COURS PI

L'école sur-mesure

de la Maternelle au Bac, Établissement d'enseignement privé à distance, déclaré auprès du Rectorat de Paris

TERM G

Sciences de l'Ingénieur

Module 2 - Étude statique et dynamique des systèmes

- ***Leçons détaillées***
  pour apprendre les notions en jeu
- ***Exemples et illustrations***
  pour comprendre par soi-même
- ***Prolongement numérique***
  pour être acteur et aller + loin
- ***Exercices d'application***
  pour s'entraîner encore et encore
- ***Corrigés des exercices***
  pour vérifier ses acquis

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR TERMINALE
Module 2 – Étude statique et dynamique des systèmes

L'AUTEUR

Dorian JACQUOT

« C'est l'exigence et la bienveillance qui m'ont toujours animé pour concevoir ce manuel par lequel nous partons ensemble à la découverte de ce qui fait les sciences de l'ingénieur : la connaissance scientifique d'une part, mais aussi la démarche, la réflexion, la conception et la communication ». Ingénieur en systèmes mécaniques et professeur agrégé en sciences industrielles de l'ingénieur, Dorian enseigne cette discipline à la croisée des sciences et de l'innovation. Passionné par les langues, en plus de parler couramment Python, Java, HTML, CSS, PHP, C++... il maîtrise également l'anglais et l'espéranto.

PRÉSENTATION

Un grand nombre de produits issus de l'ingénierie sont basés sur des assemblages mécaniques. Ces assemblages, associés à une source d'énergie et un moyen de conversion d'énergie, sont destinés à produire un mouvement contrôlé. Le mouvement permet finalement au produit de produire l'action attendue et de satisfaire un besoin. On pense notamment aux produits liés au transport (automobile, ferroviaire, aéronautique, aérospatial, etc.), aux moyens de production d'énergie (éolien, centrale hydroélectrique, alternateur des centrales thermiques, etc.) ou à la robotique (robotique industrielle, robotique de service).

La mécanique et la cinématique, que nous avons abordées en Première, consistent en l'étude des assemblages mécaniques, des mouvements et des efforts entre leurs différentes pièces. Le module 3 de Première vous a permis de poser les fondations de vos connaissances dans ces domaines, et d'être capable de modéliser un assemblage et de comprendre les interactions entre ses pièces.

Bien que nous ayons évoqué, en Première, le fait qu'un lien existe entre les forces extérieures appliquées à un solide, et le mouvement de ce solide, nous n'avons pas révélé ce lien. Cette année, la mise en évidence, puis la mise en équation, de ce lien, vont être centrales. Vous allez ainsi travailler autour de deux grands principes : le principe fondamental de la statique (PFS), lors du premier chapitre, et le principe fondamental de la dynamique (PFD), lors du second chapitre. Ces deux principes sont les clefs pour comprendre comment les forces engendrent le mouvement. Ils permettent de déterminer si un assemblage va être mis en mouvement ou non, puis de calculer les grandeurs mouvements (position, vitesse et accélération) en fonction des grandeurs efforts (forces et moments).

En plus de ces deux principes, nous aborderons, en fin de chapitre 1, la transmission des efforts dans une structure porteuse, c'est-à-dire dans l'ossature d'un bâtiment ou d'un ouvrage d'architecture (pont, tour, etc.). Nous étudierons ensuite les bases de la résistance des matériaux, afin d'être en mesure de déterminer si une structure porteuse risque de s'effondrer ou non. Enfin, pour clore le module, nous apprendrons à modéliser les frottements entre pièces, pour estimer l'impact qu'ils peuvent avoir sur le PFS et PFD.

LE SOMMAIRE

CHAPITRE 1. Etude statique des systèmes 1

COMPÉTENCES VISÉES

- Déterminer les actions mécaniques (inconnues statiques de liaison ou action mécanique extérieure) menant à l'équilibre statique d'un mécanisme, d'un ouvrage ou d'une structure
- Principe fondamental de la statique
- Analyser les charges appliquées à un ouvrage ou une structure

PRÉREQUIS

- Module 3 de Première SI
- Les chapitres relatifs à la trigonométrie et aux vecteurs de vos modules de Mathématiques

Première approche 2
1. Forces et moments : rappels et compléments 4
2. Principe fondamental de la statique 13
3. Principe fondamental de la statique – Etudes 20
4. Résistance des structures porteuses 26
Le temps du bilan 33

CHAPITRE 2. Etude dynamique des systèmes 37

COMPÉTENCES VISÉES

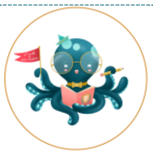
- Déterminer la grandeur flux (vitesse linéaire ou angulaire) lorsque les actions mécaniques sont imposées
- Déterminer la grandeur effort (force ou couple) lorsque le mouvement souhaité est imposé
- Principe fondamental de la dynamique
- Notion d'inertie et d'inertie équivalente
- Modèle de frottement – Loi de Coulomb

PRÉREQUIS

- Module 3 de Première SI
- Les chapitres relatifs à la trigonométrie et aux vecteurs de vos modules de Mathématiques

Première approche 38
1. Principe fondamental de la dynamique en translation 39
2. Principe fondamental de la dynamique en rotation 43
3. Frottements et loi de Coulomb 47
Le temps du bilan 59
Les Clés du Bac : démarche de résolution des problèmes statiques 60

CORRIGÉS 63



Tous les exercices proposés dans ce manuel disposent de corrigés-types.
Pour une meilleure manipulation :

- ✓ Dans la **version papier**, vous les retrouverez regroupés en toute fin du fascicule, et les repérerez à leur impression sur **papier de couleur**.
- ✓ Dans la **version numérique** de l'ouvrage, ils vous sont accessibles en scannant le QR code ci-contre.

Le Cours

ÉTUDE STATIQUE DES SYSTÈMES

Dans le troisième module de première, nous avons étudié le **mouvement**, avec les translations et rotations, ainsi que les **efforts mécaniques** qui produisent ces mouvements. Cela nous avait amené à modéliser les assemblages mécaniques sous la forme de **schémas cinématiques**, en identifiant et représentant par des symboles les **liaisons mécaniques** et les **systèmes de transmission** entre les pièces. Dans ce premier chapitre de mécanique de terminale, nous allons mener des **études statiques** sur ces assemblages mécaniques.

Une étude statique peut être réalisée lorsqu'un assemblage se trouve en **équilibre statique**, c'est-à-dire que toutes ses pièces sont immobiles (ou éventuellement en translation rectiligne uniforme). Dans cette situation particulière, mais très courante, des relations mathématiques particulières relient les **forces** extérieures appliquées à chaque pièce, et les **moments** de ces forces. Ces relations sont issues du **principe fondamental de la statique** (PFS). Nous verrons donc comment utiliser le PFS pour déterminer les forces appliquées à un solide dans un état statique, ou inversement, pour prouver qu'un solide est dans un état statique si l'on connaît les forces extérieures appliquées au solide.

