont que des estimations : il est difficile d'établir exactement graphiquement la convexité d'une fonction près des points d'inflexion.
Ces points d'inflexion sont par ailleurs au nombre de 3.

Application 3 :
Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x - 1$. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe revient à déterminer les intervalles sur lesquels f'' est positive.
Pour tout réel x,
$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 2$$
et
$$f''(x) = 12x^2 + 6x - 6$$
Il s'agit d'un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = 6^2 + 4 \times 6 \times 12 = 324$ qui est strictement positif. Les racines de ce polynôme sont donc $x_1 = \frac{-6-\sqrt{324}}{2\times 12} = -1$ et $x_2 = \frac{-6+\sqrt{324}}{2\times 12} = \frac{1}{2}$. Ainsi, $f''(x) \geq$ pour $x \in]-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$. f est donc convexe sur ces deux intervalles.
On peut vérifier ce résultat en représentant le fonction f dans un repère orthonormé (en utilisant une calculatrice graphique par exemple).



Vous pouvez maintenant
faire et envoyer le devoir n°1