Après avoir étudié le PFS appliqué à des assemblages mécaniques, nous verrons qu'il s'applique aussi parfaitement aux **bâtiments** et **ouvrages d'architecture**, dont la **structure porteuse** assure la résistance : cette structure devant, de manière évidente, être statique, pour assurer la solidité du bâtiment/ouvrage. Nous terminerons cette partie par un peu de **résistance des matériaux** (RDM). La RDM nous permettra de déterminer si un élément structural en particulier risque de s'effondrer ou non, en fonction de son matériau, sa géométrie et des forces qu'il doit supporter.

COMPÉTENCES VISÉES

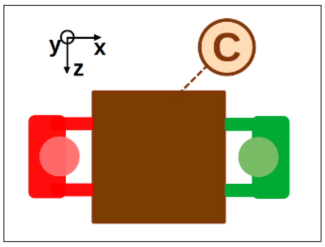
- Déterminer les actions mécaniques (inconnues statiques de liaison ou action mécanique extérieure) menant à l'équilibre statique d'un mécanisme, d'un ouvrage ou d'une structure
- Principe fondamental de la statique
- Analyser les charges appliquées à un ouvrage ou une structure

PRÉREQUIS

- Module 3 de Première SI
- Les chapitres relatifs à la trigonométrie et aux vecteurs de vos modules de Mathématiques

Première approche

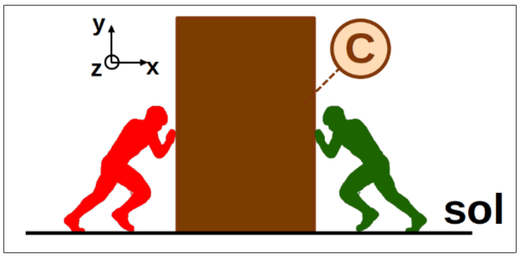
Soit la situation ci-dessous, présentant en vue de dessus, une caisse, que deux personnages tentent de pousser. Les personnages poussent droit devant eux :



1. Sur l'axe x, combien de forces sont appliquées sur la caisse ? Représentez-les par des vecteurs.

2. Décrivez les caractéristiques que devraient avoir ces forces (direction, sens, norme) l'une par rapport à l'autre, pour que la caisse soit statique (c'est-à-dire immobile).

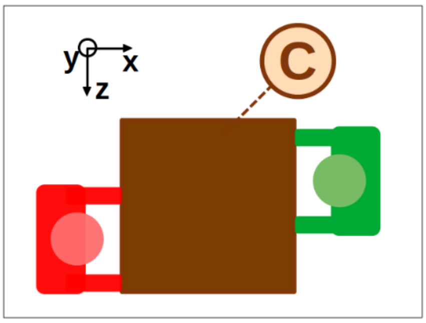
Prenons la même situation, en vue de côté :



3. Sur l'axe y, combien de forces sont appliquées sur la caisse ? À quoi correspondent ces forces ? Représentez-les par des vecteurs.

4. La caisse ne s'enfonce pas dans le sol, elle est statique sur l'axe y. Décrivez les caractéristiques que devraient avoir les forces appliquées sur y, l'une par rapport à l'autre, pour que la caisse soit statique.

Retournons en vue de dessus. Cette fois-ci, les personnages sont positionnés différemment, mais ils continuent de pousser droit devant eux :



5. Représentez sur le schéma ci-dessus les forces appliquées sur la caisse par des vecteurs.

6. Dans ces conditions, est-ce-que la caisse peut rester statique ? Pourquoi ? Que fera la caisse ?

....

....

....

....

7. De manière générale, quelles conditions semblent devoir être respectées pour qu'un solide soit dans un état statique, sur un axe donné, lorsqu'il est soumis à 2 forces ?

....

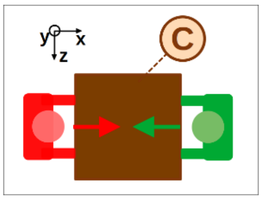
....

....

....

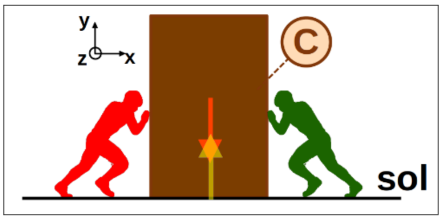
CORRIGÉ

1. Sur x, on a deux forces.



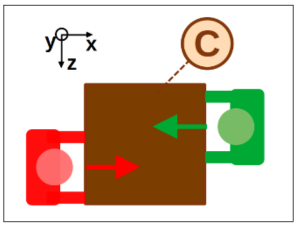
2. Pour que la caisse soit immobile, ces deux forces devraient avoir la même direction, des sens opposés et la même norme.

3. Sur y, on a deux forces : le poids de la caisse et la résistance du sol.



4. De nouveau, ces deux forces ont la même direction, des sens opposés et la même norme.

5. Voir schéma :



6. La caisse ne peut pas rester immobile, car les deux forces ne sont pas sur le même axe (bien qu'elles soient parallèles). Dans ce cas, la caisse va tourner.

7. De manière générale, si un solide est soumis à 2 forces, il faut que ces forces aient la même direction, des sens opposés et la même norme pour que le solide soit statique.

01 ÉTUDE STATIQUE DES SYSTÈMES
Forces et moments : rappels et compléments

RAPPEL : VECTEUR FORCE

« Une action mécanique, appliquée à un solide ou à un ensemble, peut être modélisée par une force. Une force possède un point d'application, une direction, un sens et une norme en N (Newton) ».

Une force se note sous la forme d'un **vecteur force** $\overrightarrow{A_{S1\rightarrow S2}}$, avec :

- A le point d'application de la force ;
- S1 le solide qui produit l'action mécanique ;
- S2 le solide qui subit l'action mécanique.

Graphiquement, la force peut être représentée par une flèche (appelée vecteur), dans un repère.

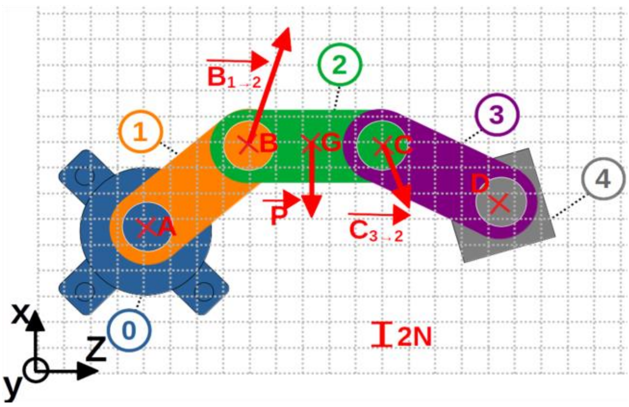
Un solide est souvent soumis à son **poids**, qui est aussi une force et qu'on note simplement $\overrightarrow{P}$. Cette force s'applique au niveau du centre de gravité du solide. Sa direction est verticale, son sens est vers le bas, et sa norme vaut $\left\|\overrightarrow{P}\right\| = m.g$, avec :

- m la masse du solide en kg ;
- g l'accélération produite par le champ gravitationnel terrestre, en $m.s^{-2}$, qu'on approxime souvent à 9,81 $m.s^{-2}$, voire à 10 $m.s^{-2}$.

Dans certains cas de figure, le poids du solide sera négligé en comparaison des autres forces auquel il est soumis. Cela sera toujours indiqué dans l'énoncé ou dans les données si c'est le cas.

EXEMPLES

Soit un assemblage de biellettes (nom donné aux pièces 1, 2 et 3), dont on isole la pièce 2. Cette pièce a une masse de 0,6 kg.



La pièce 2 est soumise à 3 forces :

1) La force exercée par la pièce 1, en B. Cette force possède des composantes sur les axes x et z, qu'on peut déterminer graphiquement grâce à l'échelle : 9N sur l'axe x, et 3N sur l'axe z. Cette force peut être notée, sous forme de vecteur :

$$\overrightarrow{B_{1\rightarrow 2}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) La force exercée par la pièce 3, en C. Cette force possède des composantes sur les axes x et z, qu'on peut déterminer graphiquement grâce à l'échelle : -5N sur l'axe x, et 2N sur l'axe z. Cette force peut être notée, sous forme de vecteur :

$$\overrightarrow{C_{3\rightarrow 2}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3) La force exercée par la gravité sur la pièce 2, en G. Cette force possède uniquement une composante sur l'axe x, négative, dont on peut calculer ou déterminer graphiquement la norme : par le calcul, on obtient :

$$\left\|\overrightarrow{P}\right\| \approx m.g = 0,6 \times 10 = 6N$$

Cette force peut être notée, sous forme de vecteur :

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ADDITIONS DE VECTEURS

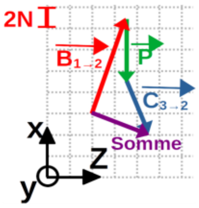
Il est possible d'additionner les vecteurs, ce qui permet de connaître l'effet d'ensemble produit par les différentes forces exercées sur un solide. L'addition des vecteurs peut se faire :

- graphiquement, en mettant tous les vecteurs bout à bout ;
- par le calcul, en additionnant, axe par axe, les composantes des vecteurs.

EXEMPLES

On reprend l'exemple précédent, avec la pièce 2 qui est isolée et soumise à 3 forces. On peut additionner les trois vecteurs forces graphiquement ou par le calcul.

Graphiquement, on met les vecteurs bout à bout, puis on applique l'échelle, ce qui donne :



$$\overrightarrow{B_{1\to 2}} + \overrightarrow{C_{3\to 2}} + \vec{P} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Par le calcul, on obtient :

$$\overrightarrow{B_{1\to 2}} + \overrightarrow{C_{3\to 2}} + \vec{P} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-5-6 \\ 0+0+0 \\ 3+2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

PROBLÈME PLAN ET FORCE

Dans la grande majorité des problèmes que nous étudierons, les actions mécaniques ont un effet sur le solide, dans uniquement deux dimensions, c'est-à-dire dans un plan : on parle alors de problème plan.

Du point de vue des forces, cela signifie que toutes les forces que nous étudierons n'auront des composantes que sur 2 axes. C'est le cas dans l'exemple précédent, où toutes les forces s'exercent suivant les axes x et z. On a donc un problème plan, dans le plan (Oxz).

RAPPEL : PRINCIPE DE RÉCIPROCITÉ

Le principe de réciprocité dit que, si le solide (S1) produit une action mécanique $\overrightarrow{A_{S1\to S2}}$ sur le solide (S2), alors (S1) recevra en retour, une action mécanique $\overrightarrow{A_{S2\to S1}}$ produite par le solide (S2), telle que :

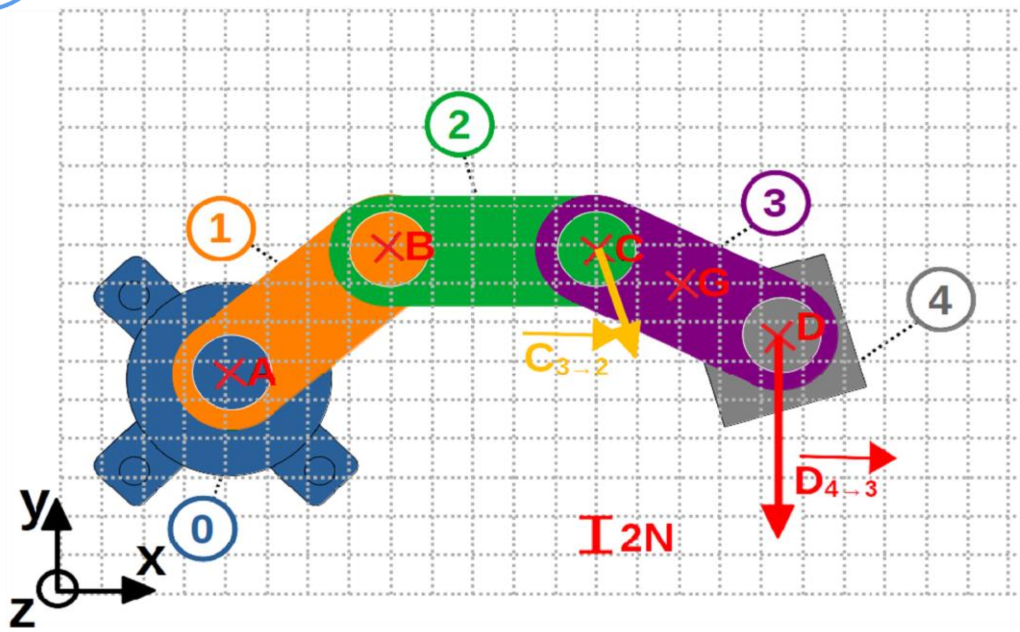
$$\overrightarrow{A_{S1\to S2}} = -\overrightarrow{A_{S2\to S1}}$$

Au niveau des vecteurs forces, cela signifie que $\overrightarrow{A_{S1\to S2}}$ et $\overrightarrow{A_{S2\to S1}}$ ont :

- le même point d'application ;
- la même direction ;
- un sens opposé ;
- la même norme.

À VOUS DE JOUER 1

Soit un assemblage de biellettes (nom donné aux pièces 1, 2 et 3), dont on isole la pièce 3. Cette pièce a une masse de 800 g :



1. Est-ce-que ce problème semble être un problème plan ? Si oui, dans quel plan se déroule l'étude ?

....

2. Nommez, sous forme de vecteurs, les forces auxquelles la pièce 3 sera soumise. Vous préciserez, pour chaque force, quel élément produit cette force.

....

....

....

3. Pour chaque force, exprimez ses différentes composantes dans le repère, sous forme de vecteurs. Vous expliquerez à chaque fois comment vous avez déterminé ces forces/composantes.

....

....

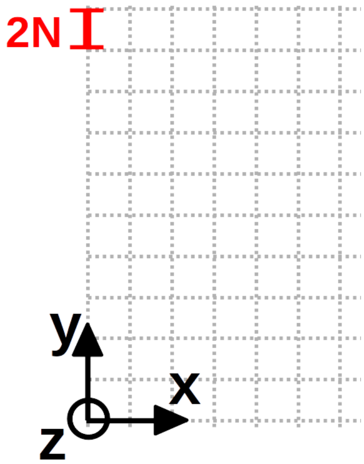
....

....

....

....

4. Représentez les forces exercées sur la pièce 3, en respectant l'échelle.
5. Graphiquement, déterminez la somme des différentes forces. Exprimez cette somme sous forme de vecteur.



6. Par le calcul, vérifiez cette somme.

RAPPEL : VECTEUR MOMENT ET COUPLE

Lorsqu'une force tend à mettre en rotation un solide, alors on dit que cette force impose un moment, ou un couple, sur ce solide. Un moment/couple s'exprime/s'étudie toujours autour d'un point.

Un moment se note sous la forme d'un vecteur moment $\overrightarrow{M_B\overrightarrow{A_{S1\rightarrow S2}}}$ avec :

- $\overrightarrow{A_{S1\rightarrow S2}}$ la force à l'origine du moment ;
- B le point à partir duquel le moment est exprimé/étudié ;
- S1 le solide qui produit le moment ;
- S2 le solide qui subit le moment.

En son point d'application, le moment d'une force est toujours nul.

Par exemple, $\overrightarrow{M_A\overrightarrow{A_{S1\rightarrow S2}}} = \overrightarrow{0}$ car A est à la fois le point d'application de la force $\overrightarrow{A_{S1\rightarrow S2}}$, et le point par rapport auquel le moment est exprimé.

PROBLÈME PLAN ET MOMENT

Comme indiqué précédemment, la grande majorité des problèmes que nous étudierons sont des problèmes plans.
Du point de vue des moments, cela signifie que tous les moments que nous étudierons n'auront qu'une seule composante, donc seront exprimés autour d'un seul axe. Cet axe sera l'axe suivant lequel les forces n'ont pas de composante. Par exemple, si les forces ont des composantes suivant les axes x et y, alors les moments auront une composante suivant l'axe z.
Comme ils n'auront qu'une composante, les moments que nous utiliserons ne seront pas vraiment des vecteurs, et on pourra les exprimer en se passant de la flèche vectorielle. Par exemple :

$$M_B\overrightarrow{A_{S1\rightarrow S2}}$$

CHANGEMENT D'UN POINT DE MOMENT

Dans la suite du chapitre, nous allons très souvent être amenés à changer le point par rapport auquel on exprime/étudie un moment. Pour cela, nous allons devoir utiliser une relation que nous avons déjà utilisée en Première : la **formule du « bras de levier »**. Nous avons déjà vu une version simplifiée de cette formule en Première, nous allons en voir une version plus précise cette année.

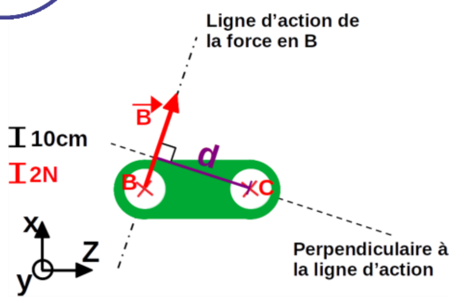
Formule du « bras de levier » : $M_B\vec{F} = \pm\left\|\vec{F}\right\| \times d$ **avec :**

- $M_B\vec{F}$ **le moment de la force** $\vec{F}$**, par rapport au point B, en N.m ;**
- $\left\|\vec{F}\right\|$ **la norme de la force** $\vec{F}$ **en N ;**
- **d la distance, en m, entre la ligne d'action de la force, et le point B.**

La ligne d'action d'une force est la droite servant de support à la force. Pour obtenir la distance entre la ligne d'action d'une force et un point M, il faut tracer la perpendiculaire à la ligne d'action passant par le point M. Ensuite, on mesure la distance entre le point M et son projeté sur la ligne d'action.

EXEMPLE 1

Dans ce premier cas, on souhaite exprimer le moment de la force $\vec{B}$, exercé sur la pièce verte, par rapport au point C.



On a :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne pour norme :

$$\left\|\vec{B}\right\| = \sqrt{9^2 + 3^2} \approx 9,5N$$

La distance entre la ligne d'action de $\vec{B}$ et C vaut d = 47,5 cm. On a donc :

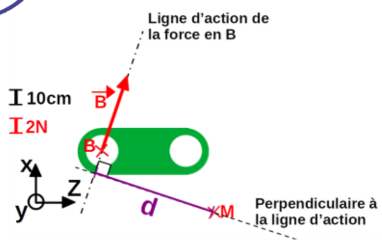
$$M_C\vec{B} = \pm\left\|\vec{B}\right\| \times d = 9,5 \times 0,475 \approx 4,51Nm$$

En analysant le sens dans lequel $\vec{B}$ devrait faire tourner la pièce autour de C (sens anti-trigonométrique), on en déduit que :

$$M_C\vec{B} = -4,51Nm$$

EXEMPLE 2

Dans ce deuxième cas, on souhaite exprimer le moment de $\vec{B}$, exercé sur la pièce verte, par rapport au point M.



On a toujours :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne pour norme :

$$\left\|\vec{B}\right\| \approx 9,5N\left\|\vec{B}\right\| \approx 9,5N$$

La distance entre la ligne d'action de $\vec{B}$ et M vaut d = 74,5 cm. On a donc :

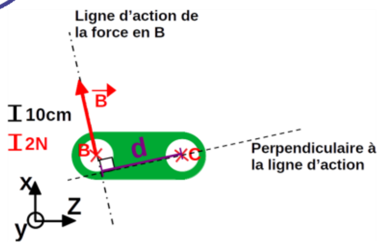
$$M_M\vec{B} = \pm\left\|\vec{B}\right\| \times d = 9,5 \times 0,745 \approx 7,08Nm$$

En analysant le sens dans lequel $\vec{B}$ devrait faire tourner la pièce autour de M (sens anti-trigonométrique), on en déduit que :

$$M_M\vec{B} = -7,08Nm$$

EXEMPLE 3

Dans ce dernier cas, on souhaite exprimer le moment de $\vec{B}$, exercé sur la pièce verte, par rapport au point C.



On a cette fois-ci :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne pour norme :

$$\left\|\vec{B}\right\| = \sqrt{9^2 + (-2,5)^2} \approx 9,3N$$

La distance entre la ligne d'action de $\vec{B}$ et C vaut d = 74,5 cm. On a donc :

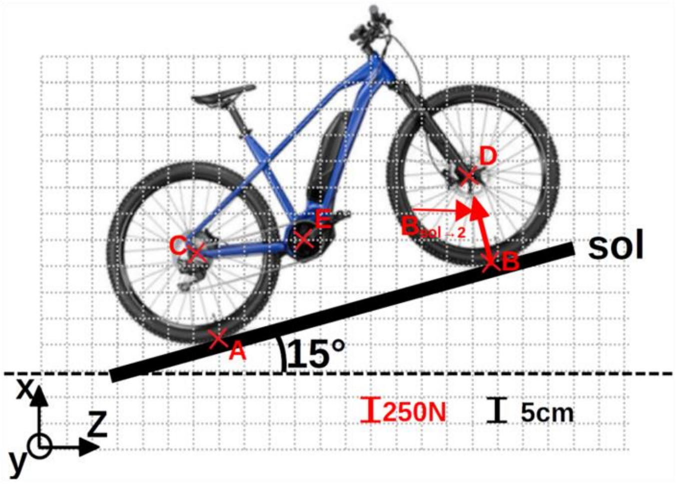
$$M_C\vec{B} = \pm\left\|\vec{B}\right\| \times d = 9,3 \times 0,485 \approx 4,51Nm$$

En analysant le sens dans lequel $\vec{B}$ devrait faire tourner la pièce autour de C (sens anti-trigonométrique), on en déduit que :

$$M_C\vec{B} = -4,51Nm$$

À VOUS DE JOUER 2

Soit le vélo ci-dessous, sur lequel se trouve un cycliste (non représenté), qui monte une pente de 15°. Nous sommes dans un problème plan, de plan (Oxz).



1. À l'aide de l'échelle, déterminez la norme de la force $\overrightarrow{B_{sol\to roue}}$.

....

2. À l'aide de l'échelle ou par le calcul, exprimez, sous forme de vecteur, la force $\overrightarrow{B_{sol\to roue}}$.

....

....

....

3. Déterminez la valeur du moment de $\overrightarrow{B_{sol\to roue}}$ par rapport au point B.

....

....

....

4. Déterminez la valeur du moment de $\overrightarrow{B_{sol \to roue}}$ par rapport au point D. Que remarque-t-on ? Quelle propriété peut-on en déduire ?

5. Déterminez la valeur du moment de $\overrightarrow{B_{sol \to roue}}$ par rapport au point A.

6. Déterminez la valeur du moment de $\overrightarrow{B_{sol \to roue}}$ par rapport au point C. Que remarque-t-on ? Quelle propriété peut-on en déduire ?

7. Déterminez la valeur du moment de $\overrightarrow{B_{sol \to roue}}$ par rapport au point E.

8. Si on compare le moment de $\overrightarrow{B_{sol \to roue}}$ par rapport aux points B, E et A, que peut-on dire ? Quelle propriété peut-on en déduire ?

PROPRIÉTÉS DE CHANGEMENT D'UN POINT

Voici 3 propriétés intéressantes, que l'on peut utiliser lorsque l'on doit exprimer un moment en un autre point que le point d'application de sa force :

- le moment d'une force est nul en tout point se trouvant sur sa ligne d'action ;
- le moment d'une force exprimé en deux points sera le même si ces deux points se trouvent à égale distance et du même côté de la droite d'action de la force ;
- plus un point est éloigné de la ligne d'action d'une force, plus le moment de cette force exprimé en ce point sera important.

BILAN DES FORCES

Dans certaines études, on vous indiquera dès le départ les forces auxquelles le solide étudié est soumis. Dans d'autres études, il vous faudra les identifier vous-même : dans ce cas, on dit que l'on fait le bilan des forces. Une fois les forces identifiées, il faudra essayer de déterminer un maximum de caractéristiques pour chaque force (point d'application, direction, sens et norme).
Effectuer le bilan des forces d'un solide consiste à lister et nommer les forces appliquées au solide, et à identifier un maximum de caractéristiques de ces forces.
Pour identifier les forces appliquées à un solide, on peut chercher : des forces à distance **;** des forces de contact.

1) Force à distance

Un solide est souvent soumis à une force à distance, comme la pesanteur ou le magnétisme. La pesanteur sera, de très loin, la plus fréquente. Ses caractéristiques sont assez faciles à déterminer et à calculer, dès lors que l'on connaît la masse et le centre de gravité du solide (voir sous-partie « a) Rappel : Vecteur force »).
Comme vu précédemment, la pesanteur est parfois négligée, car faible en comparaison des autres forces.

2) Force de contact

Les forces de contact sont les plus nombreuses. Chaque liaison mécanique et chaque système de transmission sera à l'origine d'une force. Le point d'application de la force sera le centre de la liaison/système. Ses caractéristiques ne pourront pas toujours être déterminées. Pour en déterminer certaines, on pourra notamment appliquer :

- le principe d'action-réaction, si l'on connaît déjà les forces appliquées aux solides se trouvant autour du solide étudié ;
- le principe fondamental de la statique, que nous allons voir dans la partie suivante.

3) Présentation du bilan des forces

Un bilan des forces peut être présenté sous la forme d'un tableau à 5 colonnes : nom de la force, point d'application, direction, sens, norme. Chaque ligne du tableau correspondra à une des forces appliquées au solide, et contiendra les caractéristiques qu'on a pu déterminer à propos de cette force. Certaines cases du tableau resteront donc vides.

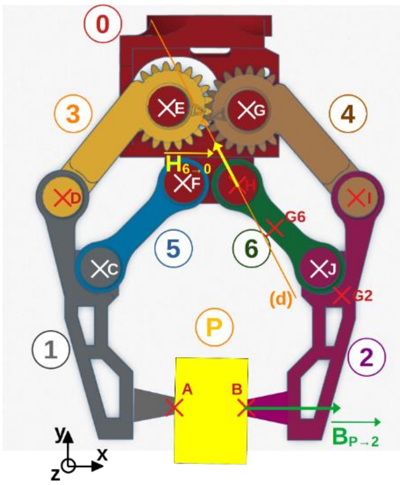
EXEMPLES

Voici un exemple de présentation du bilan des forces appliquées à un solide noté 3, qui sera soumis à 4 forces. On voit que les caractéristiques de certaines forces ne sont pas bien connues (cases vides).

Nom de la force	Point d'application	Direction	Sens	Norme (N)
$\vec{P}$	G	verticale	Vers le bas	430
$\overrightarrow{A_{0\to3}}$	A	Droite (AB)		
$\overrightarrow{C_{2\to3}}$	C			
$\overrightarrow{D_{6\to3}}$	D			230

À VOUS DE JOUER ❸

Soit le solide ci-contre :



1. La pièce 6 possède une masse de 150g, et son centre de gravité sera le point G6. On sait aussi que la force $\overrightarrow{H_{6\to0}}$ (représentée sur l'image) possède une norme de 12 N. Effectuez le bilan des forces de cette pièce, et présentez-le sous forme de tableau.

2. La pièce 2 possède une masse de 270g, et son centre de gravité sera le point G2. La résistance à la pression, exercée par la pièce en B (représentée sur l'image ci-contre), donnera une force de 19 N. Effectuez le bilan des forces de cette pièce, et présentez-le sous forme de tableau.

ÉTUDE STATIQUE DES SYSTÈMES

Principe fondamental de la statique

ÉQUILIBRE STATIQUE ET PFS

L'ESSENTIEL

On dit qu'un solide est en équilibre statique, s'il est immobile, ou s'il est en translation rectiligne uniforme.
Lorsqu'un solide est en équilibre statique, on peut lui appliquer le principe fondamental de la statique (PFS).

Le PFS dit que :

- la somme des forces extérieures auxquelles il est soumis est nulle

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{0}$$

- la somme des moments des forces extérieures auxquelles il est soumis est nulle :

$$\sum \overrightarrow{M_A \overrightarrow{F_{ext}}} = \overrightarrow{0}$$ pour tout point A

La seconde égalité peut s'exprimer avec les couples autour d'un axe :

$$\sum C = 0$$

Il est fréquent que l'on ne connaisse que les caractéristiques (direction, sens et norme) de certaines des forces qui s'appliquent à un solide. Le PFS va nous permettre de déterminer les caractéristiques complètes des autres forces.
Dans un mécanisme, il est important de pouvoir déterminer les efforts auxquels chaque pièce est soumise. En effet, une fois les efforts appliqués à une pièce connus, on peut déterminer si la pièce sera assez solide pour y résister. Si ce n'est pas le cas, on peut alors modifier la géométrie ou les matériaux de la pièce.

L'ESSENTIEL

Réciproque du PFS : « si la somme des forces extérieures appliquées à un solide est nulle, et que la somme de leurs moments est nulle, alors le solide est en équilibre statique. »

PFS et solide soumis à 2 forces

Lorsqu'un solide en équilibre statique est soumis à 2 forces, le PFS implique que ces deux forces, et leurs moments, se compensent. Cela implique plusieurs choses concernant leurs caractéristiques.

L'ESSENTIEL

D'après le PFS, si un solide en équilibre statique est soumis à deux forces $\overrightarrow{F1}$ et $\overrightarrow{F2}$, alors :

$$\overrightarrow{F1} = -\overrightarrow{F2}$$

Ce qui implique que ces deux forces :

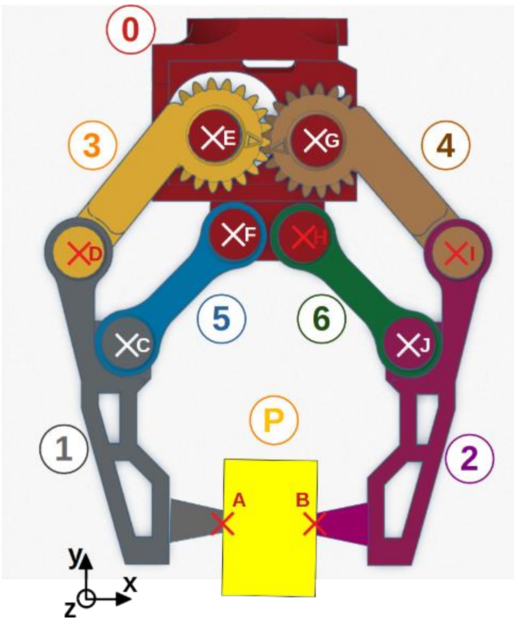
- ont la même direction, qui est la droite reliant leurs points d'applications ;
- sont de sens opposés ;
- ont la même norme.

***Application du PFS :** trois exemples détaillés d'étude de solide en équilibre statique vont vous être présentés dans la suite. Comme les solides étudiés sont en équilibre statique, le PFS pourra être utilisé.*
Chaque application commencera par une partie « Présentation du solide étudié » et une partie « Données et forces » : elles présentent l'étude. Ensuite, vous aurez une partie « Objectif », parfois découpée en plusieurs étapes : cette partie pose le problème à résoudre, et présente la démarche de résolution de manière détaillée.
À la suite de ces 3 applications, vous aurez, sous forme d'exercices, des problèmes de statique à résoudre.

APPLICATION DU PFS : SOLIDE SOUMIS À DEUX FORCES

Présentation du solide étudié

Soit la pince d'un bras robot ci-contre, qui serre une pièce P. Nous avons déjà étudié cette pièce en Première, c'est une des pinces de préhension du robot NIRO.



Données et forces

La pince se trouve dans une situation d'équilibre statique : on peut donc utiliser le PFS.
Le problème est un problème plan, de plan (Oxy).

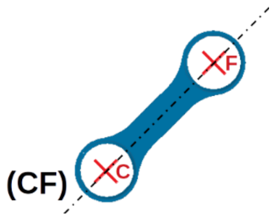
On nous indique que la force $C_{1\to 5} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$

Enfin, le poids des pièces étant faible en comparaison des efforts de contact, on va négliger les poids dans cette étude.

Objectif : déterminer les caractéristiques de la force $\overrightarrow{F_{0\to 5}}$

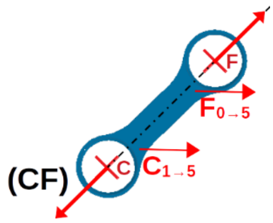
On isole la pièce 5, qui est une biellette. Cette pièce est soumise à deux efforts, en C et en F. Grâce au PFS, on peut tout de suite dire que :

- la direction des deux forces est la droite (CF) ;
- les deux forces sont de sens opposés ;
- les deux forces ont la même norme.



Pour calculer les composantes de $\overrightarrow{F_{0\to 5}}$, on peut se servir du PFS, qui dit que la somme des forces extérieures auxquelles il est soumis est nulle.

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$$
$$\iff \overrightarrow{F_{0\to 5}} + \overrightarrow{C_{1\to 5}} = \vec{0}$$
$$\iff \overrightarrow{F_{0\to 5}} = -\overrightarrow{C_{1\to 5}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$



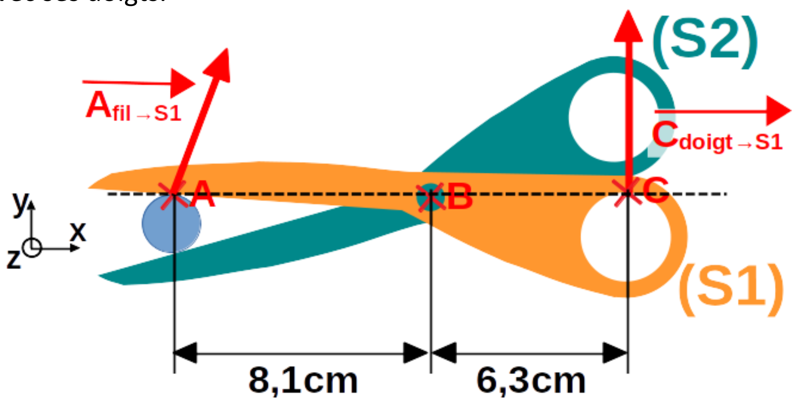
APPLICATION DU PFS : SOLIDE SOUMIS À TROIS FORCES, SANS L'ÉQUATION DU MOMENT

Quand un solide est soumis à trois forces, l'étude est plus longue et complexe qu'avec seulement 2 forces : on va devoir travailler en plusieurs étapes pour déterminer les caractéristiques manquantes de certaines forces.

Dans certains cas, comme celui présenté dans cette sous-partie, l'égalité des forces $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{0}$ sera suffisante pour déterminer les caractéristiques manquantes. Dans d'autres cas, nous aurons aussi besoin d'utiliser l'égalité des moments $\sum \overrightarrow{M_A \overrightarrow{F_{ext}}} = \overrightarrow{0}$.

Présentation du solide étudié

Soit une paire de ciseaux, composée des ciseaux (S1) et (S2). Un fil métallique se trouve entre les deux ciseaux, qui sont bloqués et n'arrivent pas à le couper pour le moment. Enfin, l'utilisateur essaie de faire bouger les ciseaux avec ses doigts.



Données et forces

Le problème est un problème plan, de plan (Oxy), le poids des ciseaux est négligé et les deux ciseaux sont dans un équilibre statique.
Dans ce problème, nous allons isoler le ciseau (S1). Sur ce ciseau, 3 forces s'appliquent :

- la force du fil, que le ciseau essaie de couper, en A : $\overrightarrow{A_{fil \to S1}}$. Cette force possède des composantes sur l'axe x, qui vaut 3 N, et sur l'axe de y, qui vaut 8 N. Cette force peut donc être notée, sous forme de vecteur :

$$\overrightarrow{A_{fil \to S1}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- la force du doigt de l'utilisateur, qui appuie sur le ciseau, en C : $\overrightarrow{C_{doigt \to S1}}$. Cette force possède uniquement une composante sur l'axe y, qui vaut 10,3 N. Cette force peut donc être notée, sous forme de vecteur :

$$\overrightarrow{C_{doigt \to S1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10,3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- la force du ciseau (S2) sur le ciseau (S1), en B : $\overrightarrow{B_{S2 \to S1}}$. Pour cette force, nous n'avons aucune donnée sur ses deux composantes en x et y, qui seront des inconnues à déterminer. Cette force peut donc être notée, sous forme de vecteur :

$\overrightarrow{B_{S2 \to S1}} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 0 \end{pmatrix}$, avec x_B et y_B des inconnues.

Objectif : déterminer les caractéristiques de la force en B

- **Étape 1 : application du PFS sur les forces**

Comme (S1) est en équilibre statique, on peut appliquer le PFS, ce qui donne :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_{fil \to S1}} + \overrightarrow{B_{S2 \to S1}} + \overrightarrow{C_{doigt \to S1}} = \overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10,3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

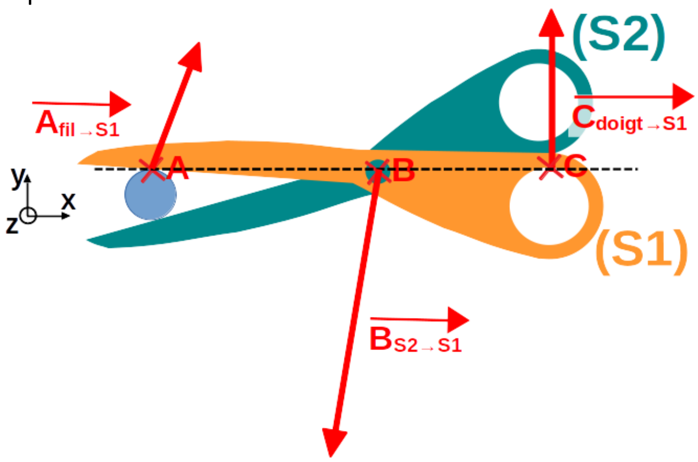
Les composantes sur l'axe z sont nulles, car nous sommes dans un problème plan, de plan (Oxy).

- **Étape 2 : expression et résolution des équations des composantes**

On se retrouve finalement avec deux équations, sur les axes x et y :

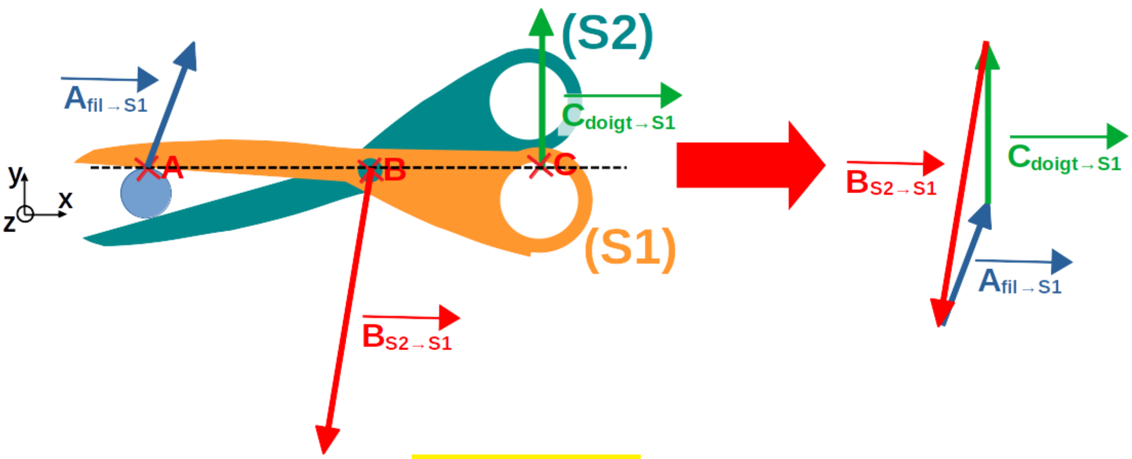
- sur l'axe x : $3 + x_B + 0 = 0 \Leftrightarrow x_B = -3N$
- sur l'axe y : $8 + y_B + 10,3 = 0 \Leftrightarrow y_B = -8 - 10,3 = -18,3N$

La force en B possède donc deux composantes, une sur l'axe x qui vaut -3 N, et une sur l'axe y qui vaut -18,3 N. Ce qui donne, si on la représente :



- **Remarque : conséquence graphique**

On peut remarquer que si l'on met bout à bout les 3 vecteurs forces (ce qui correspond à les additionner), alors on forme une boucle : cela signifie que leur somme est nulle, ce qui est cohérent avec ce que nous dit le PFS.



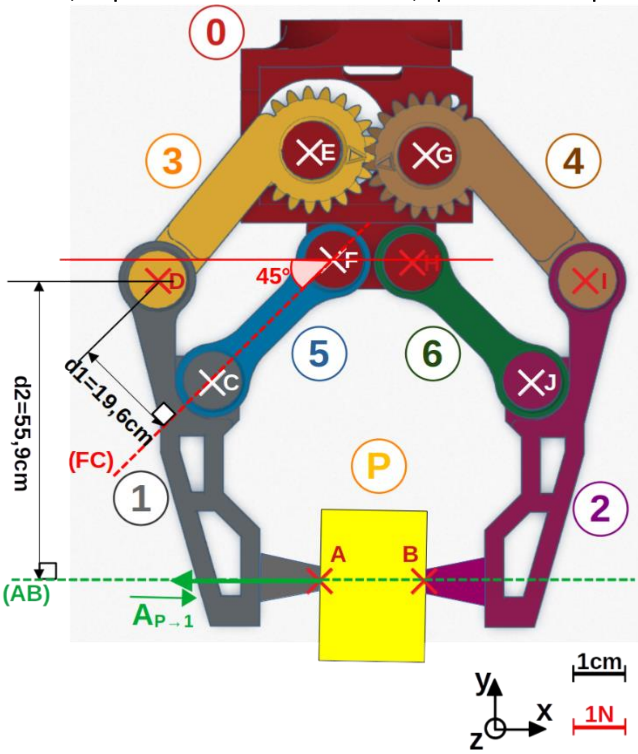
Ce principe graphique, qu'on appelle le **triangle des forces**, peut être utilisé pour rapidement estimer les directions, sens et norme des vecteurs forces pour lesquelles on manque d'information. Il permet aussi de contrôler les résultats trouvés en fin d'étude.

APPLICATION DU PFS : SOLIDE SOUMIS À TROIS FORCES, AVEC ÉQUATION DU MOMENT

Dans cette seconde étude d'un solide soumis à trois forces, nous allons voir que l'égalité des forces $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{0}$ n'est pas suffisante pour déterminer les caractéristiques manquantes de certaines forces. Nous aurons alors besoin d'utiliser l'égalité des moments $\sum \overrightarrow{M_A F_{ext}} = \overrightarrow{0}$.

Présentation du solide étudié

Nous allons étudier, de nouveau, la pince du bras robot NIRO, qui serre une pièce P.



Remarque : cette application décrit une situation différente de « l'application du PFS : solide soumis à deux forces » que nous avons abordée. Certaines données pourront donc être différentes.

Données et forces

La pince se trouve dans une situation d'équilibre statique : on peut donc utiliser le PFS.
Le problème est un problème plan, de plan (Oxy).
Le poids des pièces étant faible en comparaison des efforts de contact, on va négliger les poids dans cette étude.
Dans ce problème, on va isoler la pièce 1. Sur cette pièce, 3 forces s'appliquent :

- la force de la pièce P, qui est saisie par la pince, est appliquée en A à la pièce 1 : $\overrightarrow{A_{P\to1}}$. La direction, le sens et la norme de cette force sont entièrement connues. Elle possède une composante sur l'axe x, qui vaut -28 N, et sa composante sur l'axe y est nulle. Cette force peut être notée sous forme de vecteur :

$$\overrightarrow{A_{P\to1}} = \begin{pmatrix} -28 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- la force de la pièce 5, sur la pièce 1, qui s'applique en C : $\overrightarrow{C_{5\to1}}$. Concernant cette force, nous disposons des données suivantes :
  - o la direction de cette force est la droite (FC) ;
  - o le sens de cette force est de C vers F, c'est-à-dire « vers le haut » et « vers la droite » ;

- les composantes de cette force, sur les axes x et y, sont égales (du fait de l'angle de 45°) : si on pose $k = \left\|\overrightarrow{C_{5\to 1}}\right\|$, la norme de la force en C, alors on a $x_C = y_C = \frac{\sqrt(2)}{2} \times k = \frac{k\sqrt(2)}{2}$ par trigonométrie. On notera que k est forcément positive, comme c'est une norme.

Cette force peut finalement être notée sous forme de vecteur :

$$\overrightarrow{C_{5\to 1}} = \begin{pmatrix} \frac{k\sqrt(2)}{2} \\ \frac{k\sqrt(2)}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- la force de la pièce 3, sur la pièce 1, dont on ne connaît que le point d'application D : $\overrightarrow{D_{3\to 1}}$. Pour cette force, nous n'avons aucune donnée sur ses deux composantes en x et y, qui seront des inconnues à déterminer. Cette force peut donc être notée, sous forme de vecteur :

$\overrightarrow{D_{3\to 1}} = \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \\ 0 \end{pmatrix}$, avec x_D et y_D des inconnues.

Objectif : déterminer les caractéristiques de la force en B

- **Étape 1 : application du PFS sur les forces**

Comme la pièce 1 est en équilibre statique, on peut appliquer le PFS, ce qui donne :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_{P\to 1}} + \overrightarrow{C_{5\to 1}} + \overrightarrow{D_{3\to 1}} = \overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -28 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{k\sqrt(2)}{2} \\ \frac{k\sqrt(2)}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Étape 2 : expression des équations des composantes**

Les composantes sur l'axe z sont nulles, car on est dans un problème plan, de plan (Oxy).
On se retrouve finalement avec deux équations, sur les axes x et y :

- sur l'axe x : $-28 + \frac{k\sqrt(2)}{2} + x_D = 0$
- sur l'axe y : $\frac{k\sqrt(2)}{2} + y_D = 0$

On se retrouve alors bloqué, car on a 3 inconnues : k, x_D, y_D. Il nous faudrait donc 3 équations pour les déterminer, mais nous n'en avons que 2 !
Pour sortir de cette impasse, il va falloir utiliser le PFS sur les moments. On obtiendra ainsi une équation supplémentaire, qui sera suffisante pour résoudre le problème.
Rappel : comme nous sommes dans un problème plan, les moments auront une seule composante, autour de l'axe z.

- **Étape 3 : application du PFS sur les moments**

Pour commencer, il faut choisir un point autour duquel on va exprimer les moments des 3 forces. Plusieurs points pourraient convenir, mais pour faciliter la résolution du problème, et avoir le moins de calculs à faire, on appliquera le principe suivant :

L'ESSENTIEL
Lors de la résolution d'un problème avec le PFS, on exprime les moments par rapport au point d'application de la force pour laquelle on dispose du moins de données